МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

№1

a, $b=aq$, $c=aq^2$, $x=aq^3$ (члены геом. прогрес. выраженные через a)

$ax^2+2bx+c=0$

$a\cdot a^2q^6+2aq\cdot aq^3+aq^2=0$ $\quad a^3q^6+2a^2q^4+aq^2=0$

Если $a=0$ и/или $q=0$, то $c=0$

Если $a\neq0$ и $q\neq0$, то

$a^3q^6+2a^2q^4+aq^2=0$

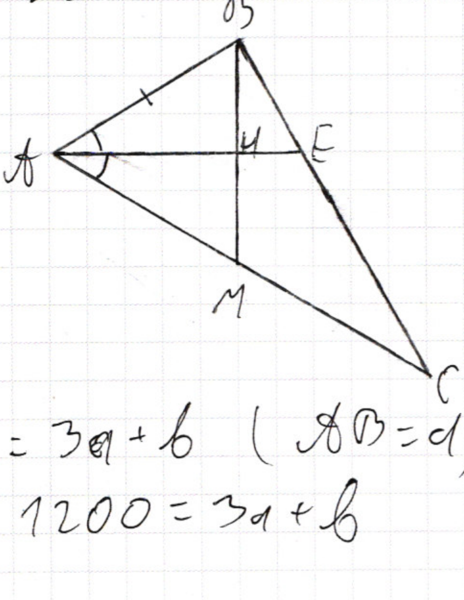
$a^2q^4+2aq^2+1=0$

$c^2+2c+1=0$

$c=-1$

Ответ: $c=0$; $c=-1$

№2



$\triangle ABM$ — равнобедр. ($AB=AM$) т.к. AH — высота и биссектриса значит $AB=AM=MC$ (BM — медиана)

$P_{(ABC)}=AB+BC+AC=3AB+BC=$
$=3a+b$ ($AB=a$, $BC=b$)

$1200=3a+b$

$$\begin{cases}1200=3a+b\\ b<3a\\ 2a<a+b\end{cases}$$

$$\begin{cases} 1200 = 3a + b \\ b < 3a \\ a < b \end{cases} \Rightarrow b \in (300; 600)$$

$\boxed{a \in N, b \in N}$

$b \vdots 3$ т.к. $1200 \vdots 3$

$3a \vdots 3$

$1200 = 3a + b$ - линейная функция относительно a или b, значит каждому a соответствует ровно одно b и ~~на~~ наоборот.

значит кол-во пар a, b равно 99 т.к. условию выше удовлетворяют 99 b.

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 = a \\ y - 2 = b \\ b - 2a = \sqrt{ab} \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 - 4ab + 4a^2 = ab \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ ab \geq 0 \end{cases}$$

① $4a^2 - 5ab + b^2 = 0$ $D = 25b^2 - 16b^2 = 9b^2$

$a = \frac{5b \pm \sqrt{9b^2}}{8}$ $\left[\begin{array}{l} a = b \\ a = \frac{b}{4} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = \frac{b}{4} \end{array}\right. \\ 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} 2b^2 + b^2 - 3 = 0 \\ 2\frac{b^2}{16} + b^2 - 3 = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3b^2 = 3 \\ \frac{9b^2}{8} = 3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} b^2 = 1 \\ b^2 = \frac{8}{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b = \pm 1 \\ b = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

