МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Пусть числа a, b, c являются членами геометрической прогрессии b_n с шагом q. Тогда из условия следует, что $b_1 = a$, $b_2 = b$, $b_3 = c$. Пусть $b_4 = d$, тогда по условию d - корень уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Формула геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, тогда:
$b_1 = a$; $b_2 = b_1 \cdot q = b$; $b_3 = b_1 \cdot q^2 = c$; $b_4 = b_1 \cdot q^3 = d$. Отсюда получим, что $c \cdot q = b_1 \cdot q^3 = d$, $\frac{c}{q} = b$ ($q \neq 0$ по определению геометрической прогрессии). $\frac{c}{q^2} = a$.

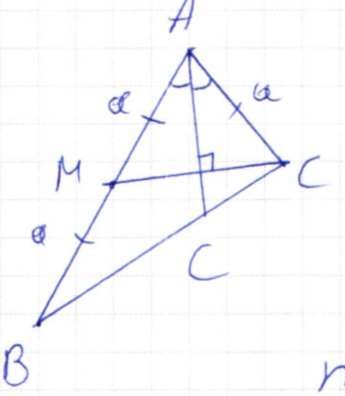
Т.к. $d = c \cdot q$ является корнем уравнения $ax^2+2bx+c$, то при его подстановке вместо x, получим верное равенство:
$\frac{c}{q^2} \cdot c^2 q^2 + 2 \cdot \frac{c}{q} \cdot c \cdot q + c = 0$; $c^3 + 2c^2 + c = 0$;
$c(c+1)^2 = 0$ $\left[\begin{array}{l} c = -1 \\ c = 0 - \text{не подходит, т.к. тогда } b_1 = 0 \end{array}\right.$

Ответ: $c = -1$

Задача №2

Заметим, что любой треугольник, у которого есть хотя бы одна сторона, которая в два раза больше одной из сторон, удовлетворяет условию, что одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан. Докажем, это:

Пусть дан $\triangle ABC$, у которого $AB=2AC$:



Пусть M - середина AB. Тогда $AM=MB=AC$. Значит $\triangle AMC$ - равнобедренный, и его биссектриса, т.е. биссектриса угла A $\triangle ABC$, перпендикулярна MC - медиане $\triangle ABC$. Найдем кол-во таких треугольников. Пусть $AC=a$, $BC=c$, тогда

$a+2a+c=1200$; $3a+c=1200$

~~Пусть $c<a\cdot 2$, тогда~~ по неравенству треугольника $a+c>2a$, а также $a+2a>c$, т.е. $c>a$, и $c<3a$.

Т.к. $3a+c=1200$, а также т.к. $c>a$ и $c<3a$, получим:

$3a+c>a+3a$, $1200>4a$; $300>a$.

$3a+c<3a+3a$, $1200<6a$; $200<a$

Значит $\begin{cases} a<300 \\ a>200 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. $a \in Z$, и $\begin{cases} a < 300 \\ a > 200 \end{cases}$ то возмож

ных возможных значений a — 99,

это 201, 202, ... ~~303, 304~~ 298, 299.

Значит и количество таких треугольников равно 99

Ответ: 99

Задача №4

Дано:

