МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

№1

a, b, c

$a=b_1$; $b=b_1q$; $c=q^2 b_1$

корень $= \frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b_1q\pm\sqrt{4b_1^2q^2-4b_1^2q^2}}{2b_1} = -q$, но т.к. это

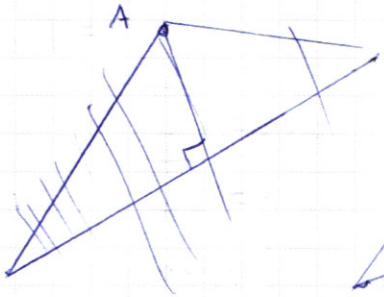
четвёртый член последовательности, то $b_4 = c\cdot q$
$a\neq 0$

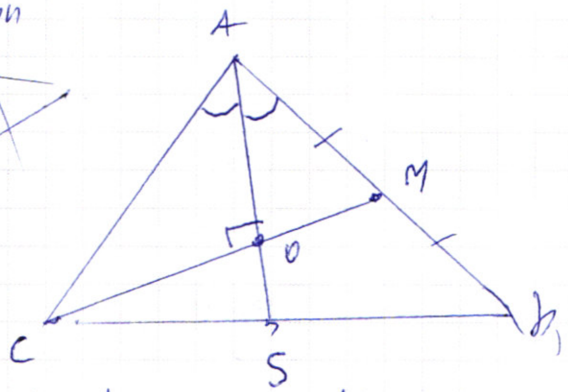
$c\cdot q=-q \Rightarrow c=-1$

Ответ: -1

№2

рассмотрим Δ, предположим из A проведём биссектрису, а из C медиану (без уменьшения общности)





Δ CAM - равнобедренный $\Rightarrow AM=AC=x \Rightarrow AB=2x$

по свойству биссектрисы $\frac{SB}{CS}=\frac{AB}{AC}=2 \Rightarrow CS=y$; $SB=2y$

$\Rightarrow CB=3y$; по условию $3x+3y=1200 \Rightarrow x+y=400$

т.к. x - целое то y - тоже целый

по неравенству Δ $3y<3x \Rightarrow y<x$ и $2x<x+3y$
$x<3y$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) из предыдущего неравенства $\Rightarrow x<300$ и $x>200$

$\Rightarrow$ всего x подходит 99 штук $\Rightarrow$ ответ: 99 Δ

в заключение я хочу сказать что для любого верно данное утверждение #/> (это очевидный факт).

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

(я просто выделил полный квадрат)

$t=y-2$

$v=x-1$

ОДЗ $t-2v\geq 0$:

$tv\geq 0$

$$\begin{cases} t-2v=\sqrt{tv} \\ 2v^2+t^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2-4tv+4v^2=tv \\ 2v^2+t^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-4v)(t-v)=0 \\ 2v^2+t^2=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

1. $t=v$

$3v^2=3$

$v^2=1$

а. $v=1$

$t=1$

$t-2v<0$ (не подходит)

б. $v=-1$

$t=-1$

$t-2v>0$

$tv>0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} y-2=-1 \\ x-1=-1 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$

2. $t=4v$

$2v^2+16v^2=3$

$v^2=\frac{1}{6}$

а. $v=\sqrt{\frac{1}{6}}$

$t=4\sqrt{\frac{1}{6}}$

$t-2v>0$

$tv>0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{6}}=x-1 \\ 4\sqrt{\frac{1}{6}}=y-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{1}{6}}+1 \\ y=4\sqrt{\frac{1}{6}}+2 \end{cases}$

б. $v=-\sqrt{\frac{1}{6}}$

$t=-4\sqrt{\frac{1}{6}}$

$t-2v<0$ (не подходит)

Ответ: $(0,1)$; $(\sqrt{\frac{1}{6}}+1;\ 4\sqrt{\frac{1}{6}}+2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Ответ.~~ №7

~~В~~ лемма 1. $F(1)=0$

действительно $F(x\cdot 1)=F(x)+F(1) \Rightarrow 0=F(1)$

~~Лемма~~ 2.

~~В~~ Рассмотрим $F(\frac{x}{y})$; $F(\frac{x}{y}\cdot y)=F(x)=F(\frac{x}{y})+F(y)$

$\Rightarrow F(x)-F(y)=F(\frac{x}{y})$; заметим, что если $F(x)\neq F(y)$

то $F(y)-F(x)=F(\frac{y}{x})$ - будет другого знака

$\Rightarrow$ вариантов будет $\frac{21\cdot 21 - \text{кол-во } 0}{2}$ (из предыдущего утверждения) которые нам подходят.