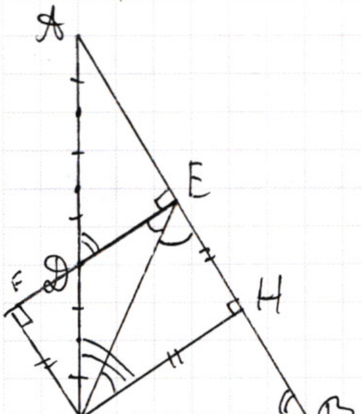
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=b\\ b=-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=\frac{b}{4}\\ b=\frac{2\sqrt6}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}a=\frac{b}{4}\\ b=-\frac{2\sqrt6}{3}\end{cases}\end{array}\right.\\ ab\geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=\frac{\sqrt6}{6}\\ b=\frac{2\sqrt6}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}a=-\frac{\sqrt6}{6}\\ b=-\frac{2\sqrt6}{6}\end{cases}\end{array}\right.\\ ab\geq 0\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1\\ y-2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-1\\ y-2=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=\frac{\sqrt6}{6}\\ y-2=\frac{2\sqrt6}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-\frac{\sqrt6}{6}\\ y-2=-\frac{2\sqrt6}{6}\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1+\frac{\sqrt6}{6}\\ y=2+\frac{2\sqrt6}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=1-\frac{\sqrt6}{6}\\ y=2-\frac{2\sqrt6}{6}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $x=2$, $y=3$; $x=0$, $y=1$; $x=1+\frac{\sqrt6}{6}$, $y=2+\frac{2\sqrt6}{3}$; $x=1-\frac{\sqrt6}{6}$, $y=2-\frac{2\sqrt6}{6}$.

№4



Д.п. CH – высота $\triangle ABC$

1) $\triangle AED \sim \triangle AHC$ по двум углам ($\angle A$ – общий, $\angle AED = 90° = \angle AHC$)

значит ~~$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CH} = \frac{3}{5}$ (по условию)~~

(по условию) $\frac{3}{5} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{DE}{CH}$ ~~(по сх~~

$\angle DEH = 90°$, $\angle CEH = 90° - \angle CED = 90° - 45° = 45°$

$\triangle CEH$ ($\angle CHE = 90°$), $\angle ECH = 90° - \angle CEH = 90° - 45° = 45°$

значит $\triangle CEH$ – равнобедр. по признаку
$(\angle CEH = \angle ECH)$
значит $CH = EH$
Пусть $DE = 3x$, тогда $CH = 5x$, $EH = 5x$;
$AE = 7{,}5x$ $\left(\frac{DE}{CH} = \frac{3}{5} = \frac{3x}{5x};\ \frac{AE}{AH} = \frac{3}{5};\ \frac{AE}{EH} = \frac{3}{2}\right)$
значит из $\triangle AED$ $(\angle AED = 90°)$
$tg\angle A = \frac{DE}{AE} = \frac{3x}{7{,}5x} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$

а) Ответ: $tg\angle A = 0{,}4$

$\triangle CAH \sim \triangle CBH$ по двум углам
$(\angle CHA = 90° = \angle CHB;\ \angle CBH = 90° - \angle A = \angle ACH)$
значит $\frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH}$ $\frac{5x}{12{,}5x} = \frac{HB}{5x} \Rightarrow HB = 2x$
$\triangle ABC$, $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{AC^2 + tg^2\angle A \cdot AC}$
$14{,}5x = \sqrt{29 + 0{,}16 \cdot 29}$
$14{,}5x = \cancel{2\sqrt{8{,}41}}\ 5{,}8$
$x = \frac{2}{5}$; $x = 0{,}4$
$S_{\triangle CHE} = \cancel{\frac{CH \cdot ED}{2}} = \frac{CF \cdot ED}{2} = \frac{EH \cdot DE}{2} = \frac{5x \cdot 3x}{2} = 15 \cdot 0{,}8 =$
$= 12$
($CFEH$ – ~~квадрат~~ параллелограмм по опред.)