$\angle C = 90^\circ$

$AD : AC = 3 : 5$

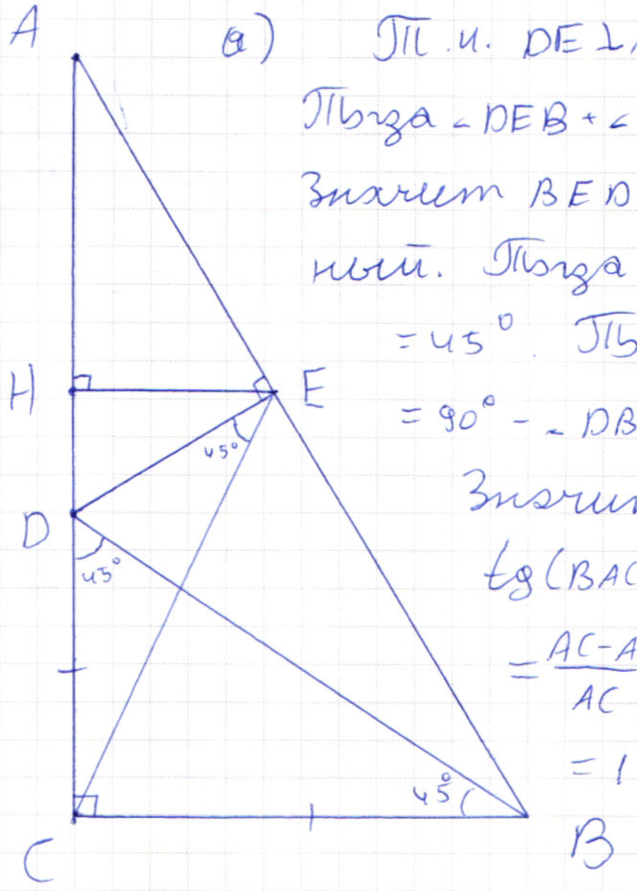
$DE \perp AB$

$\angle CED = 45^\circ$

а) $tg(BAC)$ — ?

б) $AC = \sqrt{29}$, $S_{\triangle CED}$ — ?

Решение:



а) Т.к. $DE \perp AB$, $\angle DEB = 90^\circ$.

Тогда $\angle DEB + \angle ACB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Значит $BEDC$ — вписанный. Тогда $\angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$. Тогда $\angle BDC = 90^\circ - \angle DBC = 45^\circ$.

Значит $CD = BC$.

$tg(BAC) = \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{AC} = \frac{AC - AD}{AC} = 1 - \frac{AD}{AC} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

б) Пусть $H \in AC$, и $EH \perp AC$.

Тогда $S_{\triangle CED} = \dfrac{EH \cdot CD}{2}$

$tg(BAC) = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{2}{5}$; $CD = \dfrac{2}{5} AC = \dfrac{2}{5}\sqrt{29}$.

$AD = AC - CD = \sqrt{29} - \dfrac{2}{5}\sqrt{29} = \dfrac{3}{5}\sqrt{29}$.

Рассмотрим $\triangle AED$. $tg(BAC) = \dfrac{ED}{AE} = \dfrac{2}{5}$

По теореме Пифагора: $ED^2 + AE^2 = AD^2$.

$\left(\dfrac{2}{5}AE\right)^2 + AE^2 = \left(\dfrac{3}{5}\sqrt{29}\right)^2$; $\dfrac{\cancel{29}}{\cancel{25}} AE^2 = \dfrac{9}{\cancel{25}} \cdot \cancel{29}$;

$AE = 3$, значит $DE = \dfrac{2}{5} AE = \dfrac{6}{5}$.

$HE = \dfrac{AE \cdot DE}{AD}$ – формула высоты для прямоугольного треугольника. Тогда:

$HE = \dfrac{3 \cdot \frac{6}{5}}{\frac{3}{5}\sqrt{29}} = \dfrac{18 \cdot \cancel{5}}{3\sqrt{29}} = \cancel{\dfrac{30}{\sqrt{29}}} = \cancel{\dfrac{6}{\sqrt{29}}} = \dfrac{6}{\sqrt{29}}$

Тогда $S_{\triangle CED} = \dfrac{HE \cdot CD}{2} = \dfrac{\frac{6}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5}}{2} = \dfrac{12}{5} : 2 =$

$= \dfrac{6}{5}$

Ответ: $S_{\triangle CED} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$, $tg(BAC) = \dfrac{2}{5}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

Дано:

Ω, ω.

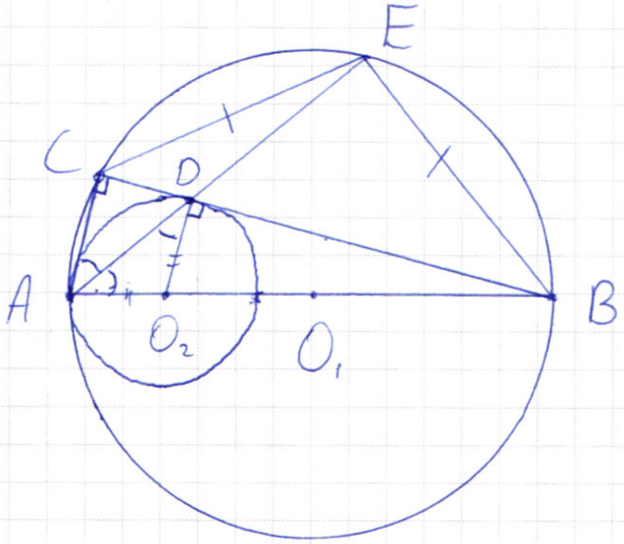
AB - диаметр Ω.

