МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть q – знаменатель геом. прогрессии (коэффициент)

Тогда $a=a$; $b=aq$; $c=aq^2$

$ax^2+2bx+c=0 \Rightarrow ax^2+2x\cdot aq+aq^2=0$

Если $a=0$ или $q=0$, то все члены прогрессии равны 0, $c=0$

Если $a\neq0$, $q\neq0$: $x^2+2qx+q^2=0$

$(x+q)^2=0 \Rightarrow x=-q$

т.е. $d=-q$ или $aq^3=-q \mid :q$

$aq^2=-1$

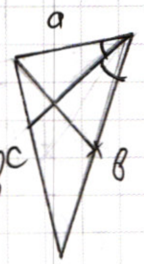
$c=aq^2=-1$ – третий член прогрессии

Ответ: -1.

№2.

Пусть a, b и c – стороны Δ-ка.

$a+b+c=1200$



Допустим, бис-су провели из вершины напротив c, а медиану – из вершины напротив b

Тогда, в силу равенства Δ-ков, $a=\frac{b}{2}$ или $b=2a$

~~Заметим, что в каждом Δ-ке только одна бис-са может быть перпендик. медиане, причём только одной, иначе Δ-к не может существовать.~~

Условие существования Δ-ка: $c+a>b=2a$

$\Rightarrow \underline{c>a}$

$a+2a+c=1200 \Rightarrow c=1200-3a=3(400-a)$

$1200-3a > a \Rightarrow a<300$

т.е. существует 299 значений стороны a, т.е. 299 удовл. усл-ю треугольников.

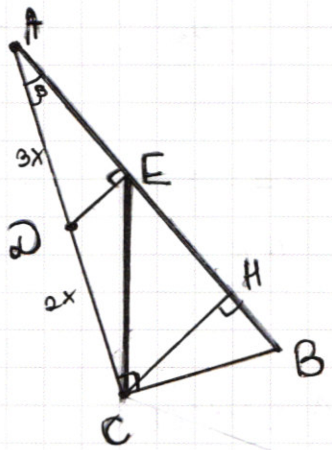
Но, если $a=\frac{c}{2}$, то сущ. 2 пары перп. медиан и бисс. Такое происходит при: $a=1{,}5(400-a)$

$2{,}5a=600 \Rightarrow a=240$ — значит, $a=240$ не подх.

т.е. всего [redacted] 298 Δ-ков

Ответ: 298

№4.



Дано:
ΔABC $\angle C=90°$
$D\in AC$; $E\in AB$;
$\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$
$DE\perp AB$
$\angle CED=45°$
а) $tg\angle BAC$ — ?
б) $AC=\sqrt{29}$; S_{CED} — ?

Решение

а) 1) Построим высоту CH ΔABC.

$\angle CED=45° \Rightarrow \angle CEH=90°-\angle CED=45°$ (т.к. $DE\perp AB$)

В ΔCEH: $\angle CHE=90°$; $\angle CEH=45° \Rightarrow \angle ECH=45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ECH$ — р/б с осн. EC $\Rightarrow CH=EH$

2) $\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{DC}=\frac{3}{2}$

Тогда по расшир. теореме Фалеса: $\frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EH}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow EH=\frac{2}{3}AE=CH \Rightarrow AH=\frac{5}{3}AE$

3) По св-ву высоты к гипотенузе: $CH^2=BH\cdot AH$

$\frac{4}{9}AE^2=BH\cdot\frac{5}{3}AE \Rightarrow BH=\frac{4}{15}AE$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

4) В $\triangle BCH$: $\angle CBH = 90^\circ - \angle BAC$

$tg\angle CBH = \frac{CH}{BH} = \frac{\frac{2}{3}AE}{\frac{4}{15}AE} = \frac{2}{3}\cdot\frac{15}{4} = \frac{5}{2}$

$tg\angle BAC = \frac{1}{ctg\angle BAC} = \frac{1}{tg\angle CBH} = \frac{2}{5}$

б) 5) $S_{\triangle CED} = S_{\triangle ACH} - S_{\triangle CEH} - S_{\triangle ADE}$

