

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть q - знаменатель геометрической прогрессии, тогда
 $b = qa$, $c = q^2a$, $d = q^3a$.

Найдем корни уравнения: $ax^2 + bqx + c = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-qa \pm \sqrt{q^2a^2 - 4q^3a^2}}{2a} = -q$$

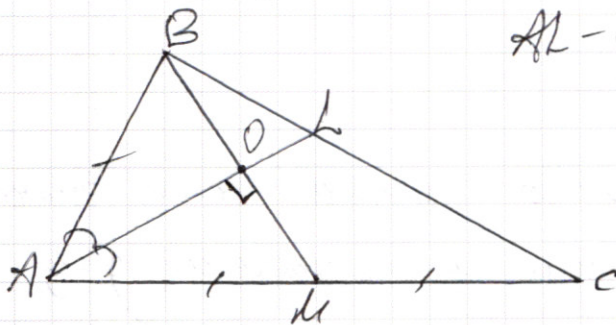
Мы получим: $d = q^3a = -q \Rightarrow a = \frac{-1}{q^3}$

Третий член прогрессии: $c = q^2a = -1$.

Ответ: -1 .

2. 1) Докажем, что в треугольнике одна из биссектрис
 была перпендикулярна одной из медиан, необходимо и
 достаточно, чтобы были два смежных угла, один из которых
 в два раза больше другого.

Док-во необходимости:



AL - бис-са $\angle BAC$, BM - медиана
 к AC

$$BM \perp AL.$$

$$BM \cap AL = O.$$

$$\angle AOM = \angle AOB = 90^\circ$$

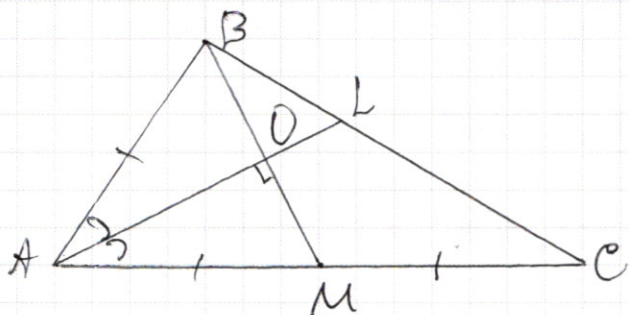
$$\angle OAM = \angle BAO$$

AO - общая

$\Rightarrow \triangle ABO \cong \triangle AMO$ по катету и острому
 углу $\rightarrow AM = AB$

$$AB = \frac{1}{2} AC = AM, \text{ что и требовалось.}$$

Док-во достаточности:



$$\triangle ABC \quad AB = \frac{1}{2} AC.$$

Проведем BM - медиану к AC , AL - биссектрису $\angle BAC$.

$$AB = AM$$

$$\angle BAO = \angle MAO$$

AO - общая

$$\Rightarrow \triangle ABO = \triangle AMO \Rightarrow \angle BOA = \angle MOA = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

что и требовалось

2) Пусть стороны нашего треугольника a, x, y .
 $x, y \in \mathbb{Z}$. По неравенству треугольника:

$$\begin{cases} 3x > y \\ x + y > 2x \end{cases} \Rightarrow a < y < 3x$$

$$p = 3x + y = 1200$$

$$\begin{cases} 3x + x < 1200 \\ 3x + 3x > 1200 \end{cases} \Rightarrow 200 < x < 300$$

$$\Rightarrow 200 < x < 300$$

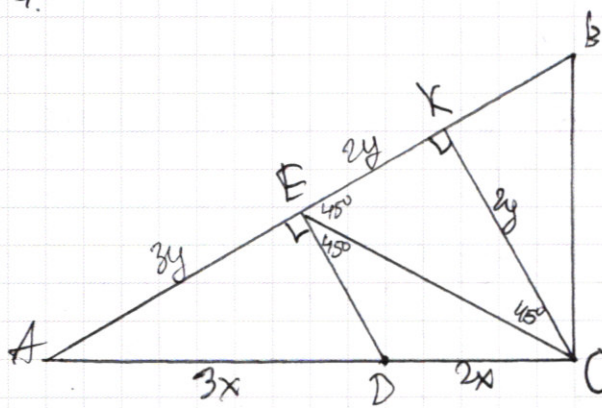
x	$2x$	y
201	402	597
...
299	598	303

Значения x из первого столбца меньше либо равно значению $2x$ из второго столбца и меньше либо равно значению y из третьего столбца, поэтому каждая строка чисел задает уникальный треугольник. Их кол-во: 99.

