МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

a, b, c - геом. прогр., значит если q - знаменатель, то $\frac{b}{a} = q$; $b = aq$; $c = aq^2$.

Пусть четвёртый член равен d. Тогда d является корнем уравнения:

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$ $\quad a \neq 0$ по опр. геом. прогр.

$x^2 + 2qx + q^2 = 0$

$(x+q)^2 = 0$

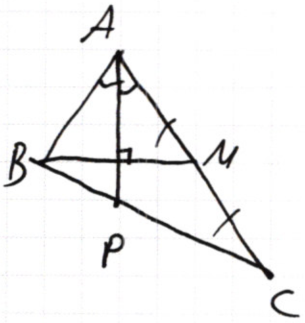
$x = -q$

Значит $\left.\begin{array}{l} d = -q \\ \frac{b}{a} = q \end{array}\right| \Rightarrow d = -\frac{b}{a}$

Ответ: четвёртый член ровен $-\frac{b}{a}$

№2

Пусть в $\triangle ABC$ AP - бисс., BM - медиана. $AP \perp BM$.



Тогда в $\triangle ABM$ AP - бисс, высота, значит $\triangle ABM$ - р./б. и $AB = AM = MC$.

Значит для достижения требуемых условий одна сторона должна быть в 2 раза короче какой-то другой.

Пусть $AB = x$; $AC = 2x$; $BC = y$. $P_{ABC} = x + 2x + y = 3x + y = 1200$.

Кроме того, по правилу треугольника $\begin{cases} x+2x>y, \\ y+x>2x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y<3x, \\ y>x. \end{cases}$

Т.к. по усл. $x, y \in \mathbb{Z}$, имеем

$$\begin{cases} y>x \\ y<3x \\ 3x+y=1200 \end{cases}$$

$3x+y=1200 \Leftrightarrow y=1200-3x$, но $y>x$, значит

$x<1200-3x \Leftrightarrow 4x<1200 \Leftrightarrow x<300.$

$3x+y=1200 \Leftrightarrow 3x=1200-y$, но т.к. $y<3x$, то:

$1200-y>y$

$y<600$; $3x>y \Rightarrow x>200.$

Для каждого ~~200~~ x такого, что $200<x<300$, $x\in\mathbb{Z}$, будет существовать единственный треугольник, в котором выполнятся все условия. Значит таких треугольников будет 99.

Ответ: 99.

№4

Дано:

а) $\triangle ABC$ − прям

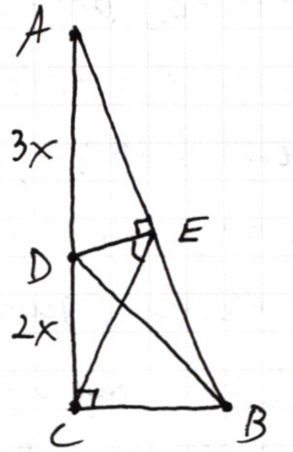
AB − гипотенуза

$D \in AC$

$\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$

$E \in AB$

$DE \perp AB$



Решение:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle CED = 45°$

Найти:

$tg\angle BAC = ?$

б) $AC = \sqrt{29}$

Найти:

$S_{CED} = ?$

1. $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$.

Пусть $AD = 3x$; $CD = 2x$.

2. $\angle DEB = \angle DCB = 90° \Rightarrow CDEB$ - впис. (по признаку)

3. $BCDE$ - впис., $\angle DEC = 45°$ $\Rightarrow \angle DBC = \angle DEC = 45°$ (как вписанные).

4. $\angle DCB = 90°$, $\angle DBC = 45°$ $\Rightarrow \triangle CDB$ - прям. р./б.; $BC = CD = 2x$.

5. $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{2x+3x} = \frac{2}{5}$

6. $AC = \sqrt{29} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$, тогда по т. Пифагора

$AB = \sqrt{29 + \frac{4\cdot 29}{25}} = \sqrt{\frac{29\cdot 25 + 4\cdot 29}{25}} = \cancel{\frac{29}{25}}\ \frac{29}{5}$

7. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB} = \sin\angle ADE = \sin\angle CDE$

$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AE}{\frac{3\sqrt{29}}{5}} = \frac{\sqrt{29}}{\frac{29}{5}}$

