Предмет: Математика **Класс:** 10 **Дата:**	**Номер участника:** М10-К-1	

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

Анкета участника

61-я Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

Указанная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду, а затем сдаётся организаторам в аудитории. Анкета без подписей недействительна. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется.

Фамилия	Имя	Отчество	Дата рождения
Куковицкий	Егор	Романович	06.01.2005

Страна	Город	Регион
	Казань	Республика Татарстан

Документ, удостоверяющий личность	Серия	Номер	Дата выдачи	Код подразделения
	9218	483808	02.02.2020	

Страна школы	Город школы	Регион школы
Россия	Казань	Республика Татарстан

Физико-математический лицей № 131

Полное название образовательного учреждения

Мобильный телефон	Домашний телефон	E-mail
+7-903-340-61-34	9033406134	Kukegor05@gmail.com

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограниченно доступны сотрудникам института для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27.07.2006, конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от сотрудников Московского физико-технического института на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«____» ________________ г

Подпись участника олимпиады

Куковицкая С.А.	мать	
ФИО законного представителя	Степень родства	Подпись законного представителя

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Т.к. a, b, c — члены геом. прогрессии, то пусть k — знаменатель этой прогрессии, тогда: $a = a$; $b = ka$; $c = k^2a$, а k^3a — это будет x — корень уравнения.

Тогда:

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$\cancel{ax^2}$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(ka)^2 - 4a \cdot k^2 a = 0$

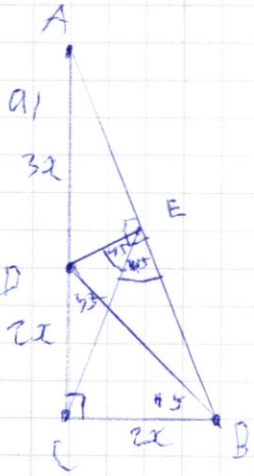
$x = \frac{-2b \pm 0}{2a} = \frac{-2ka}{2a}$, $x = k^3a \Rightarrow$

$k^3a = \frac{-2ka}{2a}$ $\quad k^3a = -k$

$k^2a = -1$

k^2a и есть 3-ий член прогрессии, т.е. $k^2a = c$

Ответ: $c = -1$



№4

4-угольник $DECB$ — вписанный, т.к. $\angle DCB = \angle DEB = 90°$, $90° + 90° = 180°$. $\angle CEB = 90° - 45° = 45°$

$\angle CDB = \angle CEB = 45°$ — опираются на CB, аналогично, $\angle CED = \angle DBC = 45°$. $\triangle CDB$ — прямоуг. и р/б т.к. есть углы $90°$, $45°$ и $45°$ $\Rightarrow BC = DC = 2x$

$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

б) $\Delta ABC \sim \Delta DEA$ по 2 углам ($\angle CAB$ - общ.; $\angle DEA = \angle ACB = 90°$ по условию) $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, рассмотрим $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$; $AB = \sqrt{\frac{4\cdot 29}{5} + 29} = \sqrt{33,64} = 5,8$. Пусть $AE = x$

$$\frac{\frac{3\sqrt{29}}{5}}{5,8} = \frac{x}{\sqrt{29}}$$

$$x = \frac{\frac{3\cdot 29}{5}}{\cancel{5,8}\ \frac{29}{5}} = \frac{\frac{3\cdot 29}{5}}{\frac{29}{5}} = 3 = AE;\ DE = 5,8 - 3 = 2,8$$

проведем CH - высоту ABC к AB, по площади находим:

$$S = \frac{CH\cdot AB}{2} = \frac{AC\cdot BC}{2}$$

$$CH = \frac{AC\cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{29}{5}} = 2$$

$S_{CED} = S_{CEA} - S_{ADE}$

$S_{CEA} = \frac{AE}{2}\cdot CH = \frac{3\cdot 2}{2} = 3$

$S_{ADE} = \frac{DE\cdot EA}{2} = 1,5\,DE$

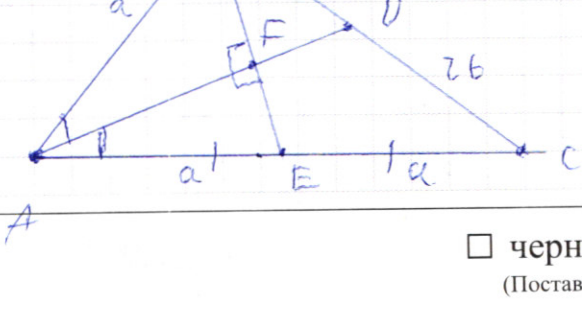
из подобия ΔABC и ΔDEA возьмем $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$$DE = \frac{AE\cdot BC}{AC} = \frac{3\cdot\frac{2}{5}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$$

