МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

пусть d – 4-й член прогрессии
q – разность прогрессии, тогда

$b = aq$
$c = aq^2$
$d = aq^3$

$ax^2 + 2bx + c = 0$
$ax^2 + 2\cdot(aq)\cdot x + (aq^2) = 0$
$\cancel{a}x^2 + 2\cancel{a}qx + \cancel{a}q^2 = 0$
$x^2 + 2qx + q^2 = 0$

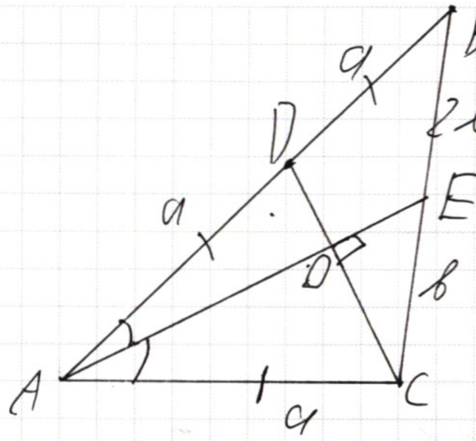
т.к. d – корень по условию, то можем подставить его в уравнение:

$(aq^3)^2 + 2q(aq^3) + q^2 = 0$
$a^2q^{\cancel{6}\,4} + 2aq^{\cancel{4}\,2} + \cancel{q^2} = 0$
$a^2q^4 + 2q^2a + 1 = 0$
$(\underbrace{aq^2}_{c})^2 + 2(\underbrace{aq^2}_{c}) + 1 = 0$
$c^2 + 2c + 1 = 0$
$(c+1)^2 = 0$
$c = -1$

Ответ: -1

№2.

пусть p – периметр
1) возьмем произвольный Δ-к ABC, с $P = 1200$ и у которого медиана перпендикулярна биссектрисе.



CD – медиана

AE – биссектриса

$AE \perp CD$

2) заметим, что в Δ-ке ADC биссектриса является высотой, а значит, что ΔADC – р/б с основанием DC

$$\Downarrow$$
$$AD = AC$$

3) пусть $AC = a$, тогда $AB = 2a$

пусть $CE = в$

$$\begin{cases} a \in N \\ в \in N \end{cases}$$

4) по св-ву биссектрисы:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{EC}$$

$$\frac{2a}{BE} = \frac{a}{EC} \Rightarrow BE = 2EC = 2в$$

5) $P = a + 2a + 3в = 3a + 3в = 1200$

$$3(a+в) = 1200$$

$$a + в = 400$$

$$в = 400 - a > 0 \Rightarrow a < 400$$

6) запишем условие существования ΔABC:

$$\begin{cases} a+2a > 3в \\ 3в+a > 2a \\ 3в+2a > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} в < a \\ в > \frac{a}{3} \\ в > -\frac{a}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 400-a < a \\ 400-a > \frac{a}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a > 400 \\ \frac{4a}{3} < 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 200 \\ a < 300 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a \in [201; 299]$$

таких значений a всего 99, значит существует всего 99 искомых треугольников.

Ответ: 99

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$f(x) = 2x^2 - x - 1$

$g(x) = x + |2x-1|$

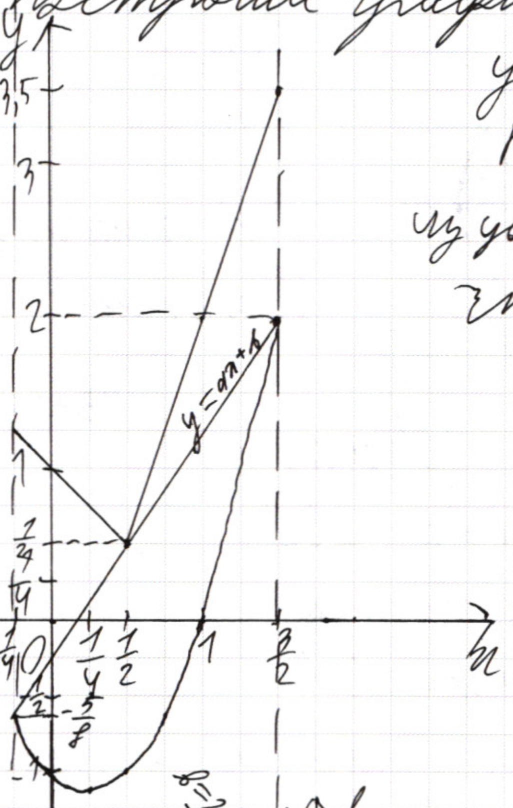
$t(x) = ax + b$

$f(x) \le t(x) \le g(x)$, ~~$x \in$~~

$g(x) = x + |2x-1| = \begin{cases} 3x-1, & x \ge \frac{1}{2} \\ -x+1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