Ответ: 99.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$\triangle AED$ и $\triangle AKC$,

$$1) \left. \begin{array}{l} \angle AED = \angle AKC = 90^\circ \\ \angle BAC - \text{одн} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle AKC$ по двум углам

Обозначим $AD = 3x$, $DC = 2x$,
тогда $AB = 3y$, $EK = 2y$.

$$2) \angle CED = 45^\circ. \angle CEK = 90^\circ - \angle CED = 45^\circ.$$

$$\angle ECK = 90^\circ - \angle CEK = 45^\circ \Rightarrow \triangle CEK - \text{пр.б.} \Rightarrow EK = KC = 2y.$$

$$3) \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2y}{5y} = \frac{2}{5}.$$

$$4) AC = 5x = \sqrt{29}.$$

По th Пифаг для $\triangle AKC$: $25y^2 + 4y^2 = 25x^2$

$$29y^2 = 29 \Rightarrow y = 1.$$

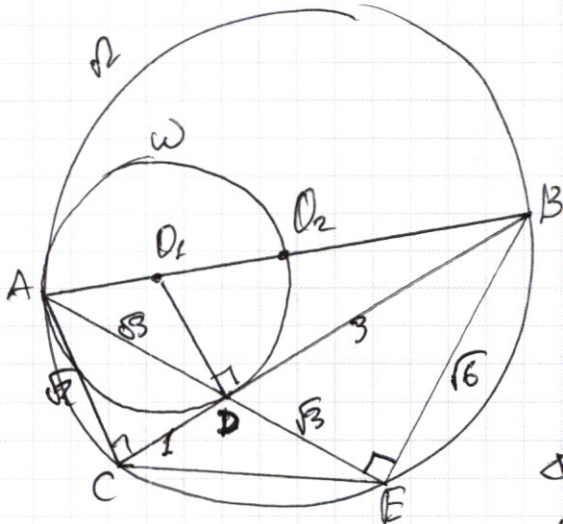
$$5) \triangle AED \sim \triangle AKC \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{ED}{3} \Rightarrow ED = \frac{6}{5}.$$

$$6) \text{ По th Пифаг. для } \triangle CEK: EC^2 = 8 \Rightarrow EC = 2\sqrt{2}.$$

$$7) S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} CE \cdot ED \cdot \sin \angle CED = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{5}.$$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$; д) $\frac{6}{5}$.

5.



1) O_1, O_2 - центры окр. ω и Ω .

BD - касательная к $\omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BDO_1 = 90^\circ$$

$\angle ACB = 90^\circ$, так опирается
на диаметр AB Ω .

Пусть R - радиус Ω , r - радиус ω

$\triangle ACB$ и $\triangle O_1DB$:

$$\angle ACB = \angle O_1DB = 90^\circ$$

$\angle ABC$ - общий

$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle O_1DB$
по двум углам

$$\triangle ACB \sim \triangle O_1DB \Rightarrow \frac{2R}{4} = \frac{2r-r}{3} \Leftrightarrow R = 2r.$$

Значит, ω проходит через O_2

2) $\triangle O_1DB$: По т. Пифагора для $\triangle O_1DB$:

$$r^2 + 9 = 9r^2 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}}. \text{ Тогда } R = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

3) $S_{BACE} = S_{ABC} + S_{CDE} + S_{BDE}$

$$\triangle ACB \sim \triangle O_1DB \Rightarrow \frac{AC}{4} = \frac{O_1D}{3} \Rightarrow AC = \sqrt{2}.$$

По т. Пифагора для $\triangle ACD$: $AD = \sqrt{3}$.