$S_{ADE} = 1,5\cdot\frac{6}{5} = \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$

$S_{CED} = 2 - 1,8 = 0,2$

Ответ: $S_{CED} = 0,2$



№2

пусть $AB = a$; $BD = b$

$\Delta ABF = \Delta AFE$ по 2 углам (AF - общ, $\angle EAF = \angle FAB$, т.к. бисс, и углы $90°$ по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AE = a = EC$ (т.к. BE - медиана) по св-ву бисс $\frac{a}{b} = \frac{2a}{DC}$ $DC = 2b$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$P_{ABC} = 1200 = a + 2a + 3b = 3a + 3b = 3(a+b)$

2a соответствует 1 b

$a+b=400$, надо наложить условия на a и b, исходя из правила о сторонах треугольника. Наибольшие стороны могут быть 2a и 3b, т.к. они увелич. При $a \leq 200$ получим $b \geq 200 \Rightarrow$

$a+2a \leq 600$, а $3b \geq 600$ — противоречие $\Rightarrow a > 200$.

2) если $a \geq 300$, то $b \leq 100 \Rightarrow 2a \geq 600$, $a \geq 300$

$3b \leq 300$ т.е. $2a > a+3b$ — противоречие $\Rightarrow$

тогда будут: $200 < a < 300$ $a \in (200; 300)$, принимая значения от 201 до 299, их там будет 99

Ответ: 99 треугольников.

№6

Нарисуем графики каждой из 2 данных функций:

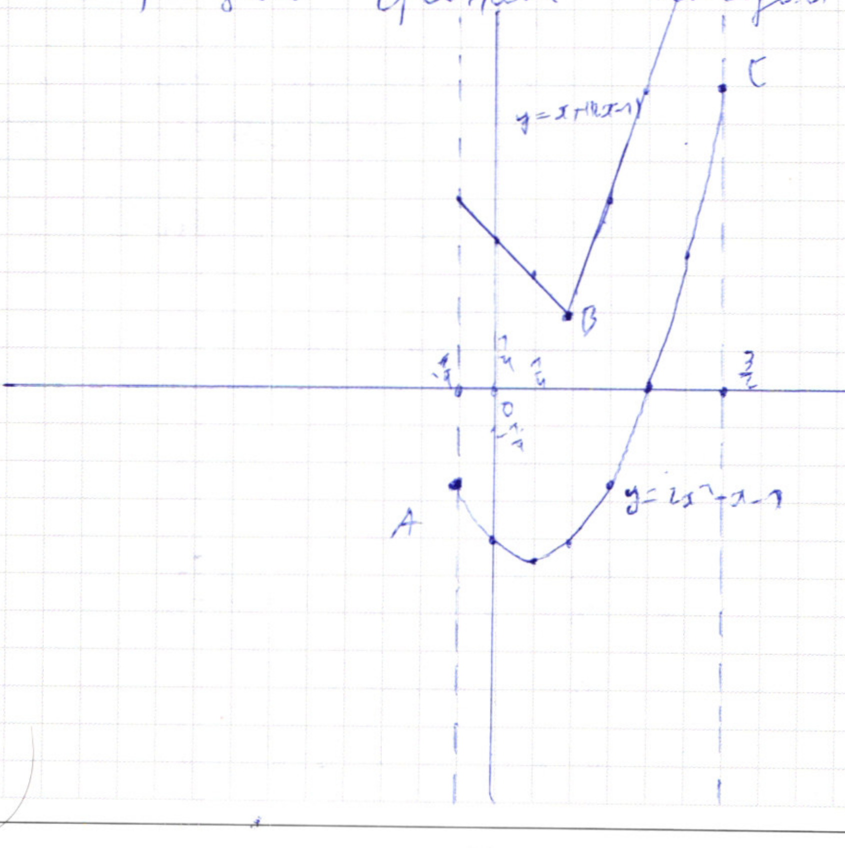


график $y = 4x + b$ — это прямая (к. наклона a и смещена на b отн. OX. обозначим т. A ~~и~~ B и C