В $\triangle ACH$ по т. Пифагора:

$AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow 29 = \frac{25}{9}AE^2 + \frac{4}{9}AE^2 = \frac{29}{9}AE^2$

$AE^2 = 9 \Rightarrow AE = 3$

В $\triangle ADE$: $tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} \Rightarrow DE = AE\, tg\angle BAC = 3\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

$CH = EH = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}\cdot 3 = 2 \Rightarrow AH = 2+3=5$

6) $S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2}\cdot AH\cdot CH = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2 = 5$

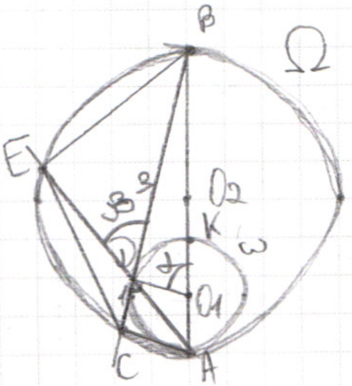
$S_{\triangle CEH} = \frac{1}{2}\cdot CH\cdot EH = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{6}{5} = \frac{18}{10} = 1,8$

$\Rightarrow S_{\triangle CED} = 5 - 2 - 1,8 = 1,2$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$ б) 1,2

№5



Дано:
окр-ти Ω и ω
кас. внутр. образом в A
Ω больше ω
AB – диам. Ω
BD – кас. ω
$BD \cap \Omega = C$
$AD \cap \Omega = E$
$CD = 1$; $BD = 3$

Найти: R – ? r – ? S_{BACE} – ?

Решение

1) Проведём AC. $\angle ACB$ – впис. и опир. на диам. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$

2) Рассм. $\triangle BDO_1$ и $\triangle BCA$: $\angle ABC$ – общ.; $\angle BDO_1 = \angle BCA = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ (по 2-м углам) $\Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA}$; $\frac{3}{3+1} = \frac{2R-r}{2R}$

$\frac{3}{4} = 1 - \frac{r}{2R} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = 2r$

3) ~~[illegible]~~ По св-ву касат. и секущ. из одной т-ки:

$BD^2 = BK \cdot BA \Rightarrow 9 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$(R-r)R = \frac{9}{4} \Rightarrow (2r - r) \cdot 2r = \frac{9}{4}$

$2r^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

4) Пусть $\angle BO_1D = \alpha$;

В $\triangle BDO_1$: $\cos\alpha = \frac{DO_1}{BO_1} = \frac{r}{2R-r} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{9\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}$

$\angle AO_1D = 180° - \angle BO_1D = 180° - \alpha$

$\Rightarrow \cos\angle AO_1D = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

5) По т. кос. в $\triangle AO_1D$:

$AD^2 = r^2 + r^2 + 2r^2 \cdot \cos\alpha = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} + 2 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{3} =$

$= \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$

6) По св-ву хорд: $CD \cdot BD = AD \cdot ED$

$1 \cdot 3 = \sqrt{3} \cdot ED \Rightarrow ED = \sqrt{3} = AD$

7) Пусть $\angle EDB = \beta$

В $\triangle EDB$: $\cos\beta = \frac{DE}{BD}$ (т.к. $\angle AEB = 90°$ - впис. и опир. на диам.)