$\triangle ACD$ и $\triangle DBE$:

$\angle E = \angle C = 90^\circ$ как опираются на AB -диаметр Ω $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle DBE$.

$$\angle ADC = \angle BDE$$

$$\triangle ACD \sim \triangle DBE \Rightarrow \frac{BE}{AC} = \frac{DE}{CD} = \frac{BD}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BE = \sqrt{6}, DE = \sqrt{3}.$$

$\triangle ACE$: $AD = DE = \sqrt{3} \Rightarrow CD$ - медиана к AE . Медиана разбивает треугольник на два треугольника равной площади \Rightarrow

$$\Rightarrow S_{\triangle ACE} = S_{\triangle CDE}.$$

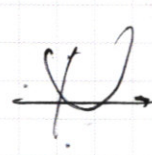
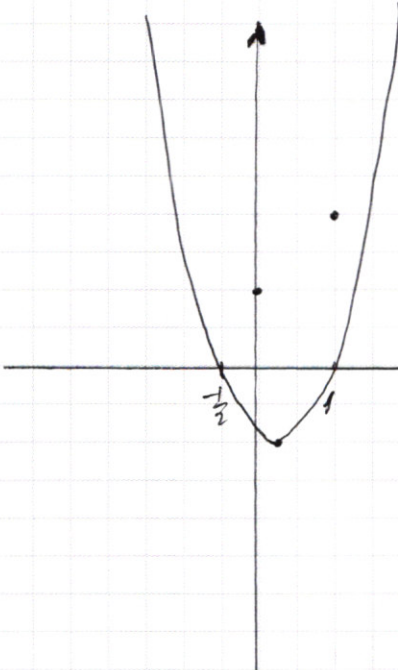
$$S_{BACE} = S_{ABC} + S_{\triangle ACD} + S_{BDE} = \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: радиус $\omega = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, радиус $\Omega = \frac{3}{\sqrt{2}}$. $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

$$d_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b = 2 \\ -\frac{1}{2}a + b = -\frac{5}{8} \\ \frac{6}{4}a + \frac{1}{2}b = 2\frac{5}{8} \end{cases}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 = -1 \quad \frac{7}{2}a = 2\frac{5}{8}$$

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = 8 - 3 = 5$$

$$a = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$b = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{8} - 1 = -1 - \frac{1}{8}$$

$$\frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1$$

$$\frac{-b}{4a} = \frac{-\frac{1}{4}}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1$$

$$4.5 - 1.5 = 3$$

$$2+3$$

$$3+5$$

$$-1+3$$

$$-2+3$$

$$\frac{(2-6)^2}{3} \leq a \leq 1-2b$$

$$4-2b \leq 3-6b$$

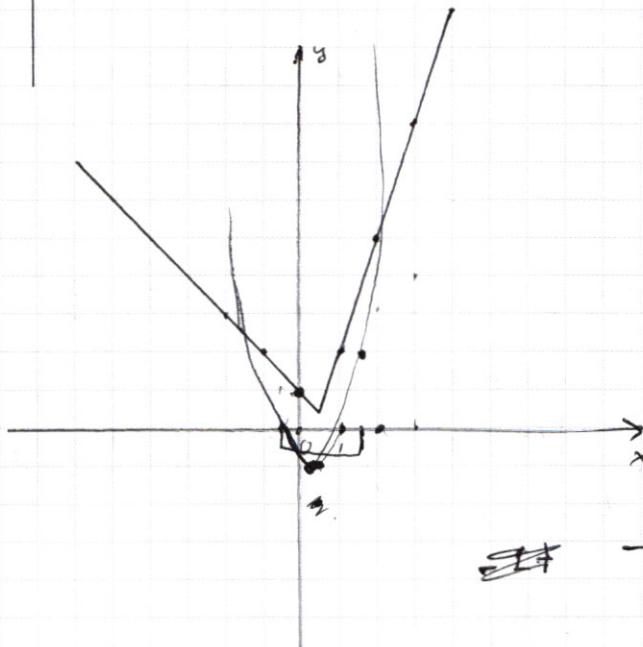
$$4b \leq -1$$

$$b \leq -\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x \geq \frac{1}{2} \quad 3x-1$$