$A(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ $B(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$C(\frac{5}{4}; 2)$ ~~этих 2 парабол~~ ~~-лов.~~

~~тогда под наклоно- вые будут подходить прямые, проходящие через пары точек AB (2 будет ниже) AC (B будет выше) и BC (A будет ниже)~~

Находим значения a и b для точек B и C.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b \\ 2 = \frac{5}{4}a + b \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{5}{4}a - \frac{1}{2}a = 2 - \frac{1}{2}$

$a = 1,5$

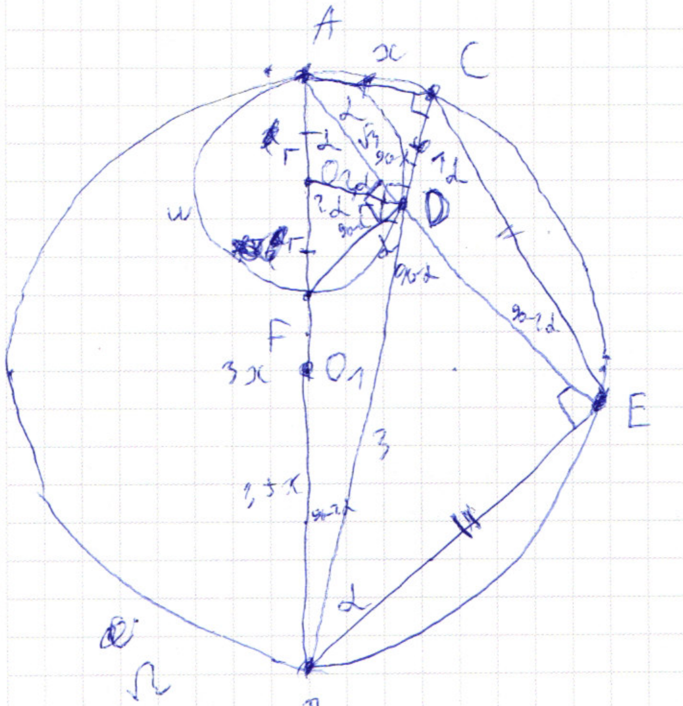
$b = -\frac{1}{4}$

теперь, подставив координаты т. A в полученное уравнение прямой, заметим, что т. A принадлежит ей:

$y = 1,5x - \frac{1}{4}$ $A(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$

$-\frac{5}{8} = \frac{3}{2} \cdot -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$ - подходит => такая прямая будет ровно одна

Ответ: $(1,5; -\frac{1}{4})$



№3

В силу симметрии AB проходит через O_2

~~Допустим~~ что C A - касательная ~~к~~ ω

~~$\angle BEC = 90°$, т.к опирается на диаметр AB~~

~~$\angle BAE = \alpha = \angle BCE$~~

пусть $BAE = \alpha$, расписав этот α дальше, получим, что $\angle CBE = C\ BCE = \alpha = \cancel{...}$ => $BE = EC$

$AC = x$ по св-ву биссектрисы

$AB = 3x$

т. Пифагора для BAC:

$4^2 + x^2 = 9x^2$

$16 = 8x^2$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

$1,5x = R(\Omega) = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$AD = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$S\ ABCE = \frac{d_1 d_2}{2} \cdot \cancel{\sin}\cos(90-\alpha) =$

$\triangle ACD \sim BED$ по углам

$\Rightarrow \frac{AC}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE}$

$\frac{\sqrt{2}}{BE} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{DE}$

$DE = \sqrt{3}$

$BE = CE = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\cancel{\sin}\cos(90-\alpha) = \cancel{...} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{CD}{AD} = \cancel{...}$ →

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= \frac{AE \cdot CB}{2} \cdot \cos(90-\alpha) = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4$$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