BC - хорда Ω.

$CD = 1$, $BD = 3$

R, r, S_{BACE} - ?

Решение:



Пусть R - радиус Ω, r - радиус ω.
Пусть O_1 - центр Ω, O_2 - центр ω.
Т.к. радиус проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной, то $O_2A \perp l$, $O_1A \perp l$. Где l - общая касательная ω и Ω в точке A.
Значит O_1, O_2, A лежат на одной прямой, на прямой AB. $O_2A = r$, $O_1A = R$.
По свойству секущих и окружности,
$BD^2 = (2R - 2r)\cdot 2R$ - для ω и точки B.
$\frac{9}{4} = R(R - r)$.
Т.к. BD - касательная к ω, то $BD \perp O_2D$.

Т.к. AB — диаметр Ω, то $\angle BCA = 90^\circ$.
Т.к. $O_1D \perp BC$, и $AC \perp BC$, то $O_1D \parallel AC$.
Значит $\triangle BO_2D$ подобен $\triangle BAC$, а тогда:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BO_2}; \quad \frac{BD+CD}{BD} = \frac{2R}{2R-r}; \quad \frac{4}{3} = \frac{2R}{2R-r};$$

$$\frac{2}{3} = \frac{R}{2R-r}; \quad 2(2R-r) = 3R; \quad 4R-2r = 3R; \quad R = 2r$$

Т.к. $\begin{cases} R = 2r \\ 9 = 4R(R-r) \end{cases} \Rightarrow 9 = 4\cdot 2r\cdot(2r-r) = 8r^2$

$$r = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Отсюда $R = 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Т.к. $O_1D \parallel AC$, то $\angle CAD = \angle ADO_2$, а т.к. $O_2D = O_2A$, то $\angle CAD = \angle ADO_2 = \angle O_2AD$. Значит AE — биссектриса угла $\angle BAC$, а значит $CE = BE$. По теореме синусов для $\triangle CEB$:

$$\frac{BC}{\sin(BEC)} = 2R; \quad \sin(BEC) = \frac{BC}{2R} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\sin^2(BEC) + \cos^2(BEC) = 1$, тогда: $\cos^2(BEC) = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{9}{9} - \frac{4\cdot 2}{9} = \frac{1}{9}$

Т.к. $\angle BEC > 90^\circ$, то $\cos(BEC) < 0$, и равен $\cos(BEC) = -\sqrt{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{3}$, тогда по теореме косинусов для $\triangle CEB$: $BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2\cdot BE\cdot CE\cdot\cos(BEC)$

$$BC^2 = 2BE^2 - 2BE^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 2BE^2 + \frac{2}{3}BE^2 = \frac{8}{3}BE^2.$$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{\triangle CEB} = \frac{1}{2} \cdot \sin(BEC) \cdot BE \cdot BC = \frac{BE^2 \cdot \sin(BEC)}{2} =$

$= \frac{\frac{3}{8} BC^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{BC^2 \cdot \sqrt{2}}{4} : 2 = \frac{BC^2 \cdot \sqrt{2}}{8} = 2\sqrt{2}$

~~Отв~~ По теореме Пифагора для $\triangle ABC$:

$AC^2 = AB^2 - BC^2 = (2R)^2 - BC^2 = 4R^2 - BC^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 4 - 16 =$

$= 18 - 16 = 2$, т. е. $AC = \sqrt{2}$. Тогда:

~~$S_\triangle$~~ $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 2\sqrt{2}$.

Тогда $S_{BACE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CEB} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $V = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Задача 7

$f(ab) = f(a) + f(b)$. Рассмотрим $a = 1$, $b = 1$, тогда: $f(1) = 2f(1)$, $f(1) = 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ для p-простое. Рассмотрим все простые числа ~~от~~ до 21:

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$; $f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$; $f(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = 2$

$f(7) = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$; $f(11) = \left[\frac{11}{2}\right] = 5$, $f(13) = \left[\frac{13}{2}\right] = 6$

$f(17) = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$; $f(19) = \left[\frac{19}{2}\right] = 9$.

Рассмотрим $a \in N$, тогда:

$f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$, т.к. $f(1) = 0$, то:

$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$.

