МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

$\Rightarrow$ т.к. $b \ge \frac{23}{28}$, а $a+2b \le 1 \Rightarrow a \le 1-\frac{23}{14} \le -\frac{9}{14}$

$a\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right) \ge 2-\frac{5}{8} \Rightarrow \frac{7}{4}a \ge \frac{11}{8} \Rightarrow a \ge \frac{11}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{11}{14}$

$\Rightarrow$ решим: $a\cdot\frac{3}{2}+b+\frac{1}{4}a-b \ge 2+\frac{5}{8} \Rightarrow \frac{7}{4}a \ge \frac{21}{8} \Rightarrow a \ge \frac{3}{2}$

, $\cancel{a\cdot\frac{1}{2}+b - \frac{1}{2}a+2b}$

$a\cdot\frac{3}{2}+b$ $*$ $a\cdot\frac{3}{2}+6b \ge 2+-\frac{5}{8}\cdot 6 = 2+-\frac{15}{4} = -\frac{7}{4}$

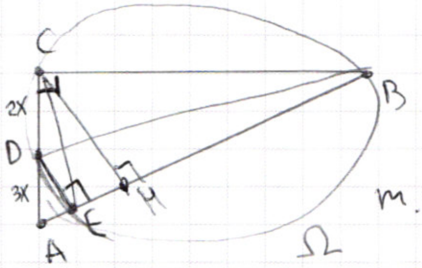
$7b \ge -\frac{7}{4} \Rightarrow b \ge -\frac{1}{4} \Rightarrow$

$a\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \le \frac{1}{2} \Rightarrow a \le \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{9}{4}+b \ge 2 \Rightarrow b \ge -\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}+b \le \frac{1}{2} \Rightarrow b \le -\frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$

Ответ: $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{4}$.

№ 8.4.



а) $tg\angle BAC = ?$, $\angle CED = 45°$, $\angle ACB = 90°$

Пусть $AD = 3x \Rightarrow AC = 5x \Rightarrow DC = 2x$

т.к. $\angle DEB = 90° \Rightarrow$ построим окр. Ω с диам. DB и тогда $E \in \Omega$, а т.к. $\angle DCB = 90° \Rightarrow C \in \Omega$, $B \in \Omega$

т.к. $\triangle DEB$-прямоуг. $\Rightarrow EB^2+DE^2=DB^2$, а т.к. $\triangle DCB$-прямоуг $\Rightarrow DB^2 = DC^2+CB^2$

т.к. $\triangle ABC$ - прямоуг. $\Rightarrow CB^2+AC^2=AB^2$, т.к. $\triangle DAE$-прямоуг $\Rightarrow DA^2 = AE^2+ED^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} EB^2+DE^2=DB^2 \\ 4x^2+CB^2=DB^2 \\ CB^2+25x^2=(AE+EB)^2 \\ 9x^2=AE^2+ED^2 \end{cases}$$

также по т. кос.

$4x^2 = DE^2+CE^2-2\cdot DE\cdot CE\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

т.к. $\angle DEB = 90°$, $\angle DEC = 45° \Rightarrow \angle CEB = 45°$

$\Rightarrow CE$ - бисс. прям. тр-а DEB

По ~~св-ве~~ св-ам прямых пер. пр окр-ть $\cancel{9x^2}$ $6x^2 = AE\cdot AB$

т.к. $tg\, BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \Rightarrow \frac{BC}{5x} = \cancel{\frac{DE}{3x}}\ \frac{DE}{AE}$

а т.к. по т-ме кос.

$\Rightarrow \frac{BC}{5x} = \frac{DE}{6x^2}\cdot AB = \frac{DE}{6x^2}\cdot\sqrt{25x^2+BC^2}$

$4x^2 = DE^2+CE^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}DE\,CE$,

т.к. $\angle DEC$ опирается

$25x^2 = AE^2+CE^2+2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot AE\,CE$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\mathcal{A}$

№6.

