МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, b, c – послед. члены Г.П. $\Rightarrow a\cdot d^2 = b\cdot d = c \Rightarrow \begin{cases} b = a\cdot d \\ c = a\cdot d^2 \end{cases}$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac$

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{b \pm \sqrt{a^2d^2 - a\cdot ad^2}}{a} = \frac{b \pm 0}{a} = \frac{b}{a}.$$

Тогда: $ad^3 = bd^2 = cd = \frac{b}{a}$.

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{c}{d^2}} = \frac{c}{d}\cdot\frac{d^2}{c} = d \ (d \neq 0).$$ Тогда $\frac{b}{a} = d = c\cdot d \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 1$.

Ответ: $c = 1$.

№3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ:

$xy - 6y - x + 6 \geq 0$

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$

$x \geq 6y$

$(x - 6y)^2 = xy - 6y - x + 6$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$

$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0 \quad (3)$

$(2) - (3)$:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

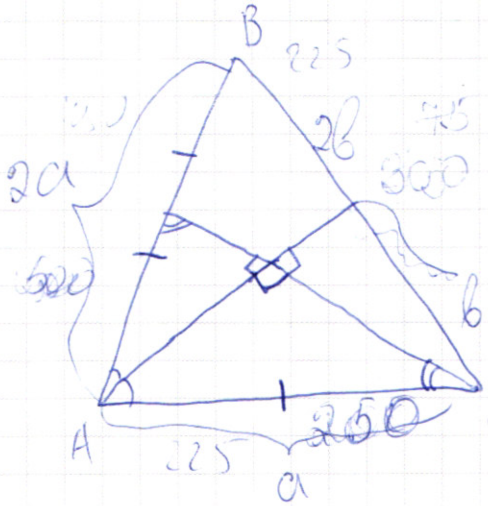
$ad^2 = bd = c$ $\quad ad = b$

$$\frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \cancel{2}\sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2d^2}}{a} = \frac{b \pm \sqrt{a^2d^2 - a^2d^2}}{a} =$$

$$= \frac{b}{a}$$

$\cancel{(x-6y)}^2 \; (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$x - 6y = \sqrt{(6-x)(1-y)}$



$3a + 3b = 900$

$a + b = 300$

151 149

~~200~~ ~~100~~

~~149~~ ~~101~~

~~285~~ ~~125~~

~~228~~ ~~75~~

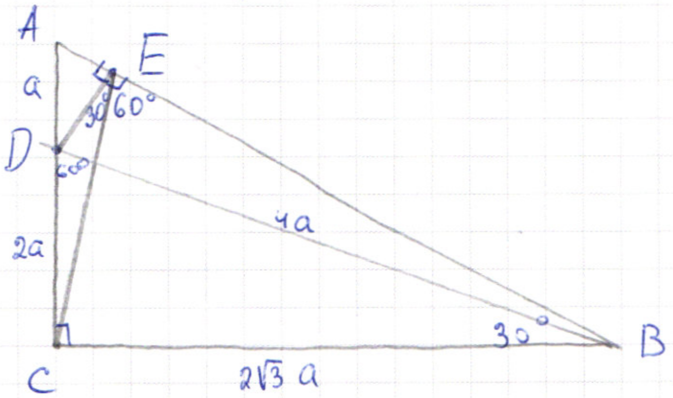
224 76

$$\begin{cases} a > b \\ 3b > a \\ a < \frac{3b+a}{2} \end{cases}$$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = ? = \frac{BC}{AC}$



$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

$\frac{AE}{3a} = \frac{a}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = 3a^2$

$\frac{DE}{A}$

$3a = \sqrt{7} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow CD = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2y^2-12x-4y+20+13xy-36y^2-6y-x+6=0$

$-34y^2+13xy-10y-13x+26=0$

$x(13y-13)=34y^2+10y-26$

1) $13y-13=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow 34y^2+10y-26\neq 0 \Rightarrow y$ не может быть равен 1.

2) $13y-13\neq 0$: $x=\dfrac{34y^2+10y-26}{13(y-1)}$

~~Подставим это в (2). Тогда:~~

$\cancel{\dfrac{(34y^2+10y-26)^2}{169(y-1)^2}+2y^2-12\cdot\dfrac{34y^2+10y-26}{13(y-1)}-4y+20=0}$ $\cdot 169(y-1)^2$, $y\neq 1$.

~~Подставим это в (1)~~.