Теперь рассмотрим x и $y \in N$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$, По условию, $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$,

поэтому $f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

Вспомним, что для любого $a \in N$, верно:

$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$, тогда:

$f(x) < f(y)$.

Найдём все значения функции $f(x)$ для $1 \leq x \leq 21$.

$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 2f(2) = 2$

$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 1 + 1 = 2$

$f(8) = f(4 \cdot 2) = f(4) + f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(9) = f(3 \cdot 3) = 2f(3) = 2 \cdot 1 = 2$

$f(10) = f(2 \cdot 5) = f(2) + f(5) = 1 + 2 = 3$

$f(12) = f(6) + f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(14) = f(7) + f(2) = 3 + 1 = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(15) = f(5\cdot 3) = f(5) + f(3) = 2 + 1 = 3$

$f(16) = f(8\cdot 2) = f(8) + f(2) = 3 + 1 = 4$

$f(18) = f(9\cdot 2) = f(9) + f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(20) = f(10\cdot 2) = f(10) + f(2) = 3 + 1 = 4$

$f(21) = f(7\cdot 3) = f(7) + f(3) = 3 + 1 = 4.$

Таким образом, получим:

$f(1) = 0$;

$f(2) = f(3) = 1$

$f(4) = f(5) = f(6) = f(9) = 2$

$f(7) = f(8) = f(10) = f(12) = f(15) = f(18) = 3$

$f(14) = f(16) = f(20) = f(21) = 4$

$f(11) = 5$

$f(13) = 6$

$f(17) = 8$

$f(19) = 9$

Нам нужно найти все пары натуральных x, y, что $f(x) < f(y)$.

Зная значения функции во всех $1 \le x \le 21$, несложно найти все требуемые пары.

Для $y = 19$, пар будет 20,

для $y = 17$, пар будет 19,

для $y = 13$, пар будет 18.

для $y = 11$, пар будет 17, ~~для~~
для $y = 14$, $y = 16$, $y = 20$, $y = 21$ пар будет 13
для $y = 7$, $y = 8$, $y = 10$, $y = 12$, $y = 15$, $y = 18$ пар 7
для $y = 4$, $y = 5$, $y = 6$, $y = 9$, пар 3
для $y = 2$, $y = 3$, пар 1
для $y = 1$, пар нет.

Значит общее количество требуемых пар чисел $(x; y)$ равно:

~~$N = 18 \cdot 20 + 17 \cdot 19 + 13 \cdot 18 + .$~~

$N = 20 + 19 + 18 + 17 + 4 \cdot 13 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$

$= 39 + 35 + 52 + 42 + 14 = 74 + 94 + 14 =$

$= 74 + 108 = 174 + 8 = 182$

Ответ: $N = 182$.

Задача 6

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$

~~Рас~~ Для $x = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$. Рассмотрим правое неравенство.

$$x + |2x - 1| = \begin{cases} x + 2x - 1, & 2x - 1 \geq 0, \quad x \geq \frac{1}{2} \\ x - 2x + 1, & 2x - 1 < 0, \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} ax + b \leq 3x - 1, & \text{для } x \geq \frac{1}{2} \\ ax + b \leq -x + 1, & \text{для } x < \frac{1}{2} \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда: $3x - ax - 1 - b \geq 0$, для $x = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$ax + x + b - 1 \leq 0$, для $x = \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

Рассмотрим первое из этих двух неравенств:

$x(3-a) - (b+1) \geq 0$

$x \geq \frac{b+1}{3-a}$; для $3 - a > 0$; $\underline{a < 3}$.

$x \leq \frac{b+1}{3-a}$; для $3 - a < 0$, $a > 3$.

Т.к. $x = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, то: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, значит

$\frac{3}{2} \geq x \geq \frac{b+1}{3-a}$; для $a < 3$

$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{b+1}{3-a}$; для $a > 3$

$\frac{3}{2} - \frac{b+1}{3-a} \geq 0$; $a < 3$ $\Rightarrow$ $\frac{9 - 3a - 2b - 2}{2(3-a)} \geq 0$

$\frac{b+1}{3-a} - \frac{1}{2} \geq 0$; $a > 3$ $\quad$ $\frac{2b + 2 - 3 + a}{2(3-a)} \geq 0$

$\frac{7 - 3a - 2b}{3-a} \geq 0$ для $a < 3$

$\frac{a + 2b - 1}{3-a} \geq 0$ для $a > 3$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$7 - 3a - 2b \geq 0$, для $a > 3$.