б) Ответ: $S_{\triangle CHE} = 12$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

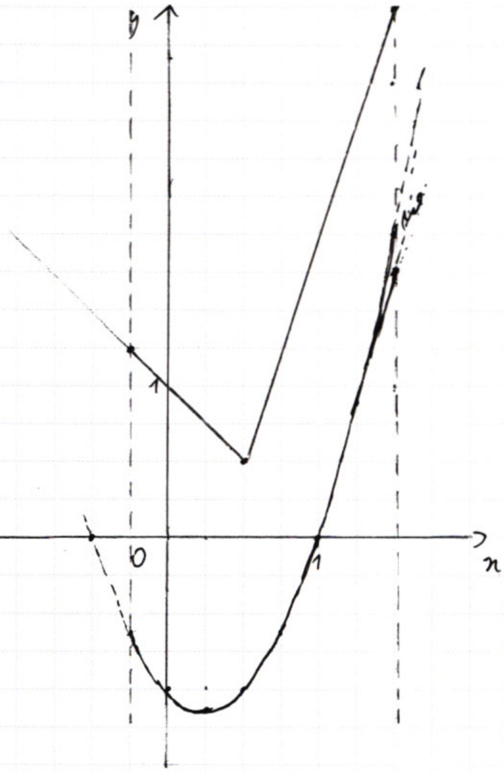
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№6

$2x^2-x-1 \leq ax+b \leq x+|2x-1|$

$2x^2-x-1=f(x)$

1) $f(x)=0$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$x_в=\frac{1}{4}$ $f(\frac{1}{4})=-\frac{9}{8}$ $f(\frac{5}{4})=\frac{7}{8}$

$f(0)=-1$

$f(\frac{1}{2})=-1$

$f(-\frac{1}{4})=-\frac{5}{8}$

$f(\frac{3}{2})=2$

2) $f(x)=x+|2x-1|$

$f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\geq\frac{1}{2}\\ 1-x, & x<\frac{1}{2}\end{cases}$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{4})=\frac{5}{4}$, $f(\frac{3}{2})=\frac{7}{2}$

$f(x)=ax+b$ – прямая

на графике мы видим что, существует только одна прямая удовлетворяющая условиям, прямая проходящая через точк $(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8})$ и $(\frac{3}{2};2)$

значит $\begin{cases}\frac{a}{4}+b=-\frac{5}{8}\\ \frac{3a}{2}+b=2\end{cases}$ $\begin{cases}a=2,1\\ b=-1,15\end{cases}$ Ответ: $a=2,1$

$b=-1,15$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 — проверки ✓

$a,\ b=aq,\ c=aq^2,\ x=aq^3;\ ax^2+2bx+c=0$

$a\cdot a^2q^6+2aq\cdot aq^3+aq^2=0$

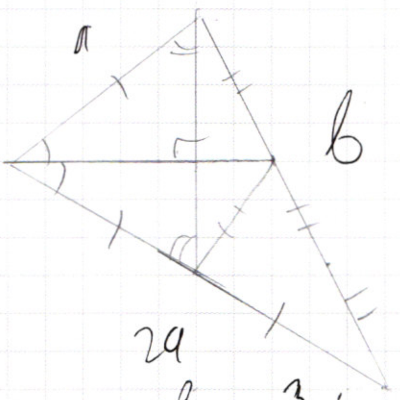
$a^3q^6+2a^2q^4+aq^2=0$

$a^2q^4+2aq^2+1=0$

$c^2+2c+1=0$

$c=-1$

№2 — проверка



$1200=3a+b$

$b<3a$

$2a=a+b$

$a<b$

$3a$	b верх. грань		$3a$	b нижн. грань
600	600	>	900	300

$\cancel{300:3=100}-1=99$

b	$3a$	a
450	750	250
303	897	299

b	$3a$	a
597	603	201

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3 – проверка ✓

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y-2x=\sqrt{x(y-2)-(y-2)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=a \\ y-2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-4ab+4a^2=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^2-5ab+b^2=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$$

$$D=25b^2-16b^2=9b^2$$

$$a=\frac{5b\pm 3b}{8}$$

$$\left[\begin{aligned} a&=b \\ a&=\frac{b}{4} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} b^2+2b^2&=3 \\ b^2+\frac{b^2}{8}&=3 \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} b^2&=1 \\ \frac{9b^2}{8}&=3 \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} b&=\pm 1 \\ b^2&=\frac{8}{3} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} b&=\pm 1 \\ b&=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}\right.$$