Таблица значений

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
F(x)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8

x	18	19	20	21
F(x)	3	9	4	4

мы построим таблицу из ~~...~~ условий данных в задаче

составим таблицу значений

F(x)	X	всего	вариантов
0	1	1	1
1	2, 3	2	4
2	4, 5, 6, 9	4	16
3	7, 8, 10, 12, 15, 18	6	36
4	14, 16, 20, 21	4	16
5	11	1	1

6 – 13 $(1 \to 1)$

7 – ~~0~~ $(0 \to 0)$

8 $\to$ 17 $(1 \to 1)$

9 $\to$ 19 $(1 \to 1)$

всего вариантов с $F(\frac{x}{y})=0$

$= 1+1+16+36+16+1+1+0+1+1$

$\Rightarrow$ Ответ $\frac{21\times 21 - 77}{2} = 182$

№4

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AC}$

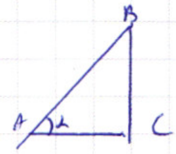
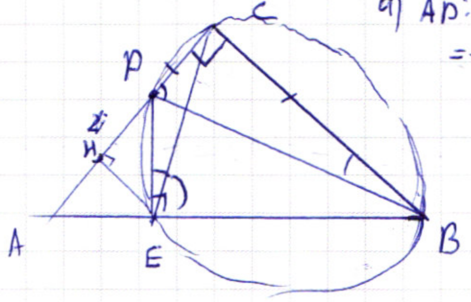


Рисунок к задаче

Дано:
ΔABC - прямоугольный
$\angle C = 90°$
$AD : AC = 3:5$
$DE \perp AB$
$E \in AB$
$D \in AC$
$\angle CED = 45°$
$AC = \sqrt{29}$

$tg\angle BAC$
S_{CED}



а) $AD : AC = 3:5$
$\Rightarrow AD = 3x$, а $DC = 2x$
т.к. $\angle DEB = 90°$
и $\angle DEC = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CEB = \angle CED = 45°$

$EDCB$ - вписаный (вокруг него можно описать окружность)

т.к. $\angle DEB + \angle DCB = 180°$

$\angle DEC = \angle DBC$ (т.к. опирается на дугу $\smile DC$)

$\Downarrow$

$\angle CDB = 180° - 90° - 45° = 45° \Rightarrow$

$\angle CDB = \angle DBC \Rightarrow DC = CB = 2x$

$AC = 5x$ (по условию) $\Rightarrow tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

~~б) из предыдущего пункта $\Rightarrow CB = \frac{2}{5}AC \Rightarrow \frac{2\sqrt{29}}{5}$~~

~~$\Rightarrow S = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{29}{5}$; Заметим, что $\Delta ADE \sim \Delta ACB$ (по двум углам) $\Rightarrow k = \frac{3}{5} \Rightarrow S$~~

Ответ: $\frac{2}{5}$

б) EH высота в ΔDCE ; $AH = z$; $HD = y$

$$\begin{cases} z + y = 3x \\ \sqrt{zy} = HE \text{ (т.к. прямоугольный } \Delta) \end{cases}$$

$\Delta AHE \sim \Delta ACB$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{\sqrt{zy}}{2x} = \frac{AH}{AC} = \frac{z}{5x}$ $\left(\frac{HE}{CB} = \frac{AH}{AC}\right)$

$\sqrt{y} = \frac{2}{5}\sqrt{z} \Rightarrow y = z\frac{4}{25} \Rightarrow 3x = \frac{29}{25}z \Rightarrow z = \frac{3\sqrt{29}}{5} : \left(\frac{29}{25}\right) = \frac{15\sqrt{29}}{29}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 3x - z = \frac{3\sqrt{29}}{5} - \frac{15\sqrt{29}}{29}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} HC \cdot CD = \frac{1}{5}\sqrt{29} \cdot \left(\sqrt{\frac{15\sqrt{29}}{29}\left(\frac{3\sqrt{29}}{5} - \frac{15\sqrt{29}}{29}\right)}\right) = \frac{1}{5}\sqrt{29} \cdot \sqrt{9 - \frac{15^2}{29}}$

$= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{29 \cdot 9 - 15^2} = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{36} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{6}{5}$

№6

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$

а) $2x^2 - x - 1 = y$ (построим график) точки:

x	y	x	y	x	y
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{8}$
0	$-\frac{8}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{3}{2}$	2
$\frac{1}{4}$	$-\frac{9}{8}$	1	0		