$a + 2b - 1 \leq 0$, для $a < 3$.

Теперь рассмотрим неравенство

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b$

$2x^2 - x - ax - 1 - b \leq 0$

$-2x^2 + x + ax + b + 1 \geq 0$

$-2x^2 + x(a+1) + b + 1 \geq 0$

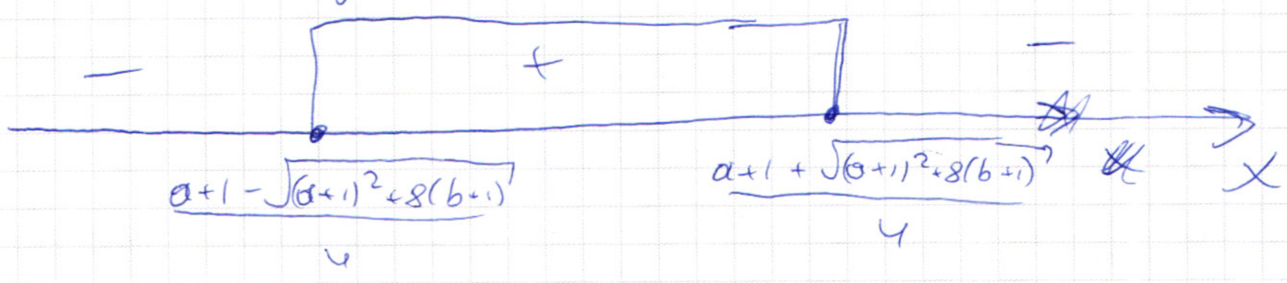
Найдем корни уравнения $-2x^2 + x(a+1) + b + 1 = 0$

Если $D = (a+1)^2 + 8(b+1)$ меньше нуля, то корней нет, и тогда $-2x^2 + x(a+1) + (b+1) < 0$ для всех x.

Если $D \geq 0$, т.е. $(a+1)^2 + 8(b+1) \geq 0$, то:

$x = \dfrac{-(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 + 8(b+1)}}{-4}$, $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{a+1+\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}}{4} \\ x = \dfrac{a+1-\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}}{4} \end{array}\right.$

Тогда решая неравенство методом интервалов, получим:



Т.к. неравенство должно быть верно для всех $x = \left[-\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right]$, то $-\frac{1}{4} \geq \dfrac{a+1-\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}}{4}$

$\frac{2}{3} \leq \dfrac{a+1+\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда получаем:

$$\frac{1}{4} \le \frac{\sqrt{(a+1)^2+8(b-1)} - (a+1)}{4}$$

$$\frac{2}{3} \le \frac{a+1+\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}}{4}$$

Складывая неравенства, получим:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3} \le \frac{\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}}{2};$$

$4 \le 3\sqrt{(a+1)^2+8(b+1)}$, т.к. $(a+1)^2+8(b+1) \ge 0$, то:

$16 \le 9\left((a+1)^2+8(b+1)\right)$

$16 \le 9(a+1)^2+72(b+1)$; $9(a+1)^2+72(b-1)-16 \ge 0$

Тогда получим итоговую систему:

$$\begin{cases} 9(a+1)^2+72(b+1)-16 \ge 0 \\ 3a+2b-7 \le 0, \text{ для } a>3 \quad (1) \\ a+2b-1 \le 0, \text{ для } a<3 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} 3a+2b-7 \le 0 \\ a>3 \end{cases} \Rightarrow$ ~~$a \le \frac{7-2b}{3}$~~ ~~$a>3$~~

$b \le \frac{7-3a}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) равносильно системе:

$$\begin{cases} (y-2x)^2=xy-2x-y+2 & (3) \\ y-2x\geq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (3):

$$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$$

$$(y-2x)^2=(x-1)(y-2)$$

Теперь рассмотрим уравнение (2):

$$(2x^2-4x+2)+(y^2-4y+4)-3=0$$

$$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$$

Домножим обе части уравнения (3) на 4, и сложим с уравнением (2):

$$2(x-1)^2+(y-2)^2-3+4(y-2x)^2=\cancel{4}\,4(x-1)(y-2)$$

$$\left(2(x-1)^2-4(x-\cancel{y})(y-2)+(y-2)^2\right)+4(y-2x)^2-3=0$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right] = f(p) + f(1)$