$\cancel{x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \quad (x-6y\geq 0)}$.

$$\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \ (3) \quad (x-6y\geq 0). \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \quad \cdot 18 \end{cases}$$

$18x^2+36y^2-216x-72y+360=0$. Вычтем из этого ур-я (3). Получится:

$17x^2-216x-72y+360+12xy=6y+x-xy-6$

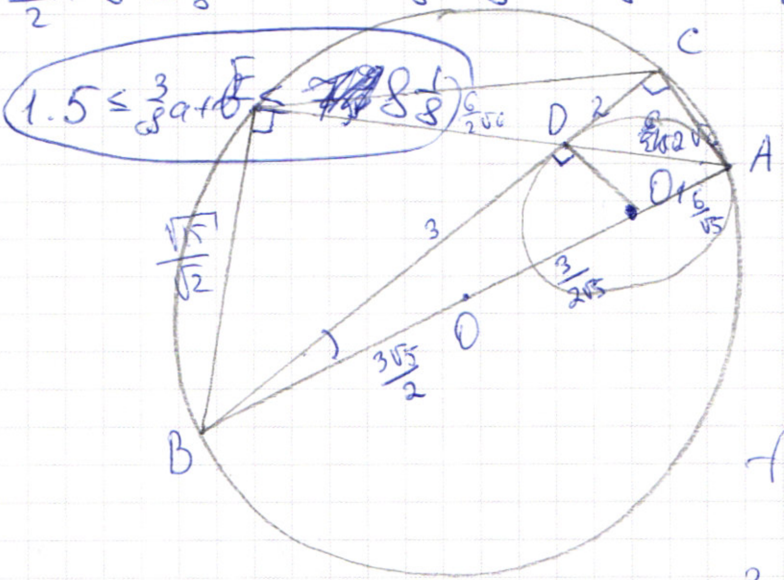
$17x^2+13xy-217x-78y+366=0$

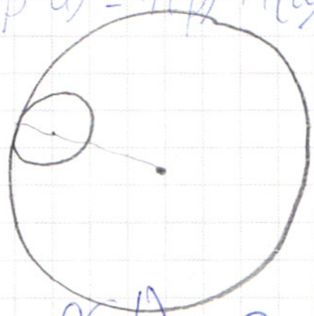
$\frac{15}{2} - 6 \le \frac{3}{8}a + b \le -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{9}{8} + 7$ $\quad \frac{9}{64}\cdot 8$

$\frac{3\sqrt5}{2} - \frac{6^3}{\sqrt5} = \frac{Rr\sqrt{15-12}}{2\sqrt5} - 3$

45

$f(p\cdot q) = f(p) + f(q)$





$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$(2R - r)^2 = 9 + r^2$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$\frac{3}{5} = \frac{2R - r}{2R}$

$6R = 10R - 5r$

$4R = 5r \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{4}{5}R$

$4R^2 - \frac{16}{5}R^2 = 9$

$20R^2 - 16R^2 = 45 = 4R^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3\sqrt5}{2} \Rightarrow r = \frac{12\sqrt5}{10} = \frac{6\sqrt5}{5} = \frac{6}{\sqrt5}$

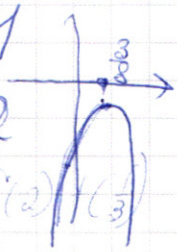
$BO_1 = \frac{10}{4}r - r = \frac{6}{4}r = \frac{3}{2}r = \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt5} = \frac{9}{\sqrt5}$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(6) = 2$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{3}\right)$



$3\frac{5}{4}r^2 = 9$

$BD\cdot DC = AD\cdot DE \Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{}$

$\cos\angle DBA = \frac{5}{3\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{3}$

$\frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$-6 \le b \le 7$

$4 \le \frac{1}{2}a + b \le 8$

$-16 \le -\frac{1}{2}a + b \le 2$

$2b \le 10$ $\quad b \le 5$

$b \ge -6$

$EA = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{6}{2\sqrt6} + 2\sqrt6 = \frac{6 + 24}{2\sqrt6} = \frac{30}{2\sqrt6} = \frac{15}{\sqrt6} =$

$b \le 3.5$ $\quad a \ge 0.5$

$2b \ge -12$

$b \ge -6$

$2 \le a + b \le 5$

$a \ge 0$

$b + a \ge 2$

$b - 3.5a \le 2$

$$\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = (1-y)(6-x) \\ x^2 + 2y^2 = 12x + 4y - 20 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y=\frac{17x^2-217x+366}{78-13x}.$$