$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{1 - \frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot \sin\beta \cdot AE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 4\sqrt{2}$

Ответ: $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $S = 4\sqrt{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

Это нер-во значит, что прямая $y = ax + b$ находится выше параболы $y = 2x^2 - x - 1$ и ниже ~~прямой~~ ломаной $y = x + |2x - 1|$

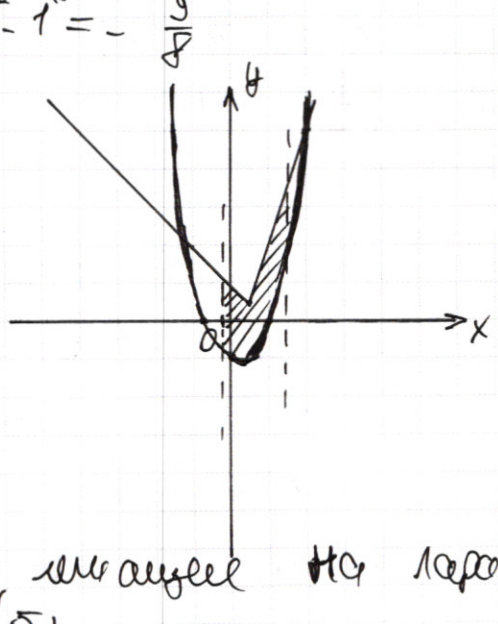
Постр. графики:

$y = x + |2x - 1|$. $x = 0,5$ – точка излома

при $x \ge 0,5$ $y = 3x - 1$
при $x < 0,5$ $y = -x + 1$

$y = 2x^2 - x - 1$ – парабола, ветви вверх.

$x_{в.} = \frac{1}{4}$; $y_{в.} = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$



Т.е. для выполнения условия каждая точка прямой $y = ax + b$ на $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ должна лежать в выделенной обл-ти.

Пересечения ломаной и параболы происх. в т-ах $(2;5)$ и $(-1;2)$

Проверим крайние т-и области, лежащие на параболе

$y = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$ $\quad (-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$

$y = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 2$ $\quad (\frac{3}{2}; 2)$

Излом ломаной происх. в т-ке $(0,5; 0,5)$

Прямая попадает в указ. область на $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ тогда, когда её значения в точках $x = -\frac{1}{4}$; $x = \frac{3}{2}$ и $x = 0,5$ попад. в обл.

Проверим нижние граничные точки обл-ти $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ и $(\frac{3}{2}; 2)$.

т.е. пусть прямая $y=ax+b$ проходит через них

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b \quad (1) \\ 2 = \frac{3}{2}a + b \quad (2) \end{cases}$$

(2) − (1): $\frac{3}{2}a + \frac{1}{4}a = 2 + \frac{5}{8}$

$\frac{7}{4}a = \frac{21}{8} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$b = 2 - \frac{3}{2}a = 2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{8-9}{4} = -\frac{1}{4}$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

Проверим y в точке $x=0{,}5$:

$y = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\Rightarrow$ прямая пройдёт через точку излома ломаной.

Это самое низкое положение прямой $y=ax+b$, т.е. при любых других a и b прямая пройдёт выше точки ~~(0,5; 0)~~ $(0{,}5; 0{,}5)$ и не все её точки на $x\in[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ попадут в обл-ть $\Rightarrow$ $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$ – единств. пара a и b

(при $a=0$ тоже ~~нет~~ не все т.к. попадут в обл-ть)

Ответ: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$

№3

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \quad |\,)^2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \quad (1) \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2 = 3 \quad (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq 2 \end{cases}$$

Единств. вариант: $(x-1)^2=1$, $(y-2)^2=1$

скобки ~~(x-1)(y-2)~~ $(x-1)$ и $(y-2)$ одного знака

$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)=1 \\ (y-1)=1 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x-1)=-1 \\ (y-1)=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

~~Подст. в. (1)~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$(2-4)^2=(2-1)(2-2)$~~

Единств. вариант: $(x-1)^2=1$ и $(y-2)^2=1$

т.к. скобки $(x-1)$ и $(y-2)$ одного знака, то:

$\begin{cases}(x-1)=1\\(y-2)=1\end{cases}$ или $\begin{cases}(x-1)=-1\\(y-2)=-1\end{cases}$

$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

Подст. в (1):

$(3-2\cdot2)^2=(2-1)(3-2)$

$1=1\cdot1$ - верно

Подст. в (1):

$(1-2\cdot0)^2=(0-1)(1-2)$

$1=(-1)\cdot(-1)$

$1=1$ - верно

$\Rightarrow$ $(2;3)$ и $(0;1)$ - решения ур-я.