Построим графики ф-й:

$y = f(x)$ и $y = g(x)$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$



Из условия должно следовать, что: $\begin{cases} t\left(\frac{3}{2}\right) \ge 2 \\ t\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2} \\ t\left(-\frac{1}{4}\right) \ge -\frac{5}{8} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b \ge 2 \\ \frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2} \\ b - \frac{a}{4} \ge -\frac{5}{8} \end{cases}$

$\begin{cases} b \ge 2 - \frac{3}{2}a \\ b \le \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \\ b \ge \frac{a}{4} - \frac{5}{8} \end{cases}$

построим мн-во (·), удовлетворяющих этим неравенствам

$2 - \frac{3}{2}a = \frac{1}{2} - \frac{a}{2}$

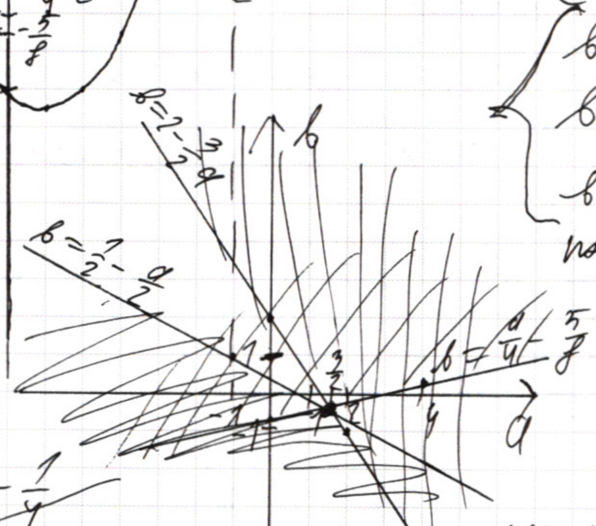
$\Downarrow$

$a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$

~~$b=$~~ $\frac{1}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4} - \frac{5}{8}$

$\Downarrow$

$a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$



$\Rightarrow$ что эти 3 прямые пересекутся в (·) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, а значит в множество решений попадет только эта точка

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

т.к. в множество попала одна точка, то неравенствам удовлетворяет всего одна пара чисел $(a;b)$: $a=\frac{3}{2}$

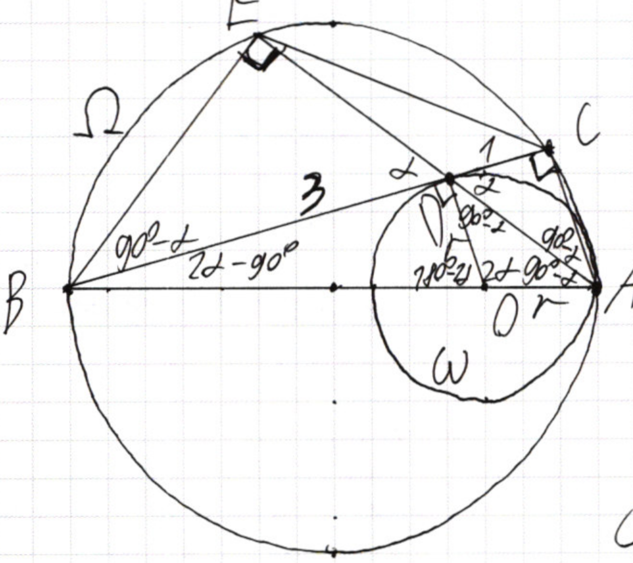
$b=-\frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$$t(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$

№5



Дано:

$BD=3$

$CD=1$

AB — диаметр

Найти:

R; r; S_{BACE}

Решение:

пусть: R — радиус Ω

r — радиус ω

O — центр ω

1) $OD\perp BC$ — как радиус и касательная

2) $\angle BCA=90°$ — т.к. опирается на диаметр

$\Downarrow$

$\triangle BDO \sim \triangle BCA$ — по 2 углам

$\Downarrow$

$$\frac{OD}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{r}{AC}=\frac{3}{4}$$

$$r=\frac{3}{4}AC \Rightarrow AC=\frac{4}{3}r$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) пусть $\angle EDB=\alpha \Rightarrow \angle CDA=\alpha$ - как вертикальные

$\Downarrow$

$\angle EBD = 90° - \alpha$

$\angle CAD = 90° - \alpha$

$\angle ODA = 90° - \alpha$

4) $\triangle AOD$ - р/б - по 2 сторонам

$\Downarrow$

$\angle DAO = \angle ODA = 90° - \alpha$

$\Downarrow$

AD - биссектриса $\triangle ACB$

5) по св-ву биссектрисы:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$$

$$\frac{\frac{4}{3}r}{1} = \frac{R}{3} \Rightarrow R = 4r$$

6) $BC^2 + AC^2 = AB^2$ - по т. П.