Подставим $x=\frac{34y^2+10y-26}{13(y-1)}$ во (2). Тогда:

$$\frac{1156y^4+680y^3-1768y^2+100y^2-520y+676}{169y^2-338y+169}+2y^2-4y+20-$$

$$-\frac{408y^2+120y-312}{13(y-1)}=0 \quad /\cdot 169(y-1)^2,\ y\neq 1.$$

$$1156y^4+680y^3-1768y^2+100y^2-520y\cancel{+676}+338y^4-676y^3+338y^2-$$

$$-676y^3-1352y^2\cancel{-676}+3380y^2-6760y+3380-$$

$$-5304y^3+5304y^2-1560y^2+1560y+4056y-4056=0$$

$$1494y^4-5976y^3+4442y^2-1664y-676=0 \quad /:2$$

$$747y^4-2988y^3+2221y^2-832y-338=0$$

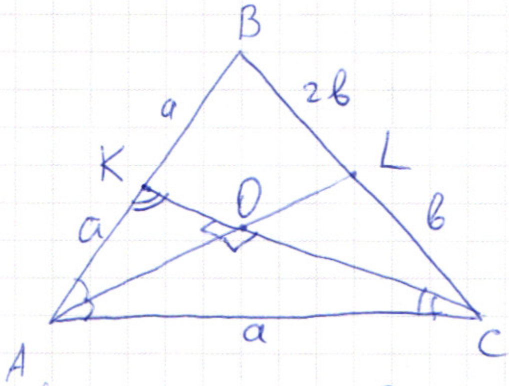
Можно заметить, что это ур-е имеет ровно 1 решение и оно >0.

Заметим, что при $y=0$ $x=2$, и эта пара чисел является решением. Других решений нет, т.к. в числителе зн-я x стоит ф-я параболы ветвями вверх, а в знаменателе – ф-я прямой. Аналогично получается зн-е для y: $y = \frac{17x^2 - 217x + 366}{13(6-x)}$. Т.е. формально у нас есть 2 одинаковые зависимости в числителе и знаменателе (парабола ветвями вверх в числителе и прямая в знаменателе). Они могут иметь max. 2 пересечения. Но таких зависимости у нас 2 $\Rightarrow$ система имеет max. 1 реш-е.

Ответ: $x=2$; $y=0$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№2.

ABC – треуг.

Б.О.О., пусть биссектриса AL, выходящая из в. A, ⊥ медиане CK, выходящей из C (L, K – их точки пересечения с BC и AB соотв.). O – их т. пересечения.

AL – биссектр. ⇒ $\angle BAL = \angle LAC$. По условию, $\angle AOC = \angle AOK = 90°$. Тогда $\triangle AKO = \triangle ACO$ по ~~катету~~ 2-м углам и общей стороне. Тогда $\angle AKO = \angle ACO$. Пусть $AK = a$. Тогда и $KB = a$ (CK - медиана). $\angle AKC = \angle ACK \Rightarrow \triangle AKC$ р/б $\Rightarrow AC = AK = a$.

AL – биссектриса $\Rightarrow \frac{LC}{LB} = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$. Пусть $LC = в$. Тогда $BL = 2в$.

Тогда $900 = 3a + 3в \Rightarrow a + в = 300$.

ABC – треуг. $\Rightarrow \begin{cases} AB + AC > BC \\ BC > AB - AC \\ AB < AC + BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a > 3в \\ 3в > a \\ 2a < 3в + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > в \\ 3в > a \\ a < \frac{3в + a}{2} \end{cases}$

Также $a + в = 300$. Можно заметить, что решениями данного уравнения, учитывая полученную систему, являются следующие пары a и в: (151; 149), (152; 148), ..., (224; 76). (I число = a; II число = в). Значит таких треугольников существует всего $N = 224 - 151 + 1 = 74$ штуки.

Ответ: 74 треугольника.

(Мы считаем, что треуг. отличающиеся лишь поворотом, одинаковы).

№ 4.

Пусть $AD = a$. Тогда $\frac{AD}{AD+DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow DC = 3a - a = 2a$.

Проведём BD.

$\begin{cases} \angle DCB = 90^\circ \\ \angle DEB = 90^\circ \end{cases}$, эти углы противоположны в $DEBC \Rightarrow$

$\Rightarrow DEBC$ – вписанный 4-угольник.