Ответ: $(2;3)$; $(0;1)$

№7.

$f(ab)=f(a)+f(b)$; $f(p)=[p/2]$

~~$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$~~

~~$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$~~

~~т.е. нужно найти пары, такие, что $f(x)>f(y)$~~

$f(1)=$ неизв. $f(2)=1$; $f(3)=1$; $f(4)=f(2)+f(2)=2$

$f(5)=2$; $f(6)=f(2)+f(3)=2$; $f(7)=3$

$f(8)=f(2)+f(4)=1+2=3$

$f(8)=f(8)+f(1)=3+f(1)=3$ $\Rightarrow$ $f(1)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=1+1=2$

$f(1)=0;$ Возьмём числа n и $\frac{1}{n}$, $n \neq 0$

$f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(n) + f(\frac{1}{n}) = 0$

$\boxed{f(\frac{1}{n}) = -f(n)}$

т.е. $f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(1)=0;$ $f(2)=1;$ $f(3)=1;$ $f(4)=2;$ $f(5)=2$

$f(6)=2;$ $f(7)=3;$ $f(8)=3;$ $f(9)=2;$

$f(10)=f(2)+f(5)=3;$ $f(11)=5;$ $f(12)=2+1=3$

$f(13)=6;$ $f(14)=1+3=4;$ $f(15)=2+1=3$

$f(16)=2+2=4;$ $f(17)=8;$ $f(18)=1+2=3$

$f(19)=9;$ $f(20)=4;$ $f(21)=1+3=4$

При $x=1$: 20 значений y (так что $f(x) \leq f(y)$)

При $x=\{2;3\}$: 18 значений

При $x=\{4;5;6;9\}$: 14 значений

При $x=\{7;8;10;12;15;18\}$: 8 значений

При $x=\{14;16;20;21\}$: 4 значения

При $x=11$: 3 зн-я

При $x=13$: 2 зн-я

При $x=17$: 1 зн-е

При $x=19$: 0

3
26
36
56
48
16
182

Всего: $20+2\cdot 18+4\cdot 14+6\cdot 8+4\cdot 4+3+2+1 =$

$= \cancel{20+}\ 26+36+56+48+16 = 182$

Ответ: 182

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f^2(ab) = f^2(a) + f^2(b) + 2f(a)f(b)$

$f^2(ab) = (f(a) - f(b))^2 + 4f(a)f(b)$

$f(a) - f(b) = \sqrt{f^2(ab) - 4f(a)f(b)}$

№3

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{cases}$$

$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = p \cdot t \quad 1 \cdot 4 \\ 2p^2 + t^2 = 3 \end{cases}$$

$y^2 - 4yx + 4x^2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)}$ $|()^2$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$ (2)

~~$y^2-5xy+y+2x-xy-2x+4x^2=0$~~

$y^2-4xy+4x^2-xy+2x+y-2=0$

$y^2-y(5x+1)+4x^2+2x-2=0$ $\quad y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$ (2)

$D=(5x+1)^2-16x^2-8x+8=25x^2+10x+1-16x^2-8x+8=$

$=9x^2+2x+9;\ >0$

ОДЗ

$$\left[\begin{array}{l} y\geq 2x \\ \begin{cases} y\geq 2 \\ x\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq 2 \\ x\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(y-2x)^2=(y-2)(x-1)$

$x^2+y^2+x^2-4x-4y+3=0$

$(x-1)^2+(y-2)^2+3-4+x^2-2x-1=x^2-2x-2$

$(x-1)^2+(y-2)^2-4+x^2-2x-2=0$

$+(x-1)^2-3$

~~$2x^2+2y^2+4xy=2(x+y)^2-$~~

~~$2(x+y)^2-y^2-4xy-4x-4y+3=0$ (1)~~

~~(1)+(2) $\quad 2(x+y)^2-9xy+y+4x^2+2x-2-4x-4y+3=0$~~ $\quad 2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