$$16 + \frac{16r^2}{9} = R^2$$

$$\cancel{16}\left(1 + \frac{r^2}{9}\right) = \cancel{16}r^2$$

$$\frac{8r^2}{9} = 1$$

$$r^2 = \frac{9}{8}$$

$$r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$$

7) $\angle DOA = 180° - 2\cdot(90° - \alpha) = 2\alpha$

$\Downarrow$

$\angle DOB = 180° - 2\alpha$ - как смежный

8) $\angle OBD = 90^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha - 90^\circ$

9) $\sin(2\alpha - 90^\circ) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\frac{4}{3}r}{R} = \dfrac{4r}{3R} = \dfrac{1}{3}$

$\sin(90^\circ - 2\alpha) = -\dfrac{1}{3}$

$\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{3}$

$1 - 2\sin^2\alpha = -\dfrac{1}{3}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{2}{3}$, т.к. $\alpha \in (0; \pi)$, то $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

10) ~~$AD^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos 2\alpha$ — по т. косинусов~~

~~$AD^2 =$~~

$AD^2 = CD^2 + AC^2$ — по т. П.

$AD = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$

11) $\triangle BED \sim \triangle ACD$ — по 3 углам

$\Downarrow$

$\cancel{\dfrac{ED}{AC}} = \dfrac{ED}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$

$ED = \dfrac{BD}{AD} \cdot CD = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \sqrt{3}$

12) $EA = ED + AD = 2\sqrt{3}$

13) $S_{BACE} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AE \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot 4 \cdot \cancel{2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R = 3\sqrt{2}$

$r = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

№7.

$f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{y}\right)$

$f(2) = f\left(\dfrac{4}{2}\right) = f(4) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = 2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(k) = f\left(\frac{yk}{y}\right) = f(yk) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(k) + f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(k) - f(k) - f(y)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$$

$$f(x) < f(y)$$

для $x=1$: 20 значений y

для $x=2$: 18 значений y

для $x=3$: 18 значений y

$x=4$: 14 ~~зн~~

$x=5$: 14

$x=6$: 14

$x=7$: 8

$x=8$: 8

$x=9$: 14

$x=10$: 8

$x=11$: 3

$x=12$: 8

$x=13$: 2

$x=14$: 4

$x=15$: 8

$x=16$: 4

$x=17$: 1

$x=18$: 8

$x=19$: 0

$x=20$: 4

$x=21$: 4

$f(6) = f(3) + f(2) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(5) + f(2) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = f(6) + f(2) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = f(7) + f(2) = 4$

$f(15) = 3$

$f(16) = 4$

$f(17) = 8$

$f(18) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = 4$

$f(21) = 4$

методом перебора найдём и подсчитаем все подходящие пары $(x;y)$: 162

Ответ: 162

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ:

$y(x-1)\geq 2x+2$

$$\left[\begin{array}{l} y\geq \frac{2x+2}{x-1} \\ x=1 \end{array}\right.$$

(1): $(y-2x)^2=xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0$

$y^2-y(5x-1)+4x^2+2x-2=0$

$D=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=9x^2-18x+9=(3x-1)^2$

$y_{1,2}=\dfrac{5x-1\pm(3x-3)}{2}$

$y_1=4x-2$

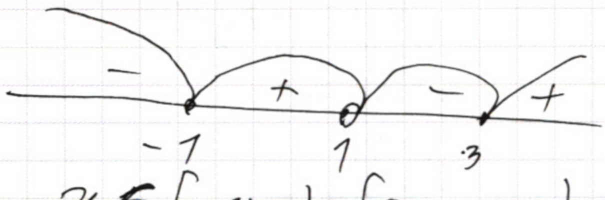
$y_2=x+1$

1) $y=y_2$

$x+1\geq\dfrac{2(x+1)}{x-1}$

$(x+1)\left(1-\dfrac{2}{x-1}\right)\geq 0$

$\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-1}\geq 0$



$x\in[-1;1)\cup[3;+\infty)$

$2x^2+(x+1)^2-4x-4(x+1)+3=0$

$2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$

$\cancel{3}x^2-\cancel{6}2x=0$

$x(x-2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 - \text{не удовл. ОДЗ} \end{array}\right.$$