б) $x + |2x - 1|$ построим график точки:

x	y	x	y	x	y
$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}\left(\frac{10}{8}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}\left(\frac{6}{8}\right)$	1	$2\left(\frac{16}{8}\right)$
[illegible]	[illegible]	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{8}\right)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{4}\left(\frac{22}{8}\right)$
0	$1\left(\frac{8}{8}\right)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}\left(\frac{10}{8}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}\left(\frac{28}{8}\right)$

$x \leq \frac{1}{2}$

$x + |2x - 1| = x - (2x - 1) = -x + 1$

$x > \frac{1}{2}$

$x + |2x - 1| = 3x - 1$

Я нарисовал функции на графике
если $a \geq 0$, то, парабола должна быть снизу от прямой и функции модуля сверху. $\Rightarrow ax+b$, должна проходить через ворота v_1, v_2 и v_3 (а такая прямая только одна)

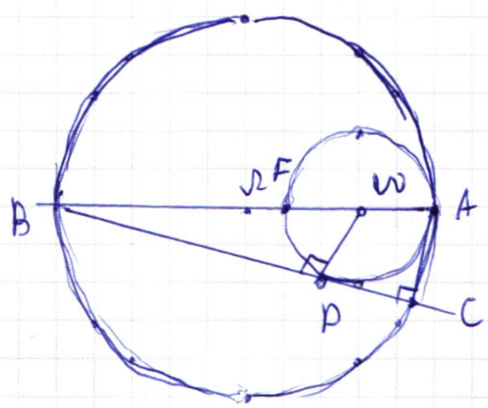
$(- - -) \Rightarrow b = -\frac{2}{8}$, и $a = \frac{12}{8}$

если $a<0$, то парабола должна быть сверху, а галка - снизу $\Rightarrow \varnothing$

Ответ: $\left(\frac{12}{8}; -\frac{2}{8}\right)$

№5

Дано:
$A = \omega \cap \Omega$
AD - диаметр Ω
$\Omega > \omega$
BC касается ω
P - точка касания
$BP=3$, $BC=4$



$\angle ACB = 90°$ (т.к. он опирается на диаметр)

$\Omega, \omega \in AB$ (т.к. они касаются)

$\Delta BP\omega \sim \Delta BAC$ (по двум углам) ($\angle BP\omega = 90°$ угол между радиусом и касательной)

$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{BP}{BC} = \frac{B\omega}{BA} = \frac{2R-r}{2R}$ (r - радиус малой окружности, R - радиус большой окружности)

$BF \cdot BA = BP^2$ (степень точки)

$$\begin{cases} 2R(2R-2r) = 9 \\ 6R = 8R - 4r \Rightarrow -2R = -4r \\ \qquad R = 2r \end{cases}$$