~~$2(x+y)^2$~~

(1)+(2) $\quad (2x^2+y^2-4x-4y+3)+y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$

$6x^2+2y^2-2x-3y+1$ ~~$+xy$~~ $-5xy=0$

$(y^2-4xy+4x^2)-4x^2+4xy$

$2x^2-x-1=-x+1$ $\quad 2x^2=2$ $\quad x=-1$

$y=-1+|-2-1|=-1+3=2$

$2\cdot 1+1-1=\ 2$

~~x^2+y^2+2xy~~ $(x+y)^2$

$(y-2x)^2-4x^2+4xy+2x^2-4x-4y+3=0$

$(y-2x)^2-2x^2-4x-4y+4xy+3=0$

$xy-2x-y+2-2x^2-4x-4y+4xy+3=0$

$-2x^2-6x-5y+5xy+5=0$

~~$2x^2+x(6-5y)$~~

$2x^2+6x+5y-5xy-5=0$

$2x^2+x(6-5y)+5y-5=0$

$D=(6-5y)^2-8(5y-5)=$

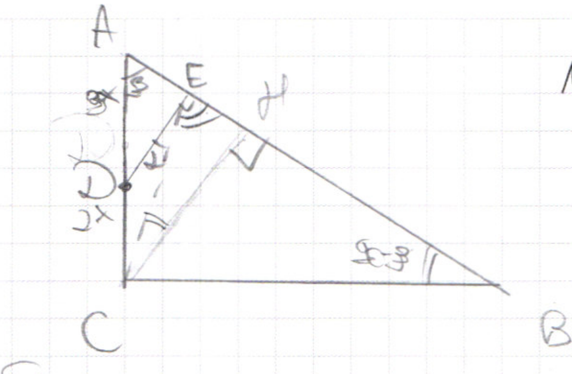
$=36-60y+25y^2-40y+40$

$=25y^2-100y+76$

$D=100^2-100\cdot 76=100\cdot 24$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



№4.

$\angle CED = 45^\circ \Rightarrow \angle CEB = 90^\circ$

$\frac{DE}{CH} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

$\angle CEH = 45^\circ \Rightarrow CH = EH$

$\frac{EH}{AE} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

$\frac{CH}{AE} = \frac{2}{3}$ $\quad AH = \frac{5}{3}AE$

$CH^2 = AH \cdot BH$ $\quad CH = \frac{2}{3}AE$

$\frac{4}{9}AE^2 = \frac{5}{3}AE \cdot BH$

$\frac{4}{9}AE = \frac{5}{3}BH \mid \cdot 3$ $\quad \frac{4}{3}AE = 5BH$

$BH = \frac{4}{15}AE$

$CH = \frac{2}{3}AE$

б) $AC = \sqrt{29}$

$S = S_{\triangle ACH} - S_{\triangle CEH} - S_{\triangle DAE}$

$S_{\triangle ACH} = AH \cdot CH \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{3}AE \cdot \frac{2}{3}AE \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}AE^2$

$AD = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

$1 + tg^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$1 + \frac{4}{25} = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$\cos\beta = \sqrt{\frac{25}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$ $\quad tg(90-\beta) = \frac{CH}{BH} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{15}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{5}{2}$

$ctg\,\beta = tg(90-\beta)$

$tg\,\beta = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$

$\frac{AE}{AD} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$AE = \frac{5}{\sqrt{29}} AD = \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{29} = 3$

$tg\,\beta = \frac{DE}{AE} = \frac{2}{5}$

$DE = AE \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

$AH = 5 \quad EH = 2 = CH$

$S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$

$S_{\triangle CEH} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

$S_{\triangle DAE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{10} = 1{,}8$

$S = 5 - 2 - 1{,}8 = 3 - 1{,}8 = 1{,}2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a, b, c;$