$\frac{AE\sqrt{29}}{29\cdot 3} = \frac{\sqrt{29}}{29}$

$AE = \cancel{\frac{29}{3}}\ 3$; $\cancel{DE = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{29}}{5}\right)^2 - 3^2} =}$

$\sin\angle CDE = \frac{5\sqrt{29}}{29}$ $DE = AE\, tg\angle BAC = \frac{6}{5}$

$S_{CDE} = CD\cdot DE\cdot \sin\angle CDE\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{6}{\cancel{5}}\cdot\frac{\sqrt{29}\cdot\cancel{5}}{\cancel{29}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{6}{5}$

Ответ: $S_{CDE} = \frac{6}{5}$; $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$

№ 5

Дано:

окр. Ω

окр. ω

Ω касается ω в т. A

внутренним образом

AB – диаметр Ω

BC – хорда Ω

BC касается ω в т. D.

$AD \cap \Omega = E$

$CD = 1$

$BD = 3$

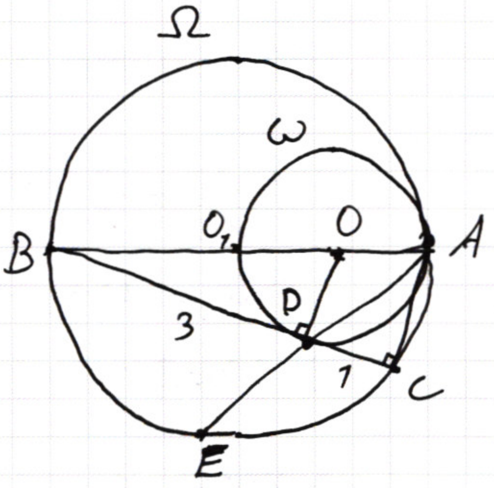
Найти:

$R_\Omega = ?$

$r_\omega = ?$

$S_{BACE} = ?$

Решение:



1. Пусть O – центр ω.

Тогда $O \in AB$; $OD \perp BC$ (по св-ву кас.)

2. AB – диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90° = \angle ODB$.

3. $\angle BCA = \angle ODB = 90°$, $\angle B$ – общий $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle OBD$, $K = \frac{3}{4}$

4. $BO = 2R_\Omega - r_\omega$, $AB = 2R_\Omega$, $BO = KAB = \frac{3}{4}AB$ $\Rightarrow 2R_\Omega - r_\omega = \frac{3}{4}R_\Omega \cdot 2$

$R_\Omega = 2r_\omega$

5. Пусть O_1 – центр Ω.

$R_\Omega = 2r_\omega \Rightarrow O_1 \in \omega$; $BO_1 = R_\Omega$

6. BD – кас., BA – сек. $\Rightarrow BO_1 \cdot BA = BD^2$

$R_\Omega \cdot 2R_\Omega = 3^2$

$2R_\Omega^2 = 9$

$R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r_\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

7. Из $\triangle ABC$ по т. Пифагора:

$AC = \sqrt{(2R_\Omega)^2 - BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 16} = \sqrt{2}$

8. Из $\triangle ADC$ по т. Пифагора:

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD=\sqrt{DC^2+AC^2}=\sqrt{3}$

$\sin\angle ADC=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

9. $BC\cap AE=D \Rightarrow BD\cdot DC=AD\cdot DE$ (по св-ву хорд) $\Rightarrow$

$3\cdot 1=\sqrt{3}\cdot DE \Rightarrow DE=\sqrt{3}$; $AE=DE+AD=2\sqrt{3}$

10. $S_{BACE}=\dfrac{BC\cdot AE\cdot \sin\angle ADC}{2}=\dfrac{4\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}=4\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=$

$=4\sqrt{2}$

Ответ: $R_\Omega=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; $r_\omega=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$; $S_{BACE}=4\sqrt{2}$