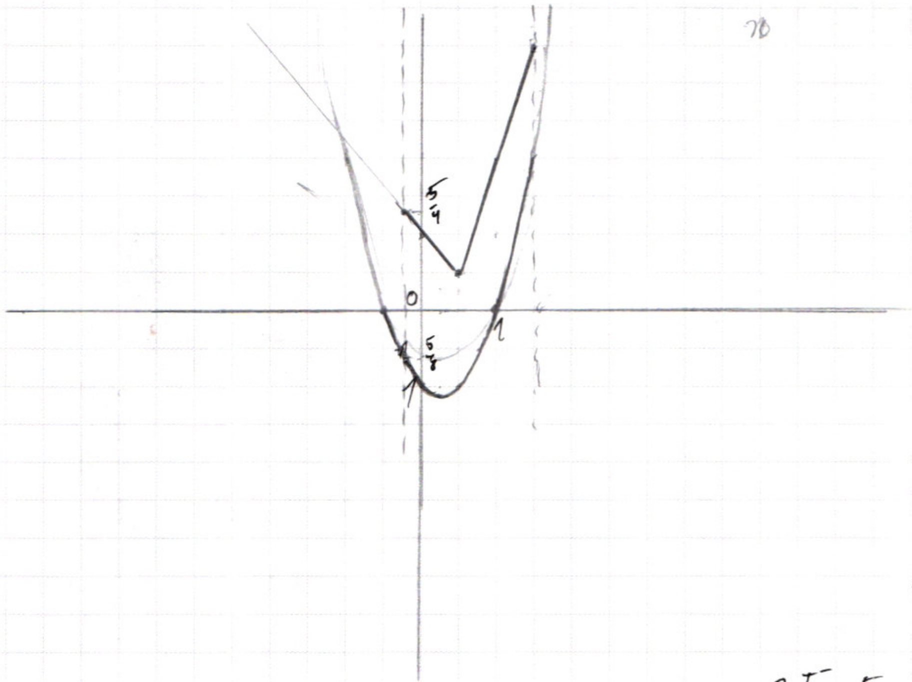
$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x-1=y-2 \\ y-2=1 \end{cases} \\ &\begin{cases} x-1=y-2 \\ y-2=-1 \end{cases} \\ &\begin{cases} x-1=y-2 \\ y-2=\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ &\begin{cases} x-1=y-2 \\ y-2=-\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \end{aligned}\right. \\ ab\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} ✓ \\ &\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} ✓ \\ &\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{6}}{3}+1 \\ y=\frac{2\sqrt{6}}{3}+2 \end{cases} ✓ \\ &\begin{cases} x=-\frac{2\sqrt{6}}{3}+1 \\ y=-\frac{2\sqrt{6}}{3}+2 \end{cases} \times \end{aligned}\right. \\ ab\geq 0 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№ 6/2

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$



$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{4} = -\frac{9}{8}$

$2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -1$

$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{8}$

$2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{5}{4} - 1 = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$

$= \frac{25}{8} - \frac{9}{4} = \frac{7}{8}$

$\cancel{ax+b}\begin{cases} \frac{a}{4} + b = [-\frac{5}{8}; \frac{5}{4}] \\ \frac{3a}{2} + b = [2; \frac{7}{2}] \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{a}{4} + b = -\frac{5}{8} \\ \frac{3a}{2} + b = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} a + 4b = -\frac{5}{2} \\ 3a + 2b = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a = -\frac{5}{2} - 4b \\ -\frac{15}{2} - 12b + 2b = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a = -\frac{5}{2} - 4b \\ 10b = -\frac{23}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} a = -\frac{5}{2} + \frac{23}{5} = \frac{46}{10} - \frac{25}{10} = \frac{21}{10} \\ b = -\frac{23}{20} \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