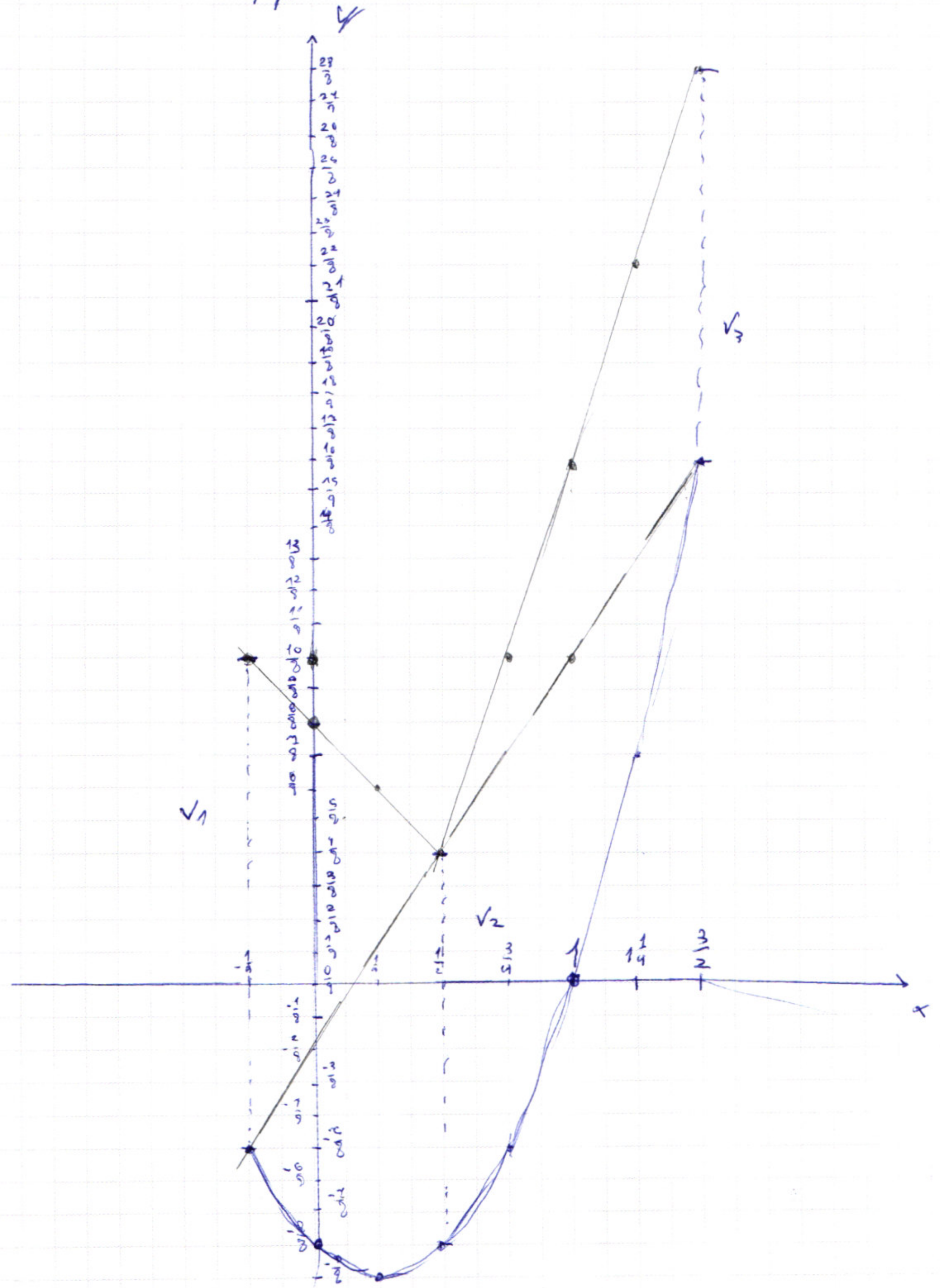
$\Downarrow$

$$\begin{cases} R = 2r \\ 2R \cdot R = 9 \Rightarrow R = \sqrt{4.5} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{4.5}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\sqrt{4.5}$ и $\frac{\sqrt{4.5}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

График



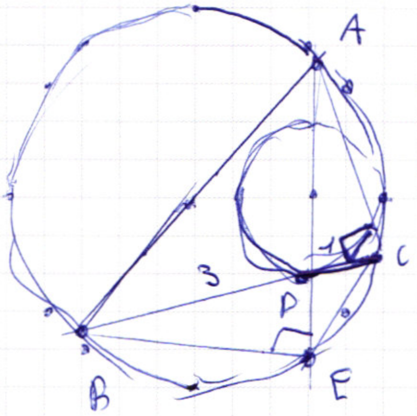
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

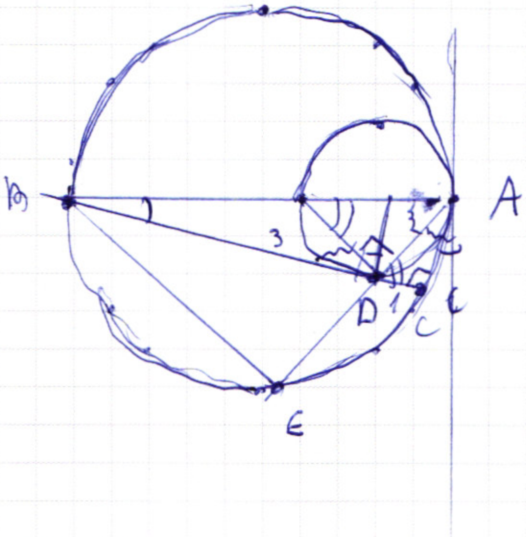
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

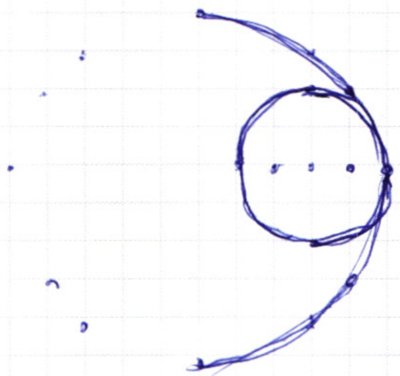
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$\alpha + \cancel{90} = 180 - (90+\beta) = \beta$