$$x < \frac{1}{2} \quad -x+1$$



$$-\frac{1+8}{8} = -\frac{9}{8}$$

$$\frac{2}{16} + \frac{1}{4} - 1$$

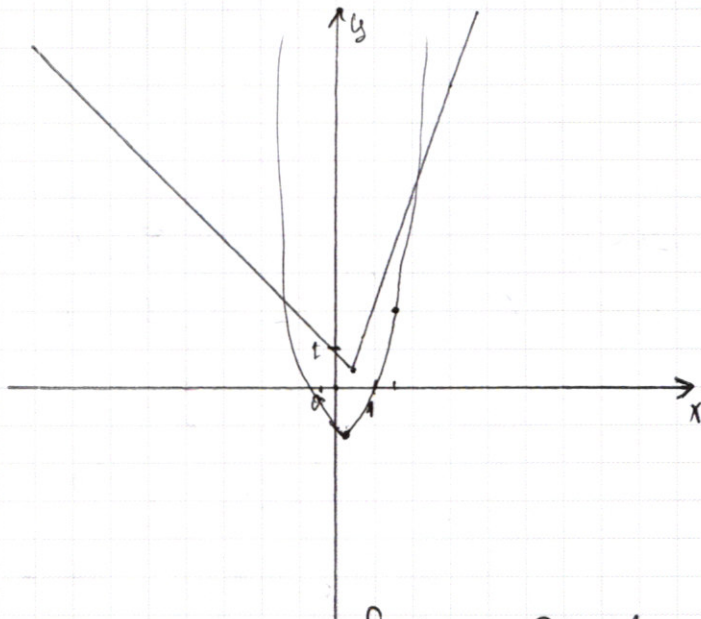
$$\frac{2}{16} + \frac{1}{4} - 1$$

$$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} - 1$$

$$-\frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$$

6



$$f(x) = a + |cx - d| = \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, & 3x - 1 \\ x < \frac{1}{2}, & -x + 1 \end{cases}$$

$g(x) = 2x^2 - x - 1$ - параболы ветви вверх

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{— точки } g(x) = 0$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = 2$$

$x_0 = \frac{1}{4}$ - координата центра вершины параболы.

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8}$$

Наименьшее значение $f(x)$ на $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$: $f(x) = \frac{1}{2}$, при $x = \frac{1}{2}$. Наибольшее значение $g(x)$ на $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$,

$g(x) = 2$ при $x = \frac{3}{2}$. Наша прямая $ax + b$ должна

удовлетворять: $\begin{cases} \frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2} & (1) \\ \frac{3}{2}a + b \geq 2 & (2) \\ -\frac{1}{4}a + b \geq -\frac{5}{8} & (3) \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b \geq 2 & (2) \\ -\frac{1}{4}a + b \geq -\frac{5}{8} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + b \geq -\frac{5}{8} & (3) \end{cases}$$

Из (2) и (3) следует, что на интервале $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ наша прямая $g(x) = ax + b$ должна лежать выше прямой, проведенной через $(\frac{3}{2}; 2)$ и $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ или совпадать с ней.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чтобы соединить уравнения (2) и (3), рассмотрим "самую
нижнюю" прямую, которая удовлетворяет (2) и (3). То есть
проведем прямую через $(\frac{3}{2}; 2)$ и $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$.

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b = 2 \\ -\frac{1}{4}a + b = -\frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Найдем значение, принимаемое b т. $a = \frac{1}{2}$:

$$b = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Из условия (1) $\frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2}$, а мы для нашей прямой
имеем $y(x) = \frac{1}{2}$. Значит, такая пара (a, b) - единственная.