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$ a, b ? для всех $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

① ②

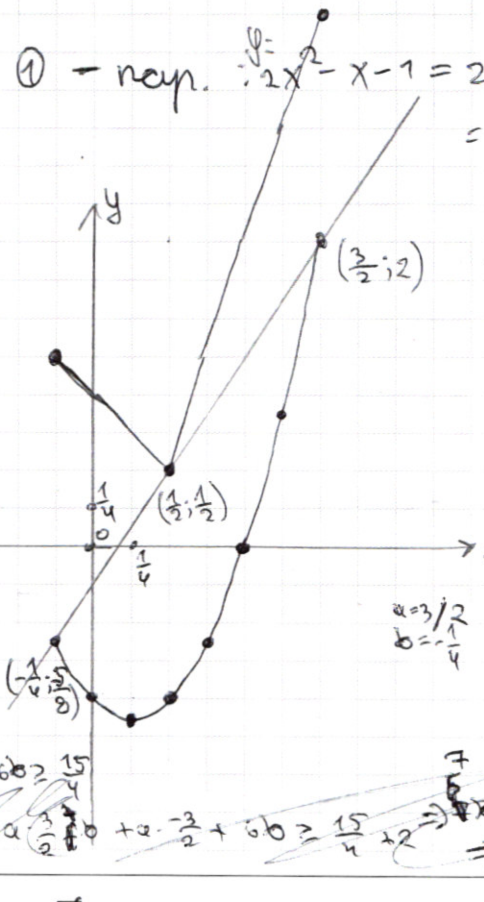
построим на гр-е

① – пар. $y = 2x^2 - x - 1 = 2\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) - \cancel{\frac{1}{16}}$ $-\frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$ $1 - \frac{1}{8}$

$= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$

② $x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3x - 1$

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 - x$



т.к. парабола непрерывна на $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

⇓

нужно быть выше ее кр точек.

$\Rightarrow$ нам нужно, чтобы

если $\cancel{ax+}$ $y(x) = ax + b$

$y\left(-\frac{1}{4}\right) \ge \frac{5}{8}$

$y\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2}$

$y\left(\frac{3}{2}\right) \ge 2$

⇓

$a = 3/2$
$b = -\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} a \cdot -\frac{1}{4} + b \ge \frac{5}{8} \\ a \cdot \frac{1}{2} + b \le \frac{1}{2} \\ a \cdot \frac{3}{2} + b \ge 2 \end{cases}$$

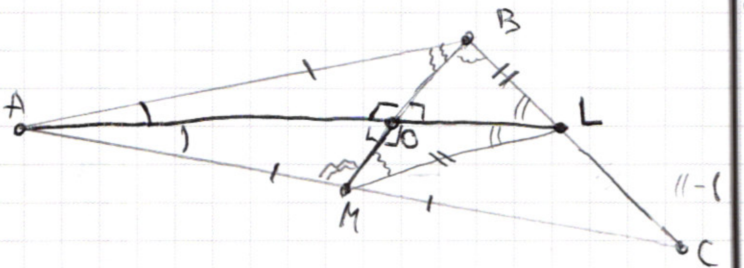
$\Rightarrow$ ~~$6b\ a \cdot -\frac{3}{2} + 6b \ge \frac{15}{4}$~~

~~$\Rightarrow b \ge a \cdot \frac{3}{2} + b + a \cdot -\frac{3}{2} + 6b \ge \frac{15}{4} + 2 \Rightarrow 7b \ge \frac{23}{4} \Rightarrow b \ge \frac{23}{28}$~~

~~$\Rightarrow a \le -\frac{9}{14}$~~

№2.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором биссектриса ⊥ медиане (кстати, и бисс. и мед. лежат внутри тр.)