№6

$2x^2-x-1\leq ax+b\leq x+|2x-1|$

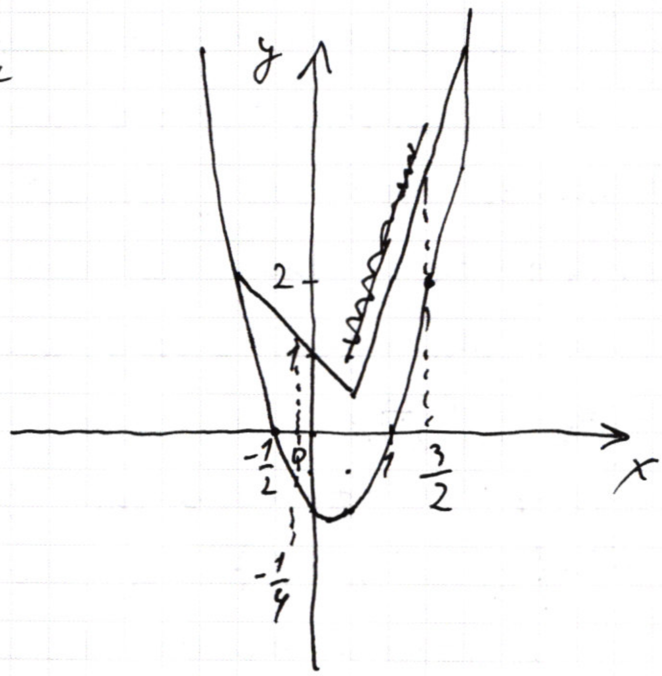
Построим графики левой и правой части:

$y_1=2x^2-x-1$ – парабола с ветвями вверх.

$x_в=\dfrac{1}{4}$

$y_в=-\dfrac{9}{8}$

x	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{4}$
y	-1	0	0	2	2	$-\frac{5}{8}$



$y_2=x+|2x-1|=$

$=\begin{cases}x+2x-1, & x\geq\frac{1}{2}\\ x-2x+1, & x<\frac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}3x-1, & x\geq\frac{1}{2}\\ -x+1, & x<\frac{1}{2}\end{cases}$, при $x=\frac{1}{2}$ $y=\frac{1}{2}$

график $y=ax+b$ - прямая, пересекает ось абсцисс в точке b.
Для выполнения условий эта прямая должна лежать не ниже параболы и не выше второго графика на участке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

Значит самая „нижняя" из возможных прямых, лежащих не ниже параболы проходит через точки $\left(-\frac{1}{4}; y_1\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; y\left(\frac{3}{2}\right)\right)$, т.е $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. Уравнение такой прямой:

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + \cancel{-\frac{12}{8}} + b = -\frac{5}{8} \\ \frac{3}{2}a + b = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 4b = \frac{5}{2}, \\ a + \frac{2}{3}b = \frac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{14}{3}b = \frac{5}{2} - \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2}a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{4}, \\ \frac{3}{2}a - \frac{1}{4} = 2; \end{cases} \begin{cases} b = -\frac{1}{4} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$y_3 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ - уравнение самой „низкой" прямой".

Причём эта прямая проходит через точку $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ - точку „стыка" графика правой части, значит никакие прямые „выше" найденной не подойдут, т. к. часть этой прямой будет лежать выше графика функции с модулем. ~~Если $y_1\left(-\frac{1}{4}\right) \geq -\frac{5}{8}$ и $y_1\left(\frac{3}{2}\right) \geq 2$, то y_3 (- график прямой $f(x)$) бу~~

Пусть $f(x)$ - искомая прямая, тогда если $f\left(-\frac{1}{4}\right) \geq -\frac{5}{8}$ и $f\left(\frac{3}{2}\right) \geq 2$, то $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$. Причём равенство достигается только при $a=\frac{3}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$, т.к. по условию $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$.

Ответ: $a=\frac{3}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$f(ab)=f(a)+f(b)$, $D(f)=Q$; $x>0$.

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

Пусть $a=p_1p_2p_3\ldots$; $a\in N$ — разложение числа a на простые. Тогда $f(a)=f(p_1p_2p_3\ldots)=\left[\frac{p_1}{2}\right]+\left[\frac{p_2}{2}\right]+\left[\frac{p_3}{2}\right]\ldots \geqslant 0$

~~f(x/y)~~ $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{1}{y}\right)&=f\left(\frac{1}{y^2}\cdot y\right)=f\left(\frac{1}{y^2}\right)+f(y)\\ f\left(\frac{1}{y^2}\right)&=f\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y}\right)=2f\left(\frac{1}{y}\right)\end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} f\left(\frac{1}{y^2}\right)&=f\left(\frac{1}{y}\right)-f(y)\\ f\left(\frac{1}{y^2}\right)&=2f\left(\frac{1}{y}\right)\end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)-f(y)=2f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y).$$

значит $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

~~легко~~ Легко посчитать значения f ~~от~~ для чисел от 1 до 21.