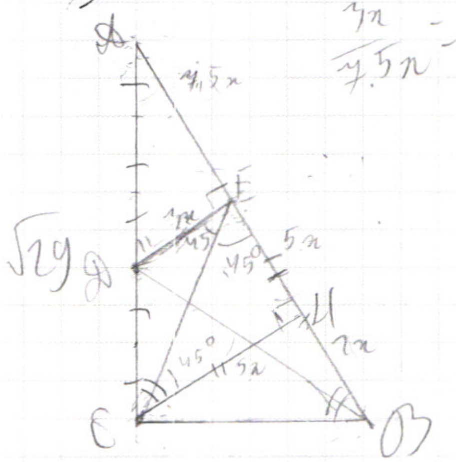
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 - проверка



$\frac{7x}{17,5x} = \frac{1}{2,5} = \frac{2}{5} = 0,4$

$\frac{\sqrt{29} \cdot 0,4 \cdot \sqrt{29}}{2} =$

$7,5x^2$

$14,5x = \sqrt{29 + 0,16 \cdot 29}$

$16 \cdot 29 = 144 + 32 = 464$

$33,64 \,|\, 2$

$16,82 \,|\, 2$

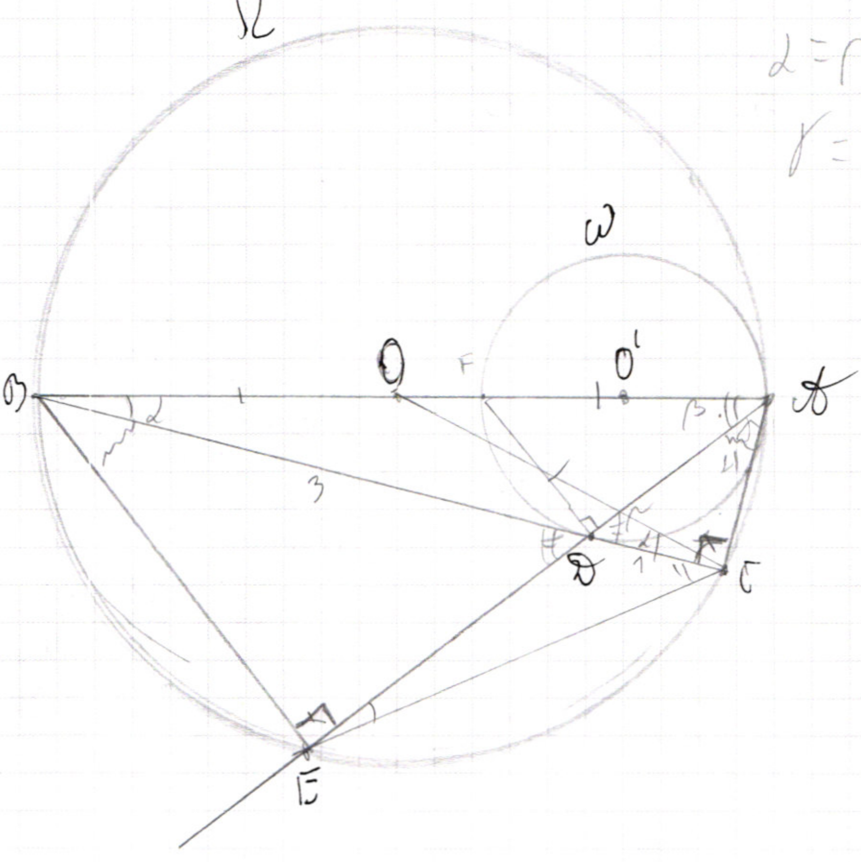
$8,41$

$29 \cdot 29 = 261 + 58 = 841$

№5

$\alpha = \varphi - \beta$

$\gamma = 90 - \alpha - \beta$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 $f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = [p/2]$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)