$f(a \cdot a) = f(a) + f(a) =$ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,

$f(a^2) = 2f(a)$

$f(0) = 2f(0)$ $\boxed{f(0) = 0}$

$f(1) = 2f(1)$ $\boxed{f(1) = 0}$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$f(2) = 1$; $f(3) = 1$, $f(5) = 2$

$f\left(\frac{x}{y}\right) \leq 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$

$f(1) = 0 = \boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 1}$

$\sqrt{a+1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$$

$$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$(2x^2-4x+2)+(y^2-4y+4)-3=0$$

$$\boxed{2(x-1)^2+(y-2)^2=3}$$

$$\cancel{-y^2}+5xy\cancel{-4x^2}-2x-y+2=0$$

$$\cancel{2x^2}\cancel{+y^2}-4x-4y+3=0$$

$$-2x^2+5xy-6x-5y+5=0$$

$$(x-1)(y-1)= \qquad (x-1)(y-2)=\boxed{xy-2x-y+2}$$

$$\underbrace{(y^2-4xy)+4x^2}\underbrace{-xy+2x+y-2}=0$$

$$\boxed{(2x-y)^2-(x-1)(y-2)=0}$$

$$[2(x-1)-(y-2)]^2+4(2x-y)^2=3$$

$$2x-2-y+2$$

$$(2x-y)^2+4$$

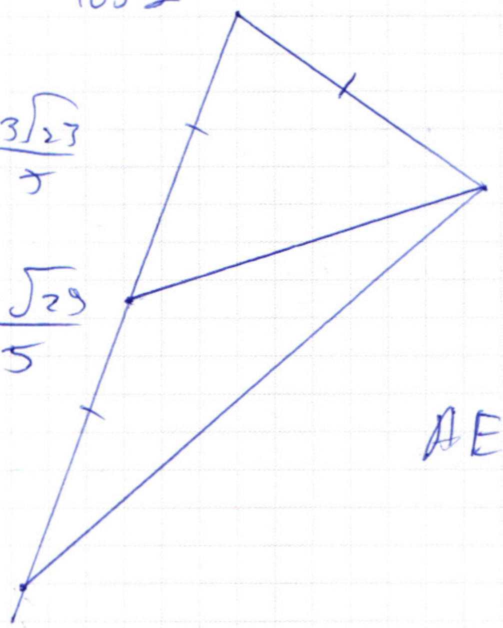
$$5(2x-y)^2=3$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{\frac{4}{25}+1}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{29}}$ $\qquad \frac{\sqrt{29}}{29}$



$\frac{18}{5}:\frac{3\sqrt{29}}{5}$

$\frac{18}{5}:\frac{3\sqrt{29}}{5}$

$\frac{2{,}1\cdot 1{,}2}{2}=$

D^2-d^2

$AE\cdot DE=HE\cdot AD$

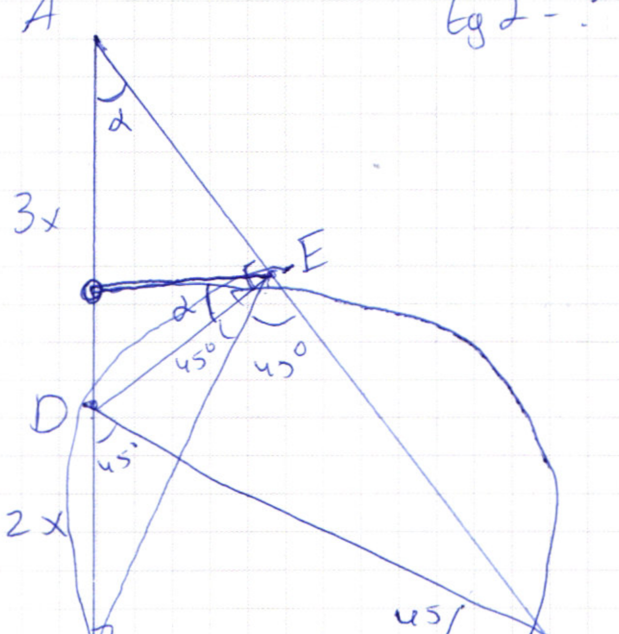
$HE=\frac{AE\cdot DE}{AD}$

$tg\alpha$ - ?