$f(1)=f(1\cdot1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=f(3)=1$

$f(4)=f(5)=f(6)=f(9)=2$

$f(7)=f(8)=f(10)=f(12)=f(15)=f(18)=3$

~~$f(11)=5$~~ $f(14)=f(16)=f(20)=f(21)=4$

$f(11)=5$

$f(13)=6$

$f(17)=8$ $f(19)=9$

Условие $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ эквивалентно $f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$.

Будем перебирать все возм. иксы и находить возм. игреки. подходящие игреки.

$f(x)=0$; ~~$x=1$; $y=$~~ x имеет 1 вариант, y имеет $21-\cancel{3}1=20\cancel{18}$ вариантов.

$f(x)=1$: x имеет 2 варианта, y имеет $21-3=18$ вар.

$f(x)=2$: x имеет 4 вар., y имеет $21-7=14$ вар.

$f(x)=3$: x имеет 6 вар., y имеет $21-13=8$ вар.

$f(x)=4$: x имеет 4 вар., y имеет $21-17=4$ вар.

$f(x)=5$: x имеет 1 вар., y имеет $21-18=3$ вар.

$f(x)=6$: x имеет 1 вар., y имеет $21-19=2$ вар

$f(x)=8$: x имеет 1 вар., y имеет $21-20=1$ вар.

$f(x)=9$: x имеет 1 вар., y не имеет. вар.

Суммируя все возможные комбинации:

$2\cdot 18+4\cdot 14+6\cdot 8+4\cdot 4+3+2+1=36+56+48+16+6=$

$=92+70=162$

Ответ: таких пар 162.

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

1) $y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$y^2+4x^2-4xy=(x-1)(y-2)$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$4x^2+y^2-5xy+2x+\cancel{4}y-2=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$

2) $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-2x+x^2-2=0$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(x-1)^2=3$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

Пусть $t=x-1$; $z=y-2$, тогда

$z-2t=y-2-2x+2=y-2x$. Имеем систему уравнений относительно t и z.

$$\begin{cases}(z-2t)^2=zt,\\ 2t^2+z^2=3;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z^2-4zt+4t^2=zt,\\ 2t^2+z^2=3;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}z^2-5zt+4t^2=0 & (1)\\ 2t^2+z^2=3; & (2)\end{cases}$$ при $t\neq 0$:

1) $z^2-5zt+4t^2=0$

$\left(\frac{z}{t}\right)^2-5\left(\frac{z}{t}\right)+4=0$

$\frac{z}{t}=1$; или $\frac{z}{t}=4$

$t\neq 0$, т.к. в этом случае из 1 ур-ия следует, что $z=0$, но это не удовлетворяет второму уравнению.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{z}{t}=1, \\ \frac{z}{t}=4; \end{array}\right. \\ 2t^2+z^2=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z=t, \\ z=4t, \end{array}\right. \\ 2t^2+z^2=3; \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3z^2=3, \\ 18z^2=3; \end{array}\right. \\ z=t; \end{cases}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z=\pm 1, \\ t=\pm 1, \end{cases} \\ \begin{cases} z=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}, \\ t=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}. \end{cases} \end{array}\right.}$$

Но т.к. в условии есть $\sqrt{tz}$, то t и z должны иметь разный знак. Получаем 4 пары (t, z):

$\cancel{(1;1); (-1;-1); \left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)};$

$(1;1); (-1;-1); \left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right); \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right).$

При $z=t$:

$3z^2=3$

$z=\pm 1$; $t=\pm 1$

При $z=4t$:

$2t^2+16t^2=3$

$t=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$; $z=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Обр. замена:

$t=x-1$; $z=y-2$

$x=t+1$ $\quad y=z+2$

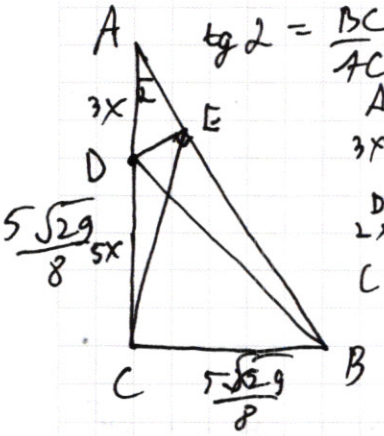
$x_1=1+1=2$ $\quad y_1=1+2=3$

$x_2=-1+1=0$ $\quad y_2=-1+2=1$

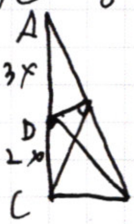
$x_3=\frac{\sqrt{6}}{6}+1$ $\quad y_3=\frac{2\sqrt{6}}{3}+2$