обозначим мед. BM а бисс AL, а $BM \cap AL$ за O тогда т.к. $\angle BAO = \angle MAO$ по опр. бисс., а $\angle AOB = \angle AOM = 90°$ т.к. $AL \perp BM$, а AO – общ. ст. ⇒ Δ-и AOB и AOM – равны. ⇒ AB = AM,

OB = OM, т.к. (⊥) (Δ-и =)

$\angle LOB = \angle LOM$, OM = OB, а OL – общ. ⇒

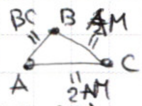
$\triangle OML = \triangle OBL$

⇒ BL = LM, $\angle LBO = \angle LMO$, а т.к. $\angle ABO = \angle AMO$

~~и $\angle ABL = \angle ABO + \angle LBO$, а $\angle AML = \angle LMO + \angle AMO$ ⇒ $\angle ABL = \angle AML$ ⇒~~

⇒ LM ∥ AB ⇒ т.к. $\frac{MC}{AM} = \frac{1}{2}$, то ML – ср. линия Δ ABC

⇒ $ML = \frac{1}{2}AB$, BL = LC ⇒ BC = AB ⇒ наш Δ-к



⇒ р/б Δ-к. в котором. AC = 2AB = 2BC (т.к. BC = AB = AM = $\frac{AC}{2}$)

⇒ по св-ам Δ-а
$$\begin{cases} AB+BC > AC \\ AB < AC+BC \\ AC < AB+BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2BC > AC \\ 0 < BC \\ 0 < BC \end{cases}$$
, но 2BC = AC ⇒ таких Δ-ов нету ⇒ 0

Ответ: 0.

т.к. $\angle ABC = 180° - \angle LAB - \angle ALB$, а $\angle BAC = 2\angle LAB$

⇒ $\angle ACB = 180° - (180° + \angle LAB - \angle ALB) = \angle ALB - \angle LAB$

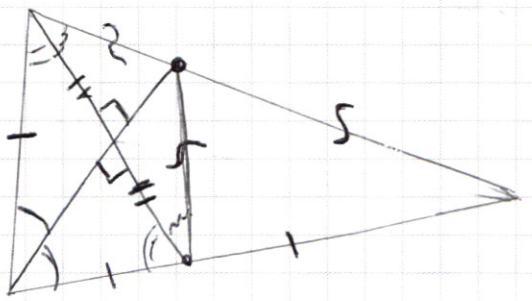
, а т.к. $\angle AML = \angle ABC$ ($\angle ABC = \angle ABO + \angle LBO = \angle AMO + \angle LMO = \angle AML$) $= 180° - \angle LAB - \angle ALB$

⇒ ⇒ $\angle LMC = 180° - \angle AML = \angle LAB + \angle ALB$ ⇒ $\angle MLC = 180° - \angle LMC - \angle MB = 180° - 2\angle LAB$

⇒ $\angle MLB = 2\angle LA$ ⇒ $\angle AAB = \angle ALB$ ⇒ AB = BL = LM = AM

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.



$S = \frac{1}{2} l \Rightarrow$ отн-е ст-н.

– |+| / l / S+S =

= l+l / l / l

$\Rightarrow$ р/б.

$\Rightarrow$ a, ~~в, с~~ в, в $\Rightarrow \begin{cases} 2в > a \\ в < a+в \\ в < a+в \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2в > a \\ 0 < a \end{cases}$