~~FD=~~

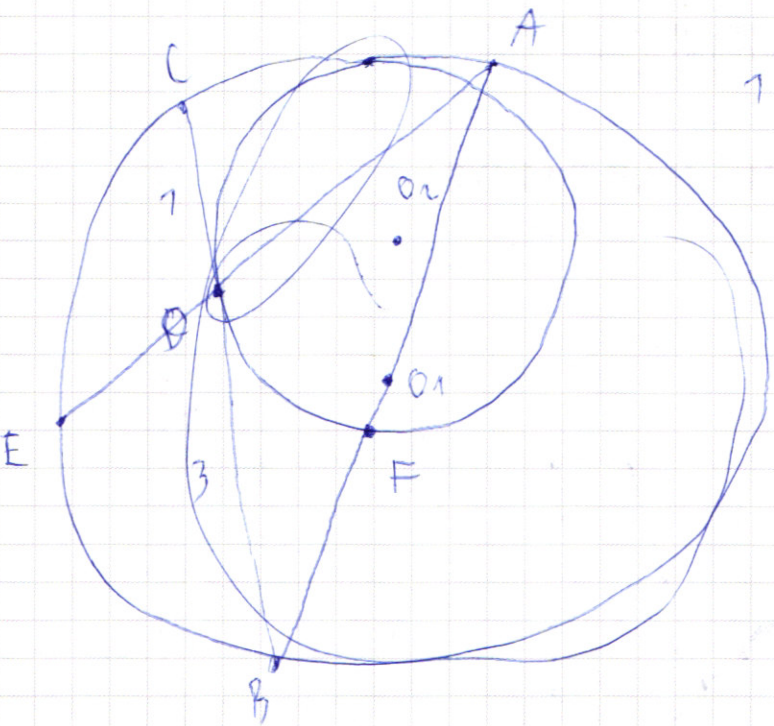
$FD = AD \cdot tg\,\alpha = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

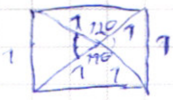
$AF = \sqrt{3+\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2r(\omega)$

$r(\omega) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3}{2\sqrt{2}}$; 4

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)





$$\sqrt{1+1-2\cdot\cos 120}$$

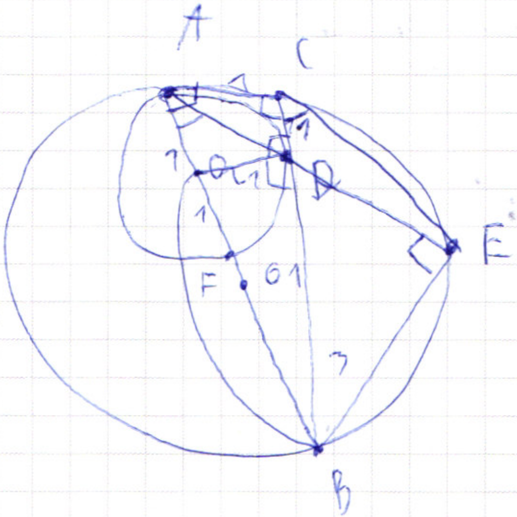
$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}\cdot$$

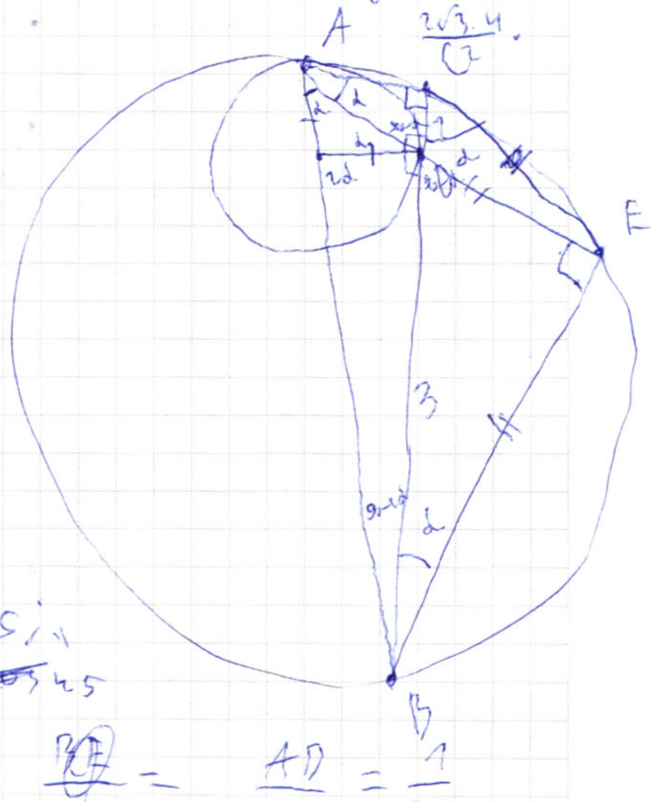
$$\frac{AC}{BE}=\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{DE}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{DE}$$