$x=0\Rightarrow y=1$

$(0;1)$

2) $y=y_1$

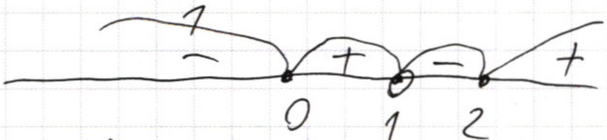
$4x-2\geq\dfrac{2x+2}{x-1}$

$2x-1\geq\dfrac{x+1}{x-1}$

$\dfrac{(2x-1)(x-1)-x+1}{x-1}\geq 0$

$\dfrac{2x^2-4x}{x-1}\geq 0$

$\dfrac{x(x-2)}{x-1}\geq 0$



$x\in[0;1)\cup[2;+\infty)$

$2x^2+(4x-2)^2-4x-4(4x-2)+3=0$

$2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0$

$18x^2-36x+15=0$

$6x^2-12x+5=0$

$D=24$

$x_{1,2}=\dfrac{12\pm2\sqrt6}{12}=1\pm\dfrac{1}{\sqrt6}$

$$\left[\begin{array}{l} x=1+\frac{1}{\sqrt6} - \text{не уд. ОДЗ} \\ x=1-\frac{1}{\sqrt6} \end{array}\right.$$

$x=1-\frac{1}{\sqrt6}\Rightarrow y_1=2\left(1-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$\left(1-\frac{1}{\sqrt6};\ 2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) если $x = 1$:

$y - 2 = \sqrt{1 \cdot y - 2 - y + 2} = 0$

$y = 2$

$2 \cdot (1)^2 + (2)^2 - 4 \cdot (1) - 4 \cdot (2) + 3 = 0$

$2 + \cancel{4} - \cancel{4} - 8 + 3 = 0$

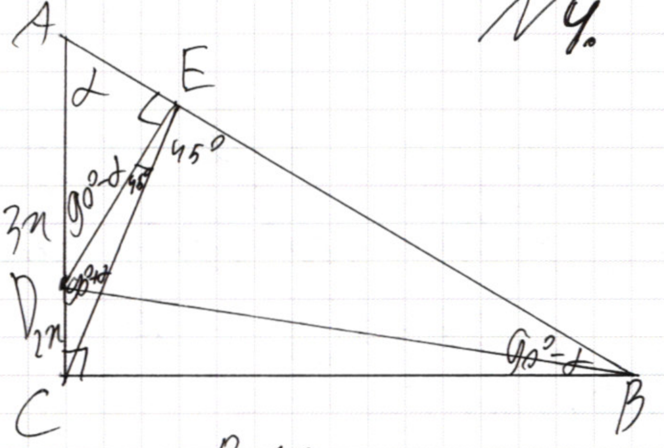
$5 - 8 = 0$

$-3 = 0$

$\varnothing$

Ответ: $(0; 1); \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}; 2\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)$

№4.



Дано:

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$DE \perp AB$

Найти:

а) $tg(\angle BAC)$

б) S_{CED}

пусть: $\angle BAC = \alpha$

$tg(\angle BAC) = tg\alpha$

1) ~~$AE = AD\cos\alpha = 3x\cos\alpha$~~

2) ~~$\triangle AED \sim \triangle ACB$ − по 3 углам~~

~~$k = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB} = \frac{3}{5}\cos\alpha$~~

1) $\angle CEB = 90° - \angle CED = 45°$

$\Downarrow$

$\angle CEB = \angle CED$

~~CE — биссектриса $\triangle DEB$~~

2) $\angle DEB + \angle BCD = 180°$

$\Downarrow$

BCDE — вписанный 4-угольник

3) т.к. $\angle CEB = \angle CED$ и они вписанные, то они опираются на равные дуги

$\Downarrow$

$CD = CB = 2x$

4) $tg\alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$

б) $AC = \sqrt{29}$

$5x = \sqrt{29}$

$x = \frac{\sqrt{29}}{5} \Rightarrow CB = \frac{2\sqrt{29}}{5} = CD$

5) $\angle CDE = 180° - \angle EDA = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$

6) $ED = AD \cdot \sin\alpha = \frac{3}{5}\cancel{\sqrt{29}} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{29}}} = \frac{6}{5}$

7) $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot CD \cdot \sin(\angle CDE) =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{\cancel{2}}{5}\sqrt{29} \cdot \sin(90° + \alpha) = \frac{6\sqrt{29}}{25} \cdot \cos\alpha = \frac{6\cancel{\sqrt{29}}}{\cancel{25}_{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{\sqrt{29}}} = \frac{6}{5} = 1,2$