$2в + a = 3 \Rightarrow 400 = a$

$\Rightarrow a \neq 400$ X $в = 400$ X

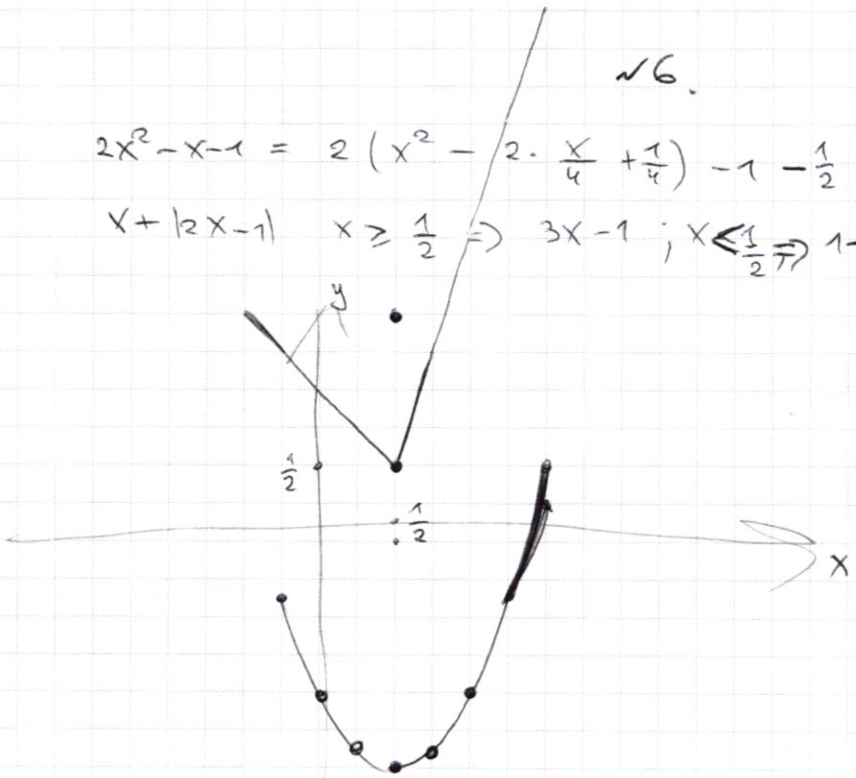
$\Rightarrow a = 1 \ldots 399$, но тогда т.к. $в = a/2$ $в = \frac{1,99}{2} \ldots$

$\Rightarrow a = 2 \ldots 398 \Rightarrow в = 599 \ldots 40R1$

№6.

$2x^2 - x - 1 = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) - 1 - \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$

$x + |2x - 1|$ $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 3x - 1$; $x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - x$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Если a - первый элемент геом. прогрессии, а b и c - второй и третий ~~и чл~~, то $b = aq$, $c = aq^2$ (обозначим знам. г.пр. за q)

$\Rightarrow$ т.к. четвертый член - корень уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$, то ~~также верно, что~~ так как $b = aq$ $c = aq^2$ он - корень ур-я

$ax^2 + 2aq\,x + aq^2 = 0$ $\exists a = 0$, тогда $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot qx + 0 \cdot q^2 = 0$ $\Rightarrow 0 = 0$ и корень x - $\forall$, но нам нужен конкретный корень $\Rightarrow$ это не ответ.

$\exists a \neq 0$, тогда разделим ур-е на a $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2qx + q^2 = 0$

$(x+q)^2 = 0 \Rightarrow x = -q$ - один корень.

$\Rightarrow$ четв. член геом. прогр $-q$, но также он aq^3

$\Rightarrow aq^3 = -q \Rightarrow a = \frac{-1}{q^2}$, а ~~т.к. третий член~~ ~~= aq^3~~ $\Rightarrow$

а т.к. $c = aq^2 \Rightarrow c = \frac{-1}{q^2} \cdot q^2 = -1$

Ответ: $c = -1$.

№3.

$$① \begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} ② \Rightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

О.Д.З.: чтобы под $\sqrt{\ }$ было пол.
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 2\end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq 2\end{cases}\end{array}\right.$$
чтобы $\sqrt{\ }$ = пол.
$y \geq 2x$

обозначим ур-я системы за это ① и ② и напишем для них область допустимых значений

ур-е ② ~~вы~~ является ур-ем окр-ти с центром в $(1;2)$ и сжатым по OX в $\sqrt{2}$ раз (отн. центра)

~~и с радиусом~~ обозначим $x-1$ за a, а $y-2$ за b

$$\Rightarrow \begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} & ① \\ 2a^2+b^2=3 & ② \end{cases}$$

т.к. в О.Д.З: мы учли, что $ab\geq 0$ и $b\geq 2a$

$\Rightarrow b^2-4ab+4a^2=ab \Rightarrow b^2-5ab+4a^2=0$

$\exists\, a=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ из ① $y=2$, а из ② $y=2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3} \Rightarrow$ нет реш. при $x=1$