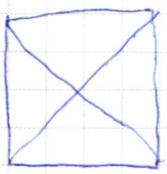
$$DE=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3}\cdot 4}{\sqrt{2}}\cdot$$





$9 = BF\cdot AB$



$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot \sin 45$$

$$\frac{BE}{x}=\frac{AD}{3}=\frac{1}{DE}$$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2-xy+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{2\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}-1=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}-1=\frac{2}{4}-1=-\frac{1}{4}$

$\frac{72}{16}-\frac{24}{16}-\frac{16}{16}$

$2\cdot\frac{9}{16}-\frac{12}{16}-1$

$\left(\frac{5}{4};2\right)$

$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1=$

$=-\frac{2}{1}\cdots=-\frac{1}{14}$

$\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1$

$=-\frac{1}{8}-1=-1$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x+b$

$2=\frac{5}{4}x+b$

$\cancel{2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}-1$

$2\cdot\frac{9}{16}-\frac{12}{16}-1$

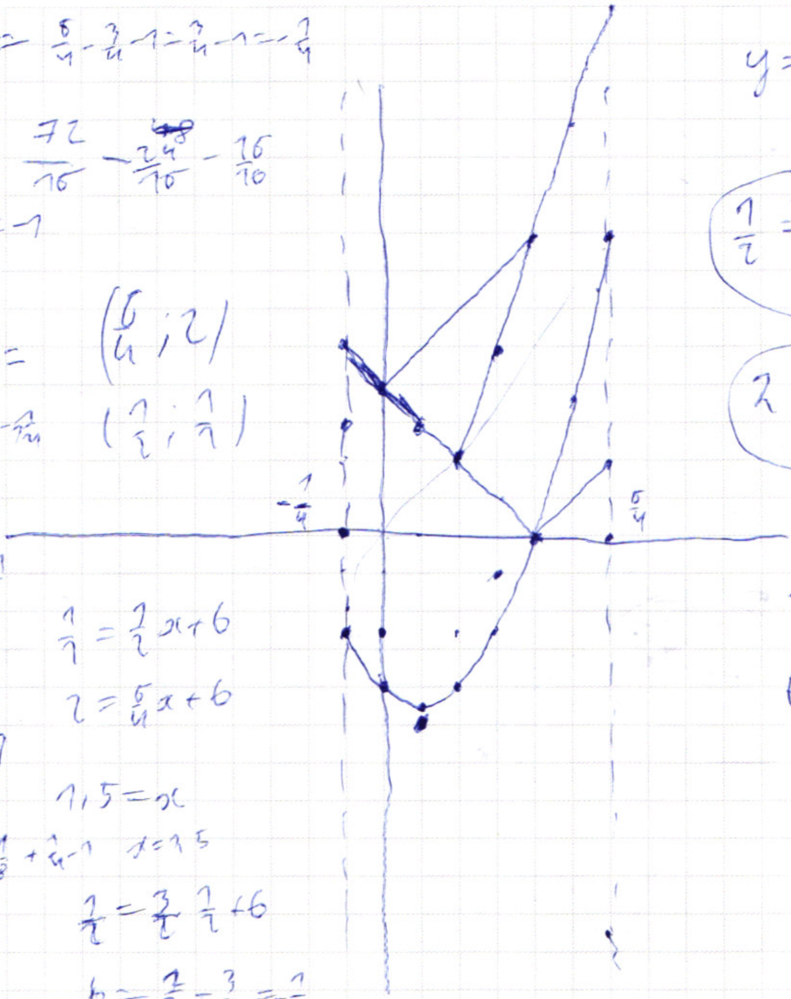
$1{,}5=x$

$\frac{5}{16}-1$ $\quad \frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1 \quad x=1{,}5$

$=\frac{3}{8}-1$

$\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+b$

$b=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$



$y=1{,}5x-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$2=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}-\frac{1}{4}$

$-\frac{5}{8}=\frac{3}{2}\cdot-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$

b

$\frac{50}{16}-\frac{20}{16}-1$

$=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$

$1{,}5x-\frac{1}{4}$

$\frac{3}{2}\cdot-\frac{1}{4}=-\frac{8}{8}$

$\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$ $\quad \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\quad \left(\frac{5}{4};2\right)$

$\frac{72}{16}-\frac{24}{16}-\frac{16}{16}$

$=$ $\quad -\frac{1}{4}+\left|-\frac{1}{2}-1\right|$

$y=ax+b$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+b$ $\quad 2=\frac{5}{4}a+b$