$a;\ aq;\ aq^2;$

$\cancel{a}x^2 + 2\cancel{a}qx + \cancel{a}q^2 = 0$

$x^2 + 2qx + q^2 = 0 \qquad (x+q)^2 = 0$

$x = -q$

$a;\ aq;\ aq^2;\ -q \quad \Rightarrow \quad aq^3 = -q$

$c = aq^2 = -1$

$\frac{600}{25} = \quad \frac{600}{25} = \frac{6000}{25} = = \frac{1200}{5} = 240$

№2

$a+b+c=1200;$

$3a+c=1200; \quad c+a > b = 2a$

$\Rightarrow a = \frac{b}{2}; \quad 2a = b$

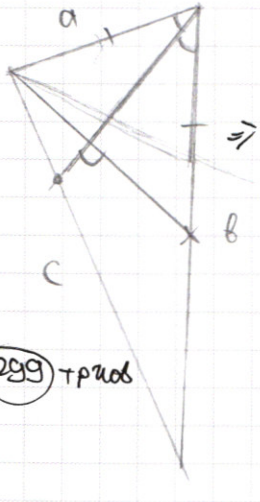
$c > a$

$c = 1200 - 3a \qquad 1200-3a > a$

$4a < 1200$

$c = 3k; \quad k = 400 - a \qquad a < 300$

$\Rightarrow 299 - 1 + 1 = 299$ треуг



№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} & (2) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 & (1) \end{cases}$$

(1) $\cancel{2x^2 - 4x + 1 + y^2 - 4y + 2 = 0}$

$\cancel{(\sqrt{2})^2 x^2 - 2\sqrt{2}x}$

$y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$

$2x^2 - 4x + (y-2)^2 - 1 = 0 \qquad (y-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 - 2x - 2 = 0$

$(y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 - 5 + x^2 = 0 \qquad y^2 - 4y + 4 + 2x^2 - 4x + 2 - 3 = 0$

$(2)\uparrow^2 \quad y^2 - 4yx + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 = x(y-2) - (y-2) = (y-2)(x-1)$

$\cancel{y^2 + 8yx + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0} \qquad (y - 2x) =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

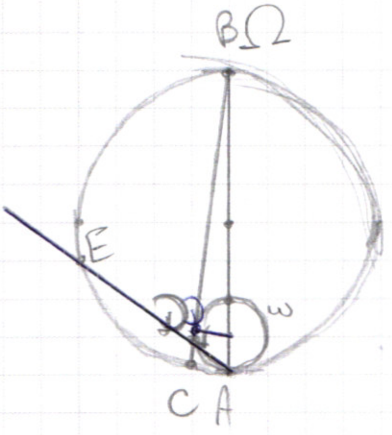
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

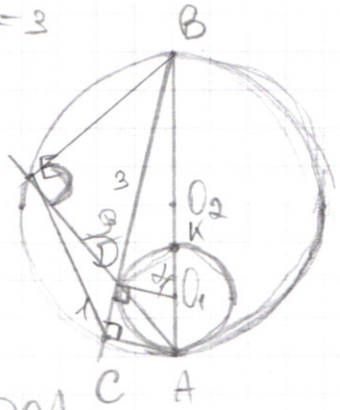
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



$CD = 1; \quad BD = 3$



$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{r}{2R} = \frac{1}{4} \quad |\cdot 2 \qquad \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \qquad R = 2r$$

$BD^2 = BK \cdot BA; \quad 9 = (2R - 2r) \cdot 2R =$

$9 = 4(R - r) \cdot R; \quad R(R - r) = \frac{9}{4}$

$2r(2r - r) = \frac{9}{4} \Rightarrow 2r^2 = \frac{9}{4}$

$r^2 = \frac{9}{8}$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$3^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$9 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$R(R - r) = \frac{9}{4}$

$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{3}{2R - r} = \frac{3}{3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}} = \frac{3}{\frac{9\sqrt{2}}{4}} = \frac{12}{9\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 2}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$AD^2 = r^2 + r^2 + 2r^2\cos\alpha = \frac{9 \cdot 2}{16} + \frac{9 \cdot 2}{16} + 2 \cdot \frac{9 \cdot 2}{16} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$$