$\Rightarrow a\neq 0 \Rightarrow$ разд. на $a^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}-\frac{5b}{a}+4=0$ $\quad \exists\, \frac{b}{a}=t$

$\Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow D=25-16=3^2 \Rightarrow t=\frac{5\pm 3}{2}=4,1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=a\end{array}\right.$

подставим в ② 1. $b=4a$ $\quad 2a^2+16a^2=3 \Rightarrow 18a^2=3 \Rightarrow a^2=\frac{1}{6} \Rightarrow a=\pm\frac{1}{6} \Rightarrow b=\pm\frac{2}{3}$

2. $b=a$ $\quad 2a^2+a^2=3 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow b=\pm 1$

$\Rightarrow$ 1. $x-1=\pm\frac{1}{6},\ y-2=\pm\frac{2}{3} \Rightarrow$ ~~x=~~ такие р-ия:
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\frac{7}{6} \\ y=\frac{8}{3}\end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{5}{6} \\ y=4/3\end{cases} \\ \{x=2,\ y=3 \\ \{x=0,\ y=1\end{array}\right.$$

2. $x-1=\pm 1,\ y-2=\pm 1 \Rightarrow$

, а т.к. по ОДЗ:
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 2\end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq 2\end{cases}\end{array}\right. \\ y\geq 2x\end{cases}$$

$\begin{cases} x=\frac{5}{6} \\ y=4/3\end{cases}$ — не подх. $(y<2x)$

$\begin{cases} x=2 \\ y=3\end{cases}$ — не подх. $(y<2x)$

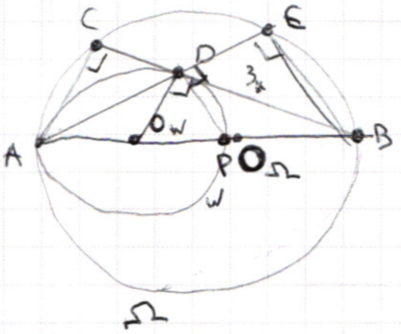
$\Rightarrow$ подходят только $\left[\begin{array}{l}\{x=0,\ y=1 \\ \begin{cases} x=\frac{7}{6} \\ y=\frac{8}{3}\end{cases}\end{array}\right.$ и это — решение

Ответ: 1-е реш: $x=0,\ y=1$; 2-е реш: $x=\frac{7}{6},\ y=8/3$.

№5.

$r_\Omega, r_w = ?$ $S_{BACE} = ?$ $CD=1, BD=3$

т.к. у ~~этих~~ окр., кас. друг. изн. ~~прямые~~, сод. диаметры совпадают



⇒ центр малой O_w и центр большей $O_\Omega \in AB$ (мы их так обозн.),

также ∃ второе пер. w с AB — P

т.к. BD — кас. к w ⇒ $BD = BP \cdot BA$, т.к. $C \in \Omega$, а AB-диам,

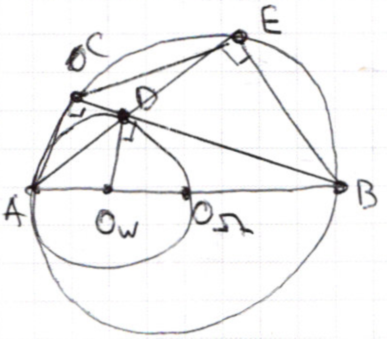
⇒ $\angle ACB = 90°$, а т.к. BD — кас к w ⇒ $BDO_w = 90°$

⇒ т.к. $\angle ABC$ — общ. ⇒ $\sim$ ⇒ $BO_w/BA = BD/BC = \frac{3}{4}$

⇒ $r_w = AO_w = \frac{1}{4} BA$ ⇒ $AP = \frac{1}{2} BA$ ~~⇒ т.к. $D \in w$ ⇒ $\angle ADP = 90°$, а т.к. $E \in \Omega$ ⇒ $\angle AEB = 90°$ ⇒ т.к. $\angle A$ - общ., то $\triangle ADP \sim \triangle AEB$ ⇒ $\frac{1}{2} = \frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AE}$~~, а т.к. $BD^2 = BA \cdot BP = \frac{1}{4} BA^2$