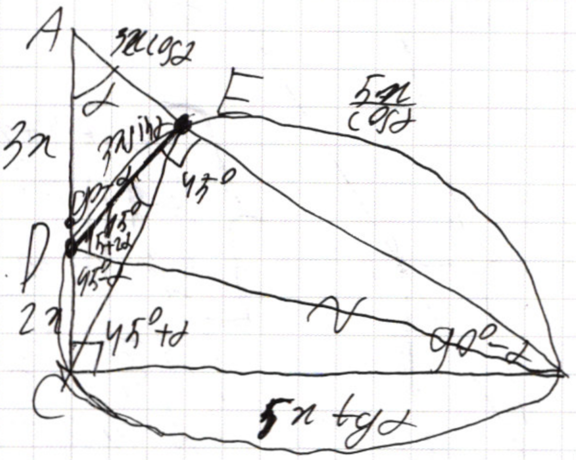
Ответ: а) $tg(\angle BAC) = \frac{2}{5}$

б) $S_{CED} = 1,2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$180^0 - 45^0 - (90^0 - \alpha) = 45^0 + \alpha$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ - по 3 $\angle$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = k$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$AB^2 = 25x^2 + 25x^2 tg^2\alpha = 25x^2(1 + tg^2\alpha) = \cancel{\frac{25x^2}{\cos^2\alpha}}$

$AB = \frac{5x}{\cos\alpha}$

$k = \frac{AD}{AB} = \frac{3x}{\frac{5x}{\cos\alpha}} = \frac{3}{5}\cos\alpha$

$D = 144 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 24$

$4 - \frac{4}{\sqrt{6}} - 2 = \cancel{AE}$ $\quad \cancel{AC = \frac{AE}{k}}$

$= 2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$DE = 3x\sin\alpha = CB \cdot \cancel{k} = CB\frac{3}{5}\cos\alpha$

$CB = 5x\,tg\alpha$ $\quad \cancel{tg\alpha} = \frac{BC}{AC}$

$\cancel{3x \cdot 5x = 3x\cos\alpha \cdot EB + 3x\cos\alpha}$ $\quad \cancel{tg\alpha}$

$\cancel{EB = \frac{5x}{\cos\alpha}}$ $\quad \cancel{5x}$

$\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4}{25}}} = \sqrt{\frac{25}{29}}$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

$y^2 - y(5x - 1) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 25x^2 - 10x + 1 - 16x^2 - 8x + 8 = 9x^2 - 18x + 9 = (3x - 3)^2$

$y = \frac{5x - 1 \pm (3x - 3)}{2}$ $\quad y_1 = 4x - 2$, $\quad y_2 = x + 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(x) = 2x^2 - x - 1$ — парабола

$g(x) = x + |2x-1| = \begin{cases} 3x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -x+1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1+2-8}{8}$

$y(x) = ax + b$

$f(x) \leq y(x) \leq g(x)$

$g(\frac{3}{2}) = 3,5$

$-\frac{5}{8} = -\frac{1}{8} - \frac{4}{8} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}$