Тогда $\angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$; $\angle CDB = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Тогда ΔCDB – прямоуг. тр. с углом $60^\circ \Rightarrow$ ~~Ек~~ $BD = 2CD = 4a$;

$CB = 2\sqrt{3}a$.

Тогда $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}a}{3a} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Но также $tg\angle BAC = \frac{DE}{AE}$ $(DE \perp AB)$ $= \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot DE$.

Th. Пифагора: $AD^2 = AE^2 + DE^2$

$a^2 = \frac{3}{4}DE^2 + DE^2 \Rightarrow DE = \sqrt{a^2 \cdot \frac{4}{7}} = \frac{2a}{\sqrt{7}}$.

~~Th cos. DE~~ $AC = \sqrt{7} = 3a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

Тогда $DE = \frac{2}{3}$; $DC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Th. cos.: $DE^2 + CE^2 - 2DE \cdot CE\cos 30^\circ = CD^2$

$\frac{4}{9} + CE^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot CE = \frac{28}{9}$

$CE^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}CE - \frac{24}{9} = 0$

$D = \frac{4}{9} + \frac{96}{9} = \frac{100}{9}$

$CE_{1,2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pm \frac{10}{3}}{2}$. Но $CE > 0 \Rightarrow CE = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{10}{3}}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{10}{3}}{2} = \frac{10+2\sqrt{3}}{6} = \frac{5+\sqrt{3}}{3}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

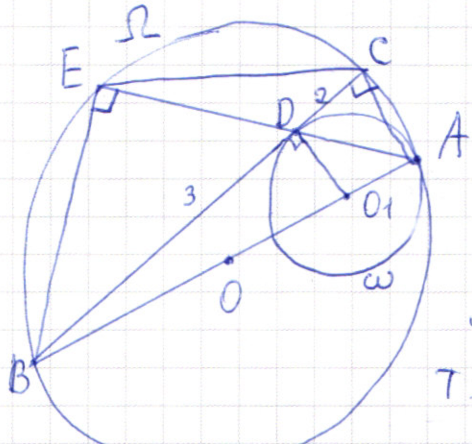
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда Th. sin.: $\frac{CD}{\sin\angle DEC} = 2R \Rightarrow R = \frac{\frac{2\sqrt7}{3}}{2\cdot\frac12} = \frac{2\sqrt7}{3}$.

Также $S_{\triangle CDE} = \frac{CD\cdot DE\cdot EC}{4R} = \frac{\frac{2\sqrt7}{3}\cdot\frac23\cdot\frac{5+\sqrt3}{3}}{\frac{8\sqrt7}{3}} =$

$= \frac{\frac23\cdot\frac{5+\sqrt3}{3}}{4} = \frac{2(5+\sqrt3)}{36} = \frac{5+\sqrt3}{18}$.

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt3}$; $S_{\triangle CED} = \frac{5+\sqrt3}{18}$.



№5.

O_1 и O - центры ω и Ω соотв.

ω и Ω касаются внутренним образом ⇒ их центры лежат на прямой, которая является диаметром большей окружности, т.е. A, O_1, O, B лежат на 1 прямой.

Заметим, что возможно 2 расположения BC, но картинки в этих 2 сл-х будут симметричны ⇒ б.о.о. пусть BC проходит так, как на рис. Пусть $BO = OA = R$; $AO_1 = r$.

Проведём O_1D. $O_1D \perp BC$, т.к. BC - касат.

Тогда Th. Пифагора: $O_1D^2 + BD^2 = O_1B^2$.

$r^2 + 9 = (2R-r)^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$9 = 4R^2 - 4Rr$ (1).

$\angle BCA$; $\angle BEA$ опираются на AB; AB - диаметр $\Rightarrow \angle BCA = \angle BEA = 90°$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Th Пифагора: $BC^2+AC^2=AB^2$~~ $\angle ACB = \angle O_1DB = 90° \Rightarrow AC \parallel O_1D \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$. Тогда $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA}$

$\frac{3}{5} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 6R = 10R - 5r \Rightarrow 4R = 5r \Rightarrow r = \frac{4}{5}R$. Подставим это в (1):

$9 = 4R(R-r) = 4R \cdot \frac{1}{5}R = \frac{4}{5}R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Тогда $r = \frac{4}{5}R = \frac{12\sqrt{5}}{10} = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Тогда $BO = R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $OO_1 = R - r = \frac{3}{2\sqrt{5}}$; $O_1A = r = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Тогда $\cos\angle DBO_1 = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{2R} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Th. cos.: $AD^2 = BD^2 + AB^2 - 2BD\,AB\cos\angle DBO_1$

$AD^2 = 9 + 45 - \frac{18\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{3} = 54 - 30 = 24 \Rightarrow AD = 2\sqrt{6}$.