Ответ: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$.

$$3. \begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ (y - 2x)^2 = (x - 1)(y - 2) \\ (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 + (y - 2)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ (y - 2x)^2 = (x - 1)(y - 2) \\ 2(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3 \end{cases}$$

Заменим, $a = x - 1$, $b = y - 2$. $y - 2x = b - 2a$. $b \geq 2a$

$$\begin{cases} (b - 2a)^2 = ab \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 4a^2 - 5ab = 0 \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - ab + 4a^2 - 4ab = 0 \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b(b - a) + 4a(a - b) = 0 \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)(4a - b) = 0 \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \leftarrow \text{не подходит} \\ b = 4a \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ 2a^2 + 16a^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ a = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-2)^2 + (y-2)^2 = 3 \\ y \geq 2x \\ y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2 \\ (y-2x)^2 = (x-1)(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \\ (y-2x)^2 = (x-1)(y-1) \\ y \geq 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 3 \\ ab = (b-2a)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a^2 + b^2 = 3 \\ ab = b^2 + 4a^2 - 4ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 3 \\ b^2 + 4a^2 - 5ab = 0 \end{cases} \quad 3 + 2a^2 - 4ab = ab$$

$$3 = -2a^2 + 5ab$$

$$\begin{cases} (b-2a)^2 = ab \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 + 4a^2 - 4ab = ab \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases}$$

$$b^2 + 4a^2 = 5ab$$

$$3 + 2a^2 = 5ab$$

$$2a^2 - 5ab + 3 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{5b \pm \sqrt{25b^2 - 24}}{4}$$

$$b^2 - ab + 4a^2 - 4ab = 0$$

$$b^2(b-a) + 4a(a-b) = 0$$

$$(a-b)(4a-b^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ b^2=4a \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Обратная замена: $x = a + t = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$
 $y = b + 2 = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$
Ответ: $(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}; 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3})$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$b = qa, c = q^2a, d = q^3a = -q \Rightarrow a = \frac{1}{q^2}$$

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{-qa \pm \sqrt{q^2a^2 - q^2a^2}}{a} = -q$$

$$c = q^2a = \frac{1}{q^2} \cdot q^2 = -1$$



$$\begin{cases} 3x + y = 1200 \\ 3x > y \\ a + y > 2x \end{cases}$$

$$8x + y = 1200$$

$$3x > y > 2x$$

$$y > x$$

~~$$y + 2x > 2x$$~~

~~$$1200 = 3x + y < 6x$$~~

~~$$6x > 1200$$~~

~~$$x > 200$$~~

~~$$1200 = 8x + y > 4x$$~~

~~$$4x < 1200$$~~

~~$$x < 300$$~~

~~$$x = 200, 2x = 400, y = 597$$~~

~~$$x = 299, 2x = 598, y = 303$$~~

~~$$x = 249, 2x = 498, y =$$~~

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

$$1: \begin{cases} y-2x \geq 0 \\ xy-2x-y+2 = y^2+4x^2-4xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

~~$$4x^2+4x^2$$~~

$$y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}$$

$$y-2x = \sqrt{x(y-2)-(y-2)} = \sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$\begin{cases} y \geq 2x \\ (x-1)(y-2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ y-2 \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \\ y-2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \\ x \leq 1 \\ y \leq 2 \\ y \geq 2x \end{cases}$$

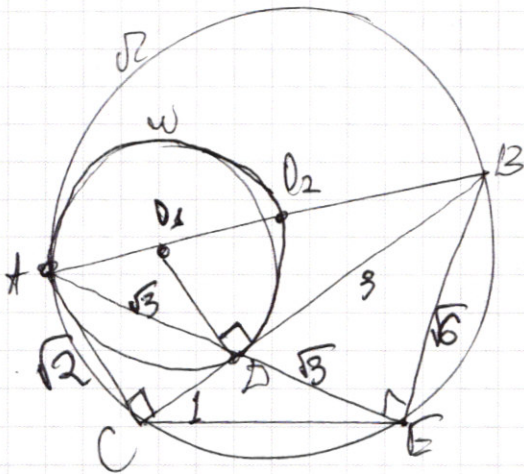
$$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2 \geq 0$$