$x_4=-\frac{\sqrt{6}}{6}+1$ $\quad y_4=-\frac{2\sqrt{6}}{3}+2$

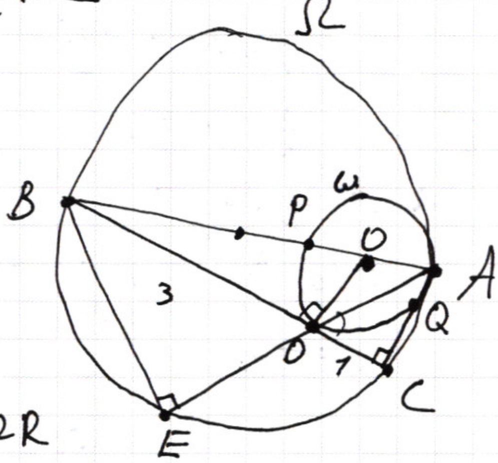
Ответ: $(2;3); (0;1); \left(1+\frac{\sqrt{6}}{6}; 2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right); \left(1-\frac{\sqrt{6}}{6}; 2-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right).$



$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{8}$



$\frac{CD}{\sin 45^\circ} = 2R$



$\frac{2}{3}R = \frac{4}{3}r$

$R = 2r$

$(2R - r) \cdot \frac{4}{3} = 2R$

$\frac{8R}{3} - \frac{4}{3}r = 2R$

$\frac{16}{9}r^2 + 16 = 4\left(\frac{7}{4r} + \frac{4}{9}r\right)^2$

$R =$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} =$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|^2$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - x - 1$

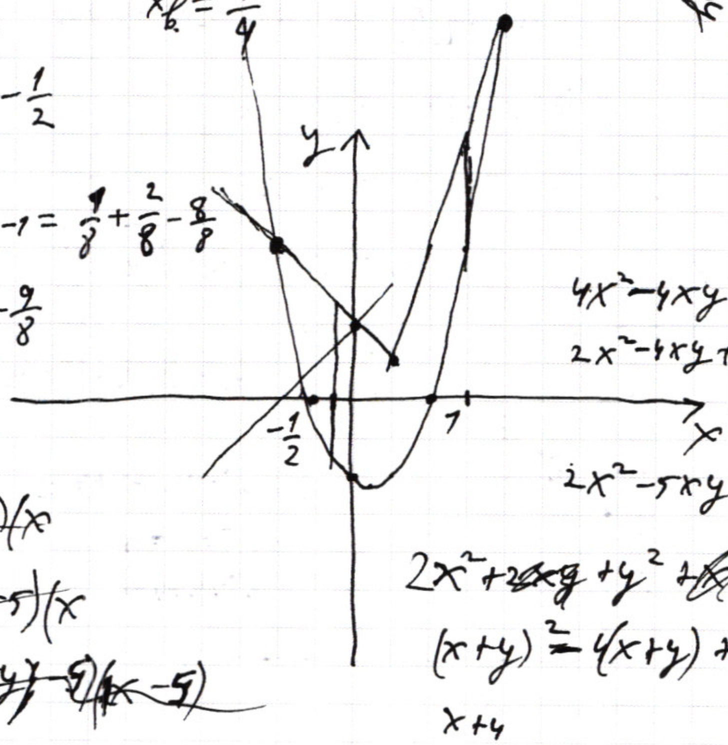
$x_1 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_b = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{8}{8}$