$AD = \sqrt{3} \qquad AD \cdot DE = DC \cdot BD$

$\sqrt{3}\,DE = 1 \cdot 3 \Rightarrow DE = \sqrt{3}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 4\sqrt{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

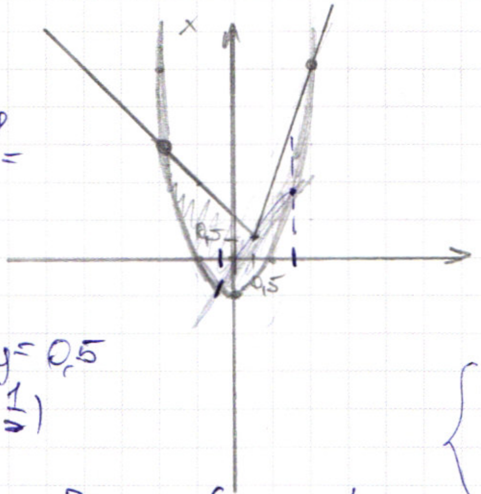
№6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$ $\quad x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

1) при $x = -\frac{1}{4}$

$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 =$

$= -\frac{5}{8}$ $\quad (-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$



2) излом: $x = 0{,}5$; $y = 0{,}5$

3) при $x = \frac{3}{2}$ $\quad (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = \frac{4}{2} = 2$

$(\frac{3}{2}; 2)$

$$\begin{cases} a \cdot -\frac{1}{4} + b = -\frac{5}{8} \\ a \cdot \frac{3}{2} + b = 2 \end{cases}$$

$\frac{3}{2}a + \frac{1}{4}a = 2 + \frac{5}{8}$

$\frac{7}{4}a = \frac{21}{8}$

$a = 1{,}5$

$b = 2 - (\frac{3}{2})^2 = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{8}$

$\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{5}{8}}{2}$

$1{,}5 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$

таких пар нет

№7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(p) = [p/2]$ для простых $\quad$ если $\frac{x}{y}$ прост. число не

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

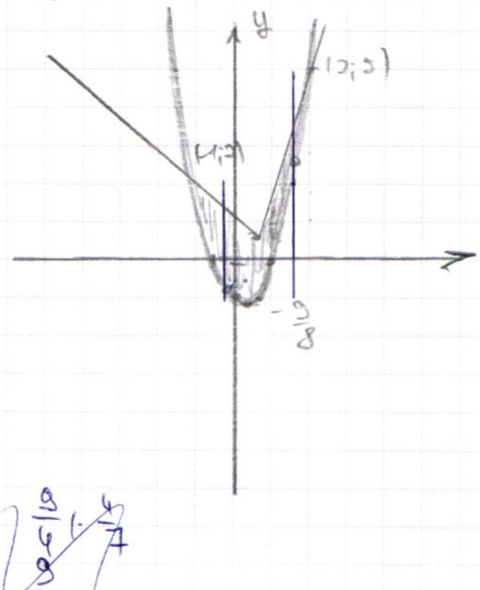
пусть $x = 6$. тогда $f(6) = f(2) + f(3) = 1 + 1 = 2$

$\frac{3}{2} + |\frac{6}{2} - 1| =$
$= \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$

$x_в = \frac{1}{4}$

$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$

$= \frac{1 - 2 - 8}{8} = -\frac{9}{8}$



$-\frac{1}{4} + 1 - \frac{2}{4} - 1| =$
$= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$

$x \in [0; 2]$

$x \in [1; 1]$

$0{,}5a + b \le 0{,}5$

$-\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a + b \le \frac{5}{4}$ (2)

$2 \le \frac{3}{2}a + b \le \frac{7}{2}$ (1)

(1)-(2) $\frac{21}{8} \le \frac{7}{4}a \le \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{7}$

$\frac{3}{2} \le a \le \frac{9}{7}$

$\boxtimes$ черновик $\quad \square$ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)