~~ACEB - вписа-угольник~~

~~$S_{\triangle}BE$~~ ACEB - впис. 4-уг. $\Rightarrow BD \cdot DC = AD \cdot DE \Rightarrow DE = \frac{6}{2\sqrt{6}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{9}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Тогда по Th. Пифагора $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{45 - \left(2\sqrt{6} + \frac{6}{2\sqrt{6}}\right)^2} =$

$= \sqrt{45 - 24 - \frac{9}{6} - 12} = \sqrt{9 - \frac{9}{6}} = \sqrt{\frac{45}{6}} = \sqrt{\frac{15}{2}}$.

Тогда $S_{\triangle BDA} = S_{\triangle BEA} - S_{\triangle BED} = \frac{BE \cdot EA}{2} - \frac{BE \cdot ED}{2} =$

$= \frac{\sqrt{\frac{15}{2}} \cdot \frac{15}{\sqrt{6}}}{2} - \frac{\sqrt{\frac{15}{2}} \cdot \frac{6}{2\sqrt{6}}}{2} = \frac{15\sqrt{15}}{2\sqrt{12}} - \frac{6\sqrt{15}}{4\sqrt{12}} = \frac{15\sqrt{15}}{2\sqrt{12}} - \frac{3\sqrt{15}}{2\sqrt{12}} =$

$= \frac{12\sqrt{15}}{2\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{15}}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5}$.

~~8~~ $\triangle BDA \sim \triangle EDC$ ($\angle BDA = \angle EDC$; $\angle BCE = \angle BAE$ (BECA - впис. 4-уг.)) $\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle BDA}}{S_{\triangle DEC}} = k^2 = \frac{AD^2}{DC^2} = \frac{24}{4} = 6.$$

Тогда $S_{BECA} = S_{\triangle BEA} + S_{\triangle BCA} - S_{\triangle BDA} + S_{\triangle EDC} =$

$= S_{\triangle BEA} + S_{\triangle BCA} - S_{\triangle BDA} + \frac{S_{\triangle BDA}}{6} = S_{\triangle BEA} + S_{\triangle BCA} - \frac{5}{6} S_{\triangle BDA} =$

$= \frac{BE \cdot EA}{2} + \frac{AC \cdot BC}{2} - \frac{5 \cdot 3\sqrt{5}}{6} = \left| AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{45-25} = \sqrt{20} \right.$ по Th. Пифагора $\left.\right|$

$= \frac{\sqrt{\frac{15}{2}} \cdot \frac{15}{\sqrt{6}}}{2} + \frac{\sqrt{20} \cdot 5}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{15\sqrt{15}}{2\sqrt{12}} + \frac{5\sqrt{20}}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2} =$

$= \cancel{\frac{15\sqrt{5}}{2}} \frac{15\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{4 \cdot \sqrt{3}} + \frac{5\sqrt{20}}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{15\sqrt{5}}{4} + \frac{10\sqrt{5}}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2} =$

$= \frac{15\sqrt{5}}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{2} = \frac{15\sqrt{5}}{4} + \frac{10\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}.$

Ответ: радиус большей окружности $= \frac{3\sqrt{5}}{2}$; радиус меньшей окружности равен $\frac{6}{\sqrt{5}}$; $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

№ 6.

$$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$$

$x \ge \frac{1}{2}$ | $x < \frac{1}{2}$

$8x - 12x + 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$ | $8x + 12x - 6 \le ax + b < -8x^2 + 6x + 7$

$-4x + 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$ | $20x - 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

Заметим, что ~~данная ф-ия является ф-я~~ ф-ии, стоящие в левой части н-ва ($-4x+6$ и $20x-6$ монотонны).
Также заметим, что ~~ф-ия~~ ф-я ~~…~~ $-8x^2+6x+7$ — парабола ветвями вниз. А значит достаточно проверить лишь крайние точки в каждом из случаев $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$.
Т.к. нам нужно, чтобы $ax+b \le -8x^2+6x+7$, можно проверить лишь зн-я крайних точек, т.к. вершина данной параболы находится в т. $x=\frac{3}{8}$, а в ней парабола достигает max. зн-я.

$x=-\frac{1}{2}$: ~~…~~ $-16 \le b-0.5a \le 2$.