$tg\alpha=\frac{BC}{5x}$

$\boxed{AD\cdot AC=AE\cdot AB}$

$\frac{2}{5}$



$ax+b\geq 2x^2-x-1 \qquad 2x^2-x-ax-1-b\leq 0$

$2x^2-x(a+1)-(b+1)\leq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

b_n = геометрическая прогрессия

$b_1 = a \quad ; \quad b_1 \cdot q = b_2 = b$

$b_1 = a; \quad b_2 = b \quad ; \quad b_3 = c$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{2a}$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \quad ; \quad b_2 = b_1 \cdot q \quad ; \quad b_3 = b_1 \cdot q^2$

$b_1 = a; \quad b = a \cdot q \quad ; \quad c = a \cdot q^2 \quad ; \quad d = a \cdot q^3$

$\cancel{a(a \cdot q^3)^2 + 2b \cdot a \cdot q^3 + c = 0} \qquad d = c \cdot q$

$\frac{c}{q} = b \quad ; \quad a = \frac{b}{q} = \frac{c}{q^2}$

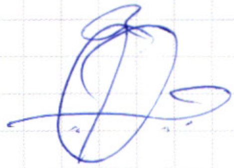
$\frac{c}{\cancel{q^2}} \cdot c^2 \cdot \cancel{q^2} + 2 \cdot \frac{c}{\cancel{q}} \cdot c \cdot \cancel{q} + c = 0$

$c^3 + 2c^2 + c = 0 \quad ; \quad c(c^2 + 2c + 1) = 0$

$c(c+1)^2 = 0 \qquad \boxed{c = 0} \qquad \boxed{c = -1}$

Задача 1

$tg\,\alpha = \frac{DE}{AE}$ $\qquad AE^2 + DE^2 = 9x^2$



$DE \qquad DE = AE\cdot tg\,\alpha$

$AE^2 + AE^2\cdot tg^2\alpha = 9x^2$

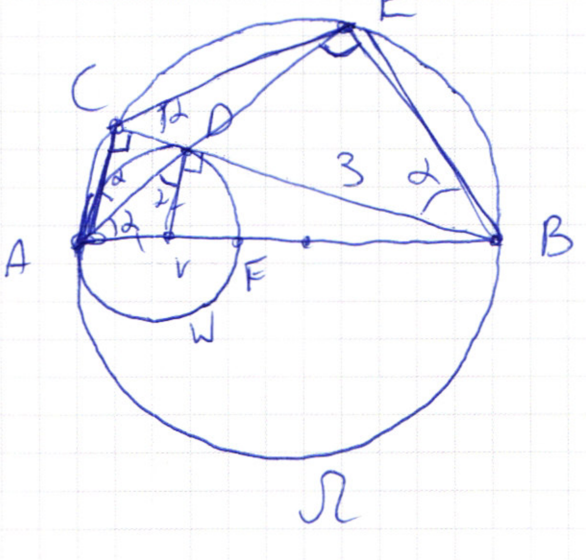
$2\cdot 1{,}4$

$AE^2\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^2\right) = 9x^2$ $\qquad \boxed{2\cdot 1{,}5 = 3}$

$AE^2\,\frac{29}{25} = 9x^2, \qquad 3x = \frac{AE\sqrt{29}}{5}$

$\boxed{AE = \frac{15x}{\sqrt{29}}}$

$BD^2 = BF\cdot BA = 2R\cdot(2R-2r)$



$BD^2 = 4R(R-r)$

$\boxed{\frac{9}{4} = R(R-r)}$

$r^2 + 9 = (2R-r)^2$

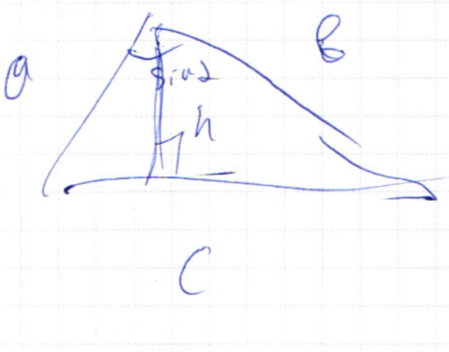
$r^2 + 9 = 4R^2 - 4R\cdot r + r^2$