⇒ $9 \cdot \frac{4}{3} = BA^2 = \cancel{12}\ 36$ ⇒ $BA = \cancel{2\sqrt{3}}\ 6$ ⇒ $r_\Omega = \cancel{\sqrt{3}}\ 3$ ⇒ $r_w = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \frac{3}{2}$

⇒ т.к. $DO_w = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $CA = \cancel{\frac{4}{1} \cdot DO_w}$ $\frac{4}{3} \cdot DO_w = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



P и O совп. (т.к. $r_w = \frac{1}{2} r_\Omega$), т.к. $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$ ⇒ $\frac{DO}{EB} = \frac{1}{2}$, $\frac{AD}{AE} = \frac{1}{2}$

⇒ $2DO = EB$, $2AD = AE$

$AD^2 + DO^2 = 3$

$AE^2 + EB^2 = 12$ ⇒ $4AD^2 + 4DO_\Omega^2 = 12$

т.к. $\cos \angle OBD = \frac{DB}{O_\Omega B} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ⇒ $DO^2 =$

$= O_\Omega B^2 + BD^2 - 2\cos\angle O_\Omega BD \cdot O_\Omega B \cdot BD = 3 + 9 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$= 6$ ⇒ $EB = 2\sqrt{6}$ т.к. $DO = \sqrt{6}$ ⇒ $AD^2 <$

⇒ $\cos \angle DOB = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $\angle DEC = 45^\circ$, опирается на DC, а $\angle DBC$ тоже опирается (т.к. $\angle DCB = 90^\circ$) на $DC \Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45^\circ \Rightarrow BC = \cancel{ctg}\, DC = 2X \Rightarrow tg\angle BAC =$

$= \frac{2X}{5X} = \frac{2}{5}$ ~~AC=~~

~~б) $AC = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5} \Rightarrow BC = \sqrt{29}\cdot\frac{2}{5} \Rightarrow S = \frac{BC\cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{29}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{29}}{2} = \frac{29}{5}$~~

~~Ответ: а) $tg(\angle BAC) = \frac{2}{5}$, б) $\sqrt{8}$~~

т.к. $AC = \sqrt{29} \Rightarrow BC = \frac{2\sqrt{29}}{5} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{29}^2\cdot\frac{2}{5}}{2} = \frac{29}{5}$, а т.к.

$AB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{29}\cdot 2}{5}\right)^2 + \sqrt{29}^2} = \frac{\sqrt{29\cdot 4 + 29\cdot 25}}{5} = \frac{29}{5} \Rightarrow CH = \frac{2S}{AB} =$

$= \frac{\frac{29}{5}\cdot 2}{\frac{29}{5}} = 2 \Rightarrow$ т.к. $\triangle AHC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{DE}{CH} = \frac{3X}{5X} \Rightarrow$

$DE = \frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{6}{5} \Rightarrow$ ~~CE~~

по т-ме кос: $CE^2 + \frac{36}{25} - CE\cdot\frac{6}{5}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\cdot 29}{25} \Rightarrow$

$CE^2 - CE\cdot\frac{6\sqrt{2}}{5} - \frac{80}{25} = 0 \Rightarrow D = \frac{72}{25} + \frac{4\cdot 80}{25} = \frac{392}{25}$ $\quad 392 = 2\cdot 196 = 2\cdot 16^2$

$\Rightarrow CE = \frac{\sqrt{392}}{5} \Rightarrow S_{CED} = \frac{\sin 45^\circ\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{\sqrt{392}}{5}}{2} = \frac{6\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{392}}{25\cdot 4} =$

$= \frac{6\cdot 2\cdot 16}{25\cdot 4} = \frac{48}{25}$

Ответ: а) $tg(\angle BAC) = \frac{2}{5}$

б) $S_{CED} = \frac{48}{25}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)