~~$$y^2-xy+4x^2+4x^2-4xy+2x-2 \geq 0$$~~

$$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$$

~~$$2x^2$$~~
$$(y-4y+4) + 2x^2-4x = 1$$

$$(y-2)^2 = 4x-2x^2+1$$

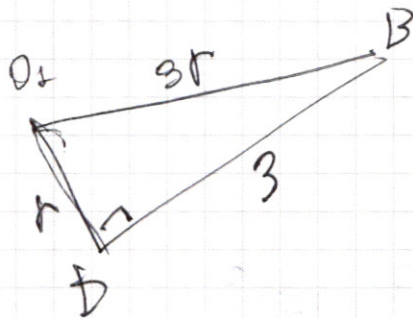


$$\frac{2R}{4} = \frac{2R-r}{3}$$

$$6R = 2R - 4r$$

$$2R = 4r$$

$$R = 2r$$



$$r^2 + 9 = 9r^2$$

$$8r^2 = 9 \Rightarrow$$

$$r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$R = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

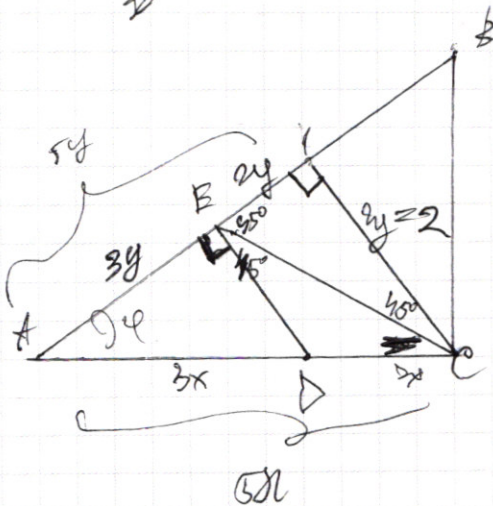
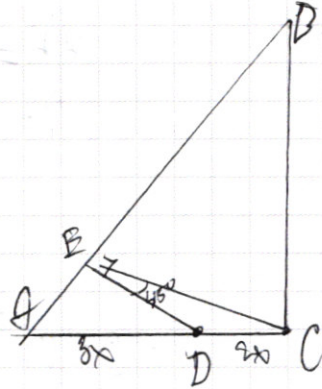
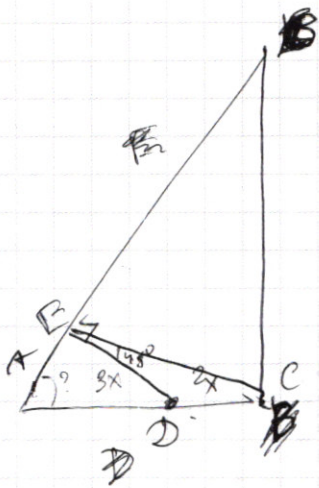
$$\frac{AC}{4} = \frac{O_1D}{3}$$

$$\frac{AC}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad AC = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$S_{BACE} = S_{ABC} + S_{CDE} + S_{BDE}$$

$$= \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{8}}{2} = \cancel{2\sqrt{2}} \quad 2\sqrt{2} + 1.5\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$25y^2 + 4y^2 = 25x^2$$

$$29y^2 = 25x^2$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{CK}{AK} = \frac{2}{5}$$

$$5x = \sqrt{29}$$

$$29y^2 = 25 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{2}{5} = \frac{ED}{3} \Rightarrow ED = \frac{6}{5}$$

$$EC^2 = 2 \Rightarrow EC = \sqrt{2}$$

$$S_{EDC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{6}{5} \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$$