$\frac{a}{2} + b \leq \frac{1}{2}$

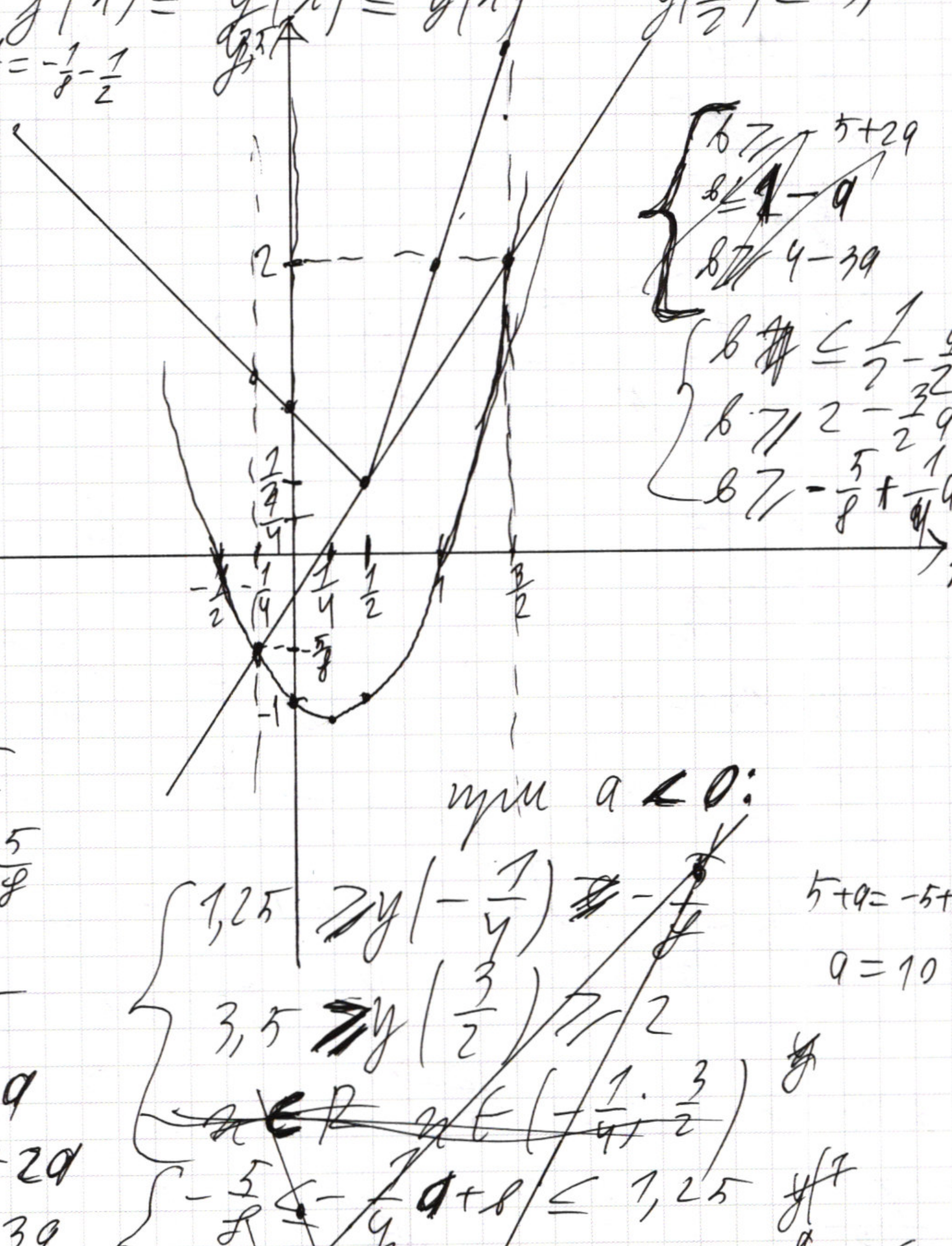
$\frac{a}{2} + b \geq -1$

$b \leq 1 - a$

$b \geq -2a$

$\begin{cases} b \geq -5+2a \\ b \leq 1-a \\ b \geq 4-3a \end{cases}$

$\begin{cases} b \leq \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \\ b \geq 2 - \frac{3}{2}a \\ b \geq -\frac{5}{8} + \frac{1}{4}a \end{cases}$



$\begin{cases} b - \frac{a}{4} \leq \frac{5}{4} \\ b - \frac{a}{4} \geq -\frac{5}{8} \\ b + \frac{3}{2}a \geq 2 \\ b + \frac{3}{2}a \leq 3,5 \end{cases}$

при $a < 0$:

$\begin{cases} 1,25 \geq y(-\frac{1}{4}) \geq -\frac{5}{8} \\ 3,5 \geq y(\frac{3}{2}) \geq 2 \\ \cancel{x \in R \quad x \in (-\frac{1}{4}; \frac{3}{2})} \end{cases}$

$5 + a = -5 + 2a$

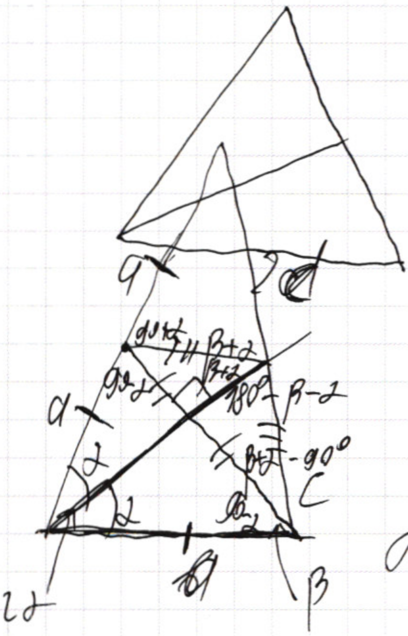
$a = 10$

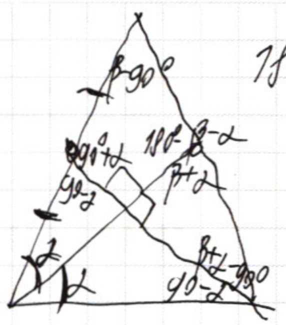
$\begin{cases} b \leq 5 + a \\ b \geq -5 + 2a \\ b \geq 4 - 3a \\ b \leq 7 - 3a \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{5}{8} \leq -\frac{1}{4}a + b \leq 1,25 \\ 2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq 3,5 \end{cases}$