$\alpha + 90 - \beta = \beta$

$\alpha + 90 = 2\beta$

$\beta + \alpha = \frac{\alpha}{2} + 45 + \alpha$

$$\frac{2R - r}{\cancel{N}\,2R} = \frac{3}{4}$$

$8R - 9r$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c $\quad a = b_1,\ b = b_1 q,\ c = b_1 q^2$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$$\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b_1 q \pm \sqrt{4b_1^2 q^2 - 4b_1^2 q^2}}{2b_1} = -q$$

$q^3 b_1 = -q$

$q^2 b_1 = -1$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1$

$\frac{9}{8} - \frac{3}{4} - 1 =$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = \quad = \frac{9}{8} - \frac{6}{8} - 1 = -\frac{3}{8}\ 1$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \quad -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{2}{8}$

$29 \cdot 9 = 261$

$261 - 225 = 36$

$371 - 7 = 364$

$371 - 7 =$ 364

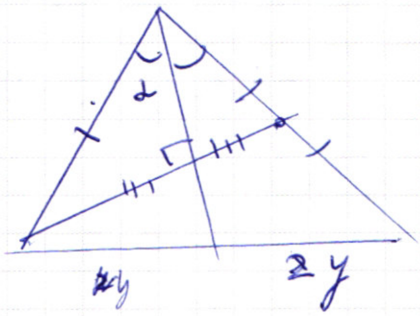
$21 \cdot 21 = 441$

182

$\frac{25}{8} - \frac{5}{4} - 1$

$\frac{25}{8} - \frac{10}{8} - 1 = \frac{15}{8} - 1 = \frac{7}{8}$

$$\begin{cases} z + y = 3x \\ \frac{\sqrt{zy}}{2x} = \frac{z}{5x} \end{cases}$$



$h \cdot x = 2b\sin\alpha \cdot l$

$h \cdot y = b\sin\alpha l$

$\frac{x}{y} = 2$

$5x = H$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$\sqrt{zy} = \frac{2}{5} z$

$\sqrt{y} = \frac{2}{5}\sqrt{z}$

$y = \frac{4}{25} z$

$\frac{29}{25} z = 3x$

$z = \frac{3\,AC\,25}{5 \cdot 29} = \frac{15\sqrt{\ }}{\sqrt{29}}$

$3x + 3y = 3(x+y) = 1200$

$x + y = 400$

$x > y \Rightarrow x = 201 \ldots 299$

$2x < 3y + x \quad 299 - 201 + 1 = 99$

$x < 3y$

$\frac{15\sqrt{29}}{29} \quad y = \frac{3\sqrt{29}}{5} - 15\sqrt{29}$

$\sqrt{(x-2)(y-2)}$

$||$

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$(2x - 2)(x - 1) = 2x^2 - 4x + 2$

$(2x^2 - 4x - 1) \quad y^2$

$2(x-1)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(1)=0$

№4

$f(\frac{x}{y})\cdot f(y)$ -

$f(\frac{x}{y})=f(x)\cdot$

$f(x)=f(\frac{x}{y})+f(y)$

$f(x)-f(y)=f(\frac{x}{y})$

$f(p_1^{\alpha}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha})=$

$f(a_1\ldots a_n)=f(a_1)+\ldots f(a_{n-1}a_n)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
f(x)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8

18	19	20	21
3	9	4	4

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \end{cases}$$

$2+4-3=3$

$t=y-2$

$v=x-1$

$$\begin{cases} t-2v=\sqrt{tv} \\ 2v^2+t^2=3 \end{cases}$$

$t^2-4vt+4v^2=tv$

$$\begin{cases} t^2-5vt+4v^2=0 \\ 2v^2+t^2=3 \end{cases}$$

$(t-4v)(t-v)=0$

1. $t=v$

$2t^2+t^2=3$

$t^2=1$

$t=-1$ $\quad$ $t=+1$

$v=-1$ $\quad$ $v=+1$

$tv=1$ $\quad$ $tv=1$

$t-2v=1$ $\quad$ $t-2v=-1$ (противоречие)

$y=1$; $x=0$

2. $t=4v$

$2v^2+16v^2=3$

$v^2=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$

$v=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$

$v=\sqrt{\frac{1}{6}}$; $t=4\sqrt{\frac{1}{6}}$ $\quad$ $v=-\sqrt{\frac{1}{6}}$; $t=-4\sqrt{\frac{1}{6}}$

$t-2v=2\sqrt{\frac{1}{6}}$

$y=4\sqrt{\frac{1}{6}}+2$

$x=\sqrt{\frac{1}{6}}+1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)