$-\frac{9}{8}$



$(\cancel{2x - y})(x$

$(\cancel{2x - y - 5})(x$

$(\cancel{2x - 5y} - 5)(\cancel{x - 5})$

$2x^2 =$

$x(2x -$

$4R^2 - 4rR = 9$

$(2R - 2r) \cdot 2R = 9$

$\cancel{BP \cdot BA = 9}$

$\cancel{CQ \cdot CA = 1}$

$AC^2 + 4^2 = 4R^2$

$AC = \frac{4}{3} OD = \frac{4}{3} r$

$\frac{16}{9}r^2 + 16 = 4R^2 \quad R^2 = \frac{4}{9}r^2 + 4$

$4R^2 = 9 + 4rR \quad R^2 = \frac{9}{4} + rR$

$\frac{9}{4} + rR = \frac{4}{9}r^2 + 4$

$R = \frac{\frac{7}{4} + \frac{4}{9}r^2}{r}$

$= \frac{7}{4r} + \frac{4}{9}r$

$x \geq \frac{1}{2}: \; 3x - 1$

$x < \frac{1}{2}: \; -x + 1$

$4x^2 - 4xy + y^2 = xy - 2x - y + 2$

$2x^2 - 4xy + 4x - 4y + 3 = xy - 2x - y + 2y^2$

$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$

$2x^2 + \cancel{2xy} + y^2 + \cancel{x^2} \cancel{- 2xy} - 4x + 4y + 3 = 0$

$(x+y)^2 - 4(x+y) + x^2 - 2xy + y^2 - y^2 + 3 = 0$

$x + y$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 - 2x - 2 = 0$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

$16x^2 + 4y^2 - 20xy$

$y^2 - 5xy + 2 - 4x^2 - 2x - y^2$

$16x^2 + y^2 - 4x + 3 = 20xy + 8 - 16x^2 - 8x - 4y^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c

$b = qa$; $c = q^2 a$ $\quad d = q^3 a$

$ax^2 + 2qax + q^2 a = 0$

$\cancel{qax^2 + 2q^2ax + q^3a = 0}$

$\frac{b}{a} = q \quad d = -\frac{b}{a}$

$\frac{3}{4} \quad -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}a + b = -\frac{5}{8}$

$\frac{3}{2}a + b = 2$

$ax^2 + 2qx + q^2 = 0$

$(x+q)^2 = 0$

$x = -q$

$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$

$4x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 6 = 0$

$y^2 - 10x - 9y + 8 + 5xy = 0$

299

$x = 201, 262 \ldots \cancel{+3}99$

$1200 - 3x < x$

$4x < 1200$

$x < 300$

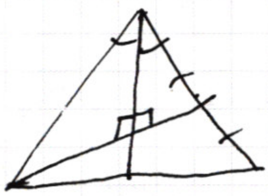
$4b = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}$

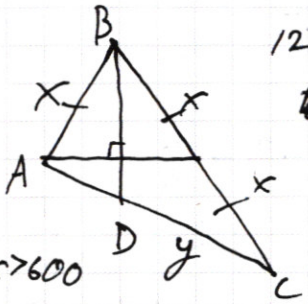
$b = -\frac{1}{4}$

$a - 4b = \frac{5}{2}$

$6a + 4b = 8$

$7a = \frac{21}{2} \quad a = \frac{3}{2}$





$3x > 600$

$1200 = 3x + y$

$y < 3x$

$y > x$

$\cancel{x < y < 2x}$

$(y-2)(x-1) = xy - 2x - y + 2$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$ ②

$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2$

$4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

2) $\cancel{2x^2 - 4x + 1 + y^2 - 4y + 4}$

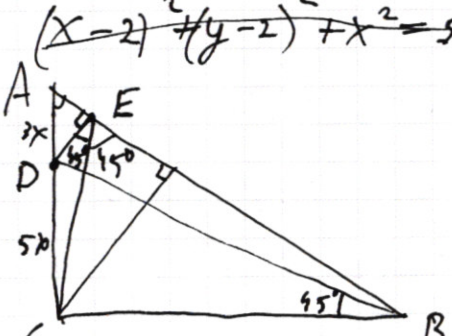
$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 5 = 0$

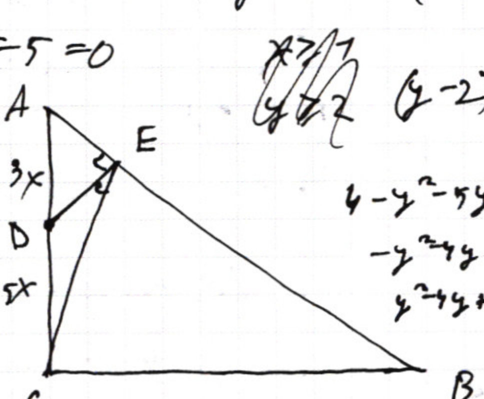
$\cancel{(x-2)^2 + (y-2)^2 + x^2 = 5}$

$x \geq 1$

$y \geq 2$

$(y-2)(x-1) = (y-2x)^2$





$4 - y^2 - 5y + x + y - x = 0$

$-y^2 - 4y = -4$

$y^2 + 4y + 4 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{f(1)}=f(2)=f(3)=1$ $\qquad f(1)=f(1)\cdot+f(1)=0$