$\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+b$

$b=2$

$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-1\right)$ $\quad =-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$

$1{,}5=a$

$=\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}+\left|\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}-1\right|=$

$\frac{3}{4}+\left|\frac{5}{4}-1\right|=$

$y=1{,}5x+b$

$-\frac{1}{4}+\left|-\frac{1}{2}-1\right|$ $\quad =\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}+1-1$ $\quad \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-1=\frac{5}{4}$

$\frac{1}{2}=1{,}5\cdot\frac{1}{2}+b$

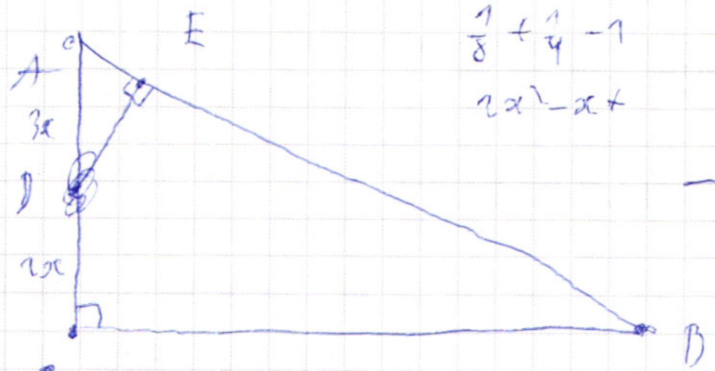
$b=-\frac{1}{4}$

$y=1{,}5x-\frac{1}{4}$

$-\frac{5}{8}=1{,}5\cdot-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$

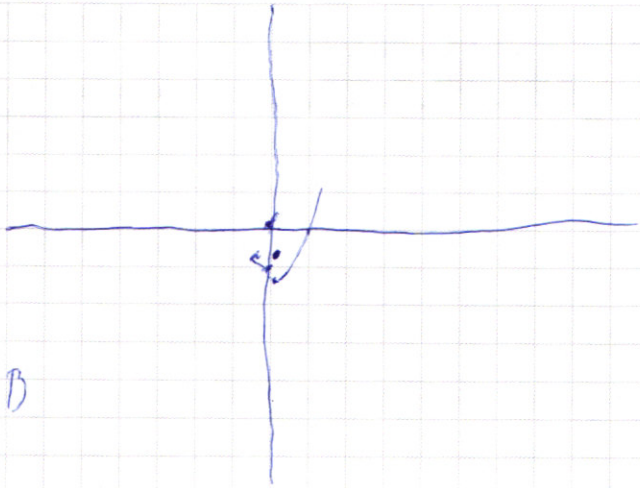
$=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}$