$\frac{a}{2} + b \leq$

Ответ: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$





$180^\circ-(180^\circ-\beta-\alpha)-(90^\circ-\alpha)=$

$=\beta+\alpha-90^\circ-\alpha=$

$=\beta-90^\circ$

$2\alpha=180^\circ-\beta+90^\circ-\beta=270^\circ-2\beta$

$\alpha=135^\circ-\beta$

$\cancel{\gamma=180^\circ-(90^\circ+\alpha)-(\beta+\alpha)=90^\circ-\beta-2\alpha}$

$\cancel{\gamma+\beta+2\alpha=90^\circ}$

$360^\circ-90^\circ-(90^\circ+\alpha)-(\beta+\alpha)=180^\circ-\beta-2\alpha$

$\frac{d}{2a}=\frac{c}{a}$

$d=2c$

$P=3a+3c=3(a+c)=1200$

$a+c=400$

$c=400-a$

$\cancel{-\frac{5}{8}}+\frac{a}{4}=2-\frac{3}{2}a$

$\frac{\cancel{7}}{4}a=\frac{21}{8}$

$a=\frac{3}{2}$ $\quad$ $\cancel{a\in[1;600]}$

$\frac{1}{2}-\frac{a}{2}=2-\frac{3}{2}a$

$a=1,5$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$

$3a>3c>\frac{a}{3}$

$2a+3c>a$

$3c>-a$

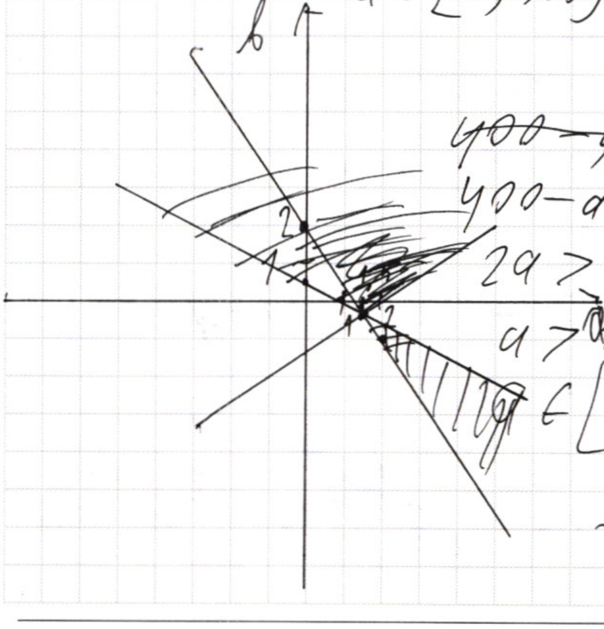
$a+3c>2a$

$3c>a$

$c>\frac{a}{3}$

$c\in(0;\frac{a}{3})$

$a\in[1;399]$



$\cancel{400-a}$

$400-a<a$

$2a>400$

$a>200$

$a\in[201;299]$

$3(400-a)>a$

$400-a>\frac{a}{3}$

$400>\frac{4}{3}a$

$a<300$

ответ: 99

$\sin(90^\circ+\alpha)=\sin90\cdot\cos\alpha+\cos90^\circ=\cos\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b = qa$ $\qquad$ $d = q^3a$

$c = q^2a$

$ax^2 + 2qax + q^2a = 0$

$x^2 + 2q x + q^2 = 0$

$(d)^2 + 2q\cdot(d) + q^2 = 0$

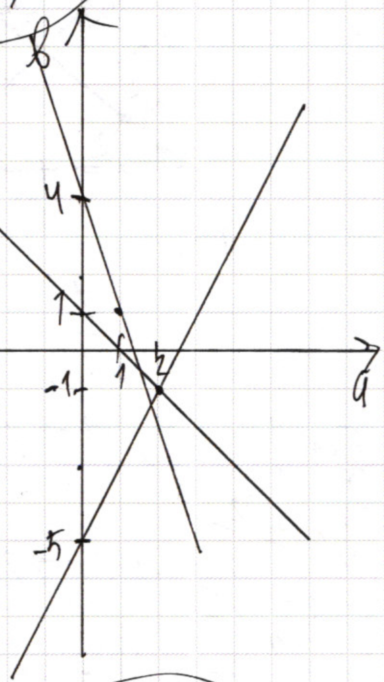
$q^6a^2 + 2q^4a + q^2 = 0$

$q^4a^2 + 2\underbrace{q^2a}_{c} + 1 = 0$

$c^2 + 2c + 1 = 0$

$(c+1)^2 = 0$

$c = -1$



~~Ответ.~~ -1

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$y - 2x \geq 0$

$y \geq 2x$

$2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 3 = 0$

$D = 16 - 8(y^2 - 4y + 3) = 16 - 8y^2 + 32y - 24 =$

$= -8y^2 + 32y - 8 = -8(y^2 - 4y + 1) =$

$y^2 - 4y + 2x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = 16 - 8x^2 + 16x - 12 = -8x^2 + 16x + 4$