$f(4)=f(5)=f(6)=f(9)=2$

$f(7)=f(8)=f(10)=f(12)=f(15)=f(18)=3$

$f(11)=5$

$f(13)=6$

$f(14)=4=f(16)=4=f(20)=f(21)$

$\cancel{f(16)}\ f(17)=8$

$\frac{5}{2}-\frac{4}{3}=\frac{15}{6}-\frac{8}{6}=f(y)>f(x)$

$=\frac{\cancel{2}1}{\cancel{4}2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}2}=\frac{1}{4}$

$f(19)=9$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$

$a;\ aq;\ aq^2$ $\qquad \frac{b}{a}=\frac{c}{b}=q \Rightarrow x=-\frac{b}{a}=-\frac{c}{b}=\frac{c}{a}$

$ax^2\ \cancel{2}bx+c=0$ $\qquad \sqrt{\frac{c}{a}}$

$ax^2+2aqx+aq^2=0$ $\qquad \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

$x^2+2qx+q^2=0$

$y^2+4y-1=0$

$(x+q)^2=0$

$-\frac{5}{8}$

$x=-q$ $\qquad \frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=$ $\qquad 2x^2-4x+3+y^2-4y=0$

$=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}-\frac{8}{8}=$

$\frac{D}{4}=4-2(y^2-4y+3)=4-2y^2+8y-6=$

$y^2-4y+2x^2-4x+3=0$ $\qquad =2y^2+8y-2$

$\frac{D}{4}=4-2x^2+4x-3)=-2x^2+4x+1$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1+x^2-2x-2y+1=$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)^2-2y=0$ $\qquad (x-1)^2=\frac{2y-(y-1)^2}{2}=$

$2(x-1)^2+(y-1)^2=2y$ $\qquad y\geq 0$ $\qquad =\frac{2y-(y^2-2y+1)}{2}=$

$2x^2+(y-1)^2+4x-2y+\cancel{2}\ \overset{-2}{\cancel{-6}}+2xy-2xy=$

$2x^2+(y-1)^2+2(y-2)(x-1)-2-2xy=0$ $\qquad x=\sqrt{\frac{\cancel{y}-y^2+4y-1}{2}}+1$

$\cancel{2x^2+y^2-2y+1+2y^2-8xy+8x^2-2-2xy=0}$

$\cancel{10x^2+3y^2}$ $\qquad \cancel{4-y^2+4y-1}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad$ $D(f) - Q$

$\to 0$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

$1 \le x \le 21$ $\quad$ $x, y \in N$

$1 \le y \le 21$ $\quad$ $f(x/y) < 0 =$

$= f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x = p_1 p_2 p_3 \dots$

$f(x) = f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)\dots = \left[\frac{p_1}{2}\right] + \left[\frac{p_2}{2}\right] + \left[\frac{p_3}{2}\right] \dots$

$f(2)=1$ $\quad$ $f(5)=2$ $\quad$ $f(6)=f(2)+f(3)=2$

$f(3)=1$ $\quad$ $f(4)=f(2)+f(2)=2$ $\quad$ $f(7)=3$

$f(1)=0$ $\quad$ $f(8)=3f(2)=3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\cdot 2\right) = 1 + f\left(\frac{1}{4}\right)$ $\quad$ $f(9)=2f(3)=2$

$\cancel{f\left(\frac{1}{3}\right)}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f(n)$

$f\left(\frac{1}{n^2}\right)=2f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)+1$

$f\left(\frac{1}{2}\right)-1=2f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=-2$

$f\left(\frac{1}{8}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)=-3$

$f\left(\frac{1}{16}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)=-4$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{9}\right)+f(3)$

$\cancel{f\left(\frac{1}{9}\right)+f\left(\frac{2}{9}\right)+f\left(\frac{1}{9}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)}$

$f\left(\frac{1}{9}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)=2f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{9}\right)+1$

$2f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{9}\right)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$

$f\left(\frac{1}{9}\right)=-2$

$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(n)=2f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f\left(\frac{1}{n}\right)=-f(n)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)