$x=\frac{1}{2}$: $4 \le b+0.5a \le 8$.

$x=1$: $2 \le b+a \le 5$.

Пусть $a<0$. Тогда $b-0.5a > b$, а $b-0.5a \le 2 \Rightarrow b<2$.

Тогда $4 \le b+0.5a$. А $b+0.5a < b < 2 \Rightarrow$ ⨯. Значит $a \ge 0$.

$b+0.5a \ge 4 \Rightarrow b+a \ge 4$, $(a\ge 0)$; $b+a \le 5 \Rightarrow b+0.5a \le 5$ $(a \ge 0)$.

Тогда:

$$\begin{cases} -16 \le b-0.5a \le 2 & (1) \\ 4 \le b+0.5a \le 5 & (2) \\ 4 \le b+a \le 5 & (3) \end{cases}$$

Заметим, что данная система выполняется при $b=3$; $a=2$.

Пусть $b<3$. Тогда из (3) $a>1$. ~~Тогда …~~
Также из (2) $a>2$.
Заметим, что при $b=3$, $a=2$ $b+a=5$; $b+0.5a=4$.
Пусть $b=3-x$. Тогда $a \le 2+x$ (из (3)).
Тогда $4 \le 3-x+0.5a \le 3-x+1+\frac{x}{2} \Rightarrow 0 \le -\frac{x}{2}$. Но $a>2 \Rightarrow x>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ⨯.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть теперь $в>3$. Тогда из (3) $a<2$.

~~Пусть $в=3+x$. Тогда $a\le 2-x$ из (3).~~

~~Тогда $4\le 3+x+0.5a\le 3+x+\frac{2-x}{2}=3+x+1-\frac{x}{2}$~~

Но $в-0.5a\le 2$. В то же время $в-0.5a>3-0.5a>$
$>3-0.5\cdot 2=2 \Rightarrow в-0.5a>2 \Rightarrow$ W.

Значит $в$ не может быть >3 и $в$ не может быть <3. А
$в=3$, $a=2$ - решение.

Ответ: $a=2$; $в=3$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4 \le 0.5a + b \le 8 \quad (\frac{1}{2})$ $\quad -16 \le -0.5a + b \le 2 \quad (-\frac{1}{2})$

$2 \le a + b \le 5 \quad (1)$

$4 \le 0.5a + b \le 5$ $\quad b \le 3.5$

$4 \le a + b \le 5$

$b - 0.5a \le 2$

$b \le 2 + 0.5a$

$4 \le a + b \le 2 + 1.5a \le 5$ $\quad a \le 1.5$ $\quad \frac{13}{4} = b + \frac{9}{4} = \frac{22}{4}$

$\frac{11}{4} \quad \frac{5}{4}$

$4 \le a + b \le 5$

$4 \le 0.5a + b \le 5$

$b - 0.5a \le 2$

$b = 3; a = 2$

$b \le 5 - a$

$b \le 2 + 0.5a$

$b + 0.5a \le 5 - 0.5a \le 5$

$-0.5a \le 0$

$4 \le 0.5a + b \le 2 + a \le 5$

$3; 2$

$(x-6)^2 + (y-2)^2 - 20 + y^2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}=\sqrt{(6-x)(1-y)}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$(x-6y)^2+12xy-34y^2-12x-4y+20=0$

$(x-6y)^2+2(-17y^2-2y+6xy-6x+10)=0$

$(x-6y)^2=34y^2+12x+4y-12xy-20$

$xy-6y-x+6=34y^2+12x+4y-12xy-20$

$34y^2-13xy+13x+10y-26=0$

$x=\dfrac{34y^2+10y-26}{13y-13}$

$xy+6\geq 6y+x$

$x\geq\dfrac{6y-6}{y-1}=6,\ y\geq 1$

$x\leq 6,\ y<1$

$3x+y\geq 5$

$13y-13$

$$\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6=(1-y)(6-x) \\ x^2+2y^2=12x+4y-20=4(3x+y-5) \end{cases}$$

$x^2-12xy+36y^2=(1-y)(6-x)$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$-12xy+34y^2+12x+4y-20=(1-y)(6-x)$

$-12x(1-y)+34y^2+4y-20=(1-y)(6-x)$

$(1-y)(13x-6)+34y^2+4y-20=0$

$(y-1)(34y+20)+10y=0$

$y=-5;\ x=0$

$x-6y=\sqrt{(1-y)(6-x)}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$x=2;\ y=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)