$-8(y^2 - 4y + 1) \geq 0$

$y^2 - 4y + 1 \leq 0$ $\qquad$ $D = 12$

$y_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$y \in [2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{k_x}$ x_i – простые и различные

$y = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \ldots \cdot y_{k_y}$ y_i – простые и различные

$f(x) = \sum_{i=1}^{k_x} f(x_i) =$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = \sum_{i=1}^{k_y} f\left(\frac{1}{y_i}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x_i$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = 2$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(x) > 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$\frac{1}{y} \in [0; 1]$

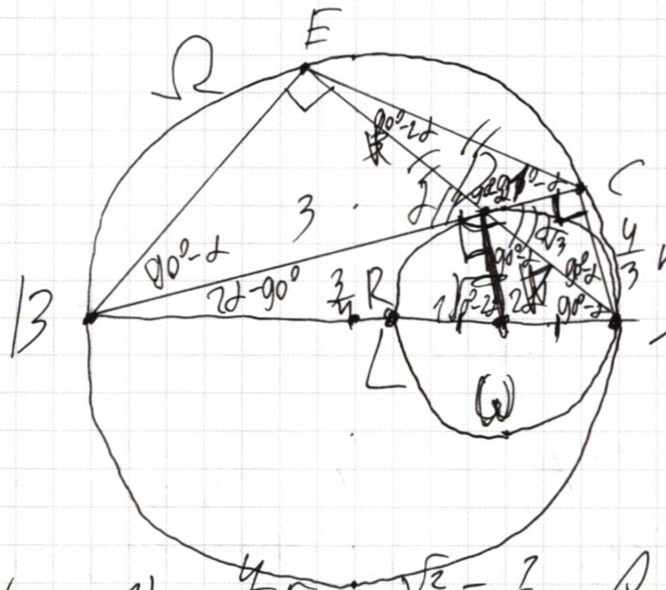
$(20+18+18) + 14 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + (3+2) + (4 \cdot 4 + 1)$

36, 56, 48, 5, 72, 16, 1, 22, 0

$48 + 22 = 70$

$70 + 56 = 126$

$+\ \frac{126+}{36}$



$ED \cdot DA = BD \cdot DC$

$ED \cdot DA = 3$

$BD^2 = BL \cdot BA$

$BL \cdot BA = 9$

$DA =$

$\triangle BED \sim \triangle ACD$ – по 2 ∠

$k = \cancel{\frac{BD}{CD} = \frac{ED}{AD} = \frac{EB}{AC} = 3}$

$\cancel{ED = kAD}$

$\cancel{kAD \cdot AD = 3}$

$\cancel{3AD^2 = 3}$

$\cancel{AD^2 = 1}$

$\cancel{AD = 1 \Rightarrow ED = 3}$

$k = \frac{\sqrt{3}}{AD} = ED$

$AD \cdot ED = 3$

$\sin(2\alpha - 90^\circ) = \frac{\frac{4}{3}r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

$\cancel{\cos 2}$

$-\sin(90^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{3}$

$-\cos(2\alpha) = \frac{1}{3}$

$\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$

$2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{3}$

$2\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$R^2 - \frac{16r^2}{9} = 16$

$R^2 = 16\left(1 + \frac{r^2}{9}\right)$

$R = 4\sqrt{1 + \frac{r^2}{9}}$

$90^\circ + \gamma = 180^\circ - 2\alpha$

$\gamma = 90^\circ - 2\alpha$

$\cancel{AA}$ $AD = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{3}$

$\angle ECA = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \alpha) - (2\alpha - 90^\circ)$

$\angle ECA = 90^\circ - \alpha$

$k = \sqrt{3}$

$\frac{\frac{4}{3}r}{1} = \frac{R}{3}$

$AE = ED + AD = 2\sqrt{3}$

$ED = DC \cdot k = \sqrt{3}$

$4r = R$

$\cancel{r = 1}$

$\cancel{180}$

$90^\circ(180^\circ - 2\alpha) =$

$2\alpha - 90^\circ$

$\cancel{4r = 4}\sqrt{1 + \frac{r^2}{9}}$

$r^2 = 1 + \frac{r^2}{9}$

$\frac{8r^2}{9} = 1$ $\qquad r^2 = \frac{9}{8}$ $\qquad r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$S = \frac{1}{2}BC \cdot AE \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$

$AC = \frac{4}{3}r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3} = \sqrt{2}$

$R = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)