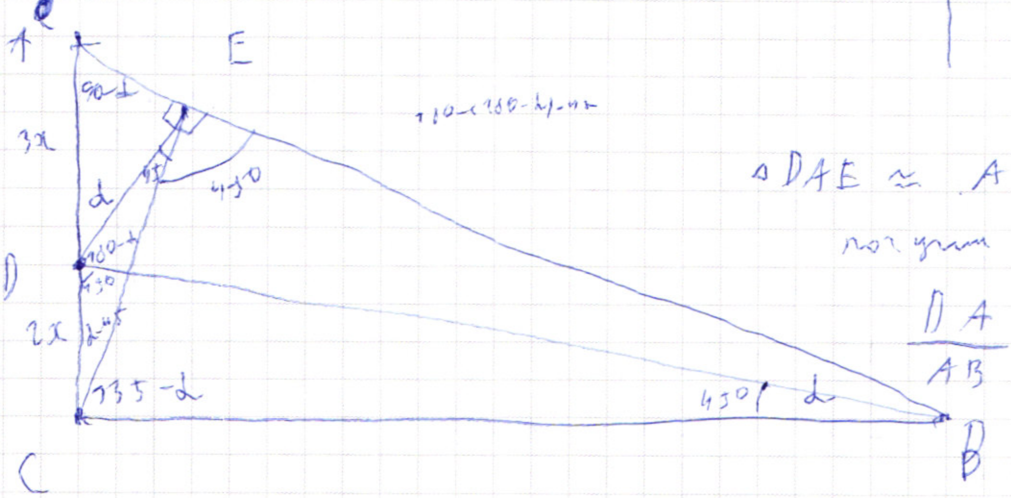
$\frac{1}{2}+$



$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1$

$2x^2-x+$

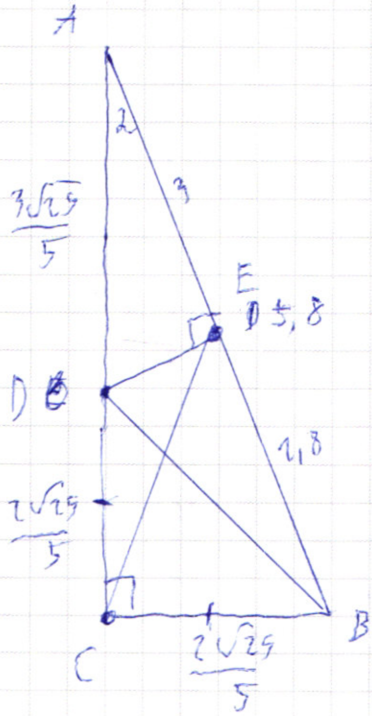




$\triangle DAE \approx ACB$

по 2 углам

$\frac{DA}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{CE}{AC}$



$\times\ \frac{116}{4}$ 464

$33,64$ $\frac{116}{25}+29=$

$5,8$

$AB=\sqrt{\frac{4\cdot 29}{25}+29}=$

$\frac{58}{\times 58}$ 464 290 3364

$\frac{3x}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{CE}{5x}$

$\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{DE}$

$\cancel{\frac{DA}{AB}=\frac{DE}{}}$

$\cancel{\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}}=\frac{AD}{AC}$

$\frac{AD}{AB}=\frac{ED}{BC}=\frac{AE}{AC}$

$\frac{\frac{3\sqrt{29}}{5}}{5,8}=\frac{\cancel{5,8}x}{\sqrt{29}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a \quad ka \quad k^2a \quad k^3a = x$

$ax^2+2bx+c=0$

$a\cdot(k^3a)^2+2\cdot k^3a\cdot ka+k^2a=0$

$\cancel{k^6a^3}+2k^4a^2+k^2a=0$

$\cancel{D=4}k^8a^2-4\cdot k^6a^4=0$

$D=4b^2-4ac=4k^2a^2-4\cdot a\cdot k^2a=0$

$x=\frac{-2b\pm 0}{2a}$ $\qquad k^3a=\frac{-2\cdot ka}{2\cdot a}$

$k^3a=-k$

$k^2a=-1$

$k^2=-1$

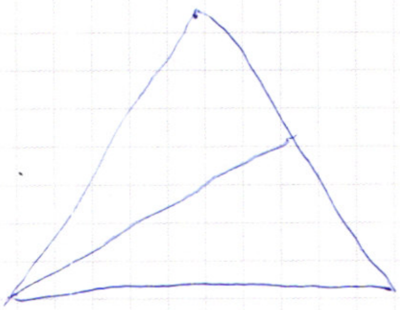
$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

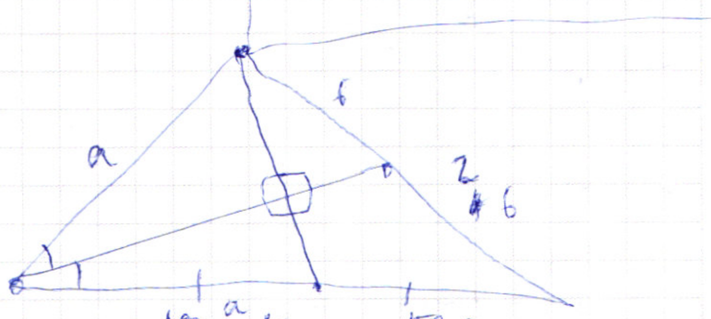
$2y^2-8xy+8x^2-2xy+4x+2y-4=0$

$2x^2+y^2$

$x^2+(x-2)^2+(y-2)^2-5=0$

$y^2-4y=$





a

b

$\frac{2}{\cancel{3}}b$

$\cancel{a}\ a\ \cancel{ka}\ \cancel{a}\ a$

№3

$\begin{cases} (y-2x)^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$a \quad 2a \quad 3b$

$xy-2x-y+2\geq 0$

$P=3a+3b=3(a+b)$

300 600 ~~300~~ 201 402 600 $a+b=400$

100 400 500 $\cancel{4}<200$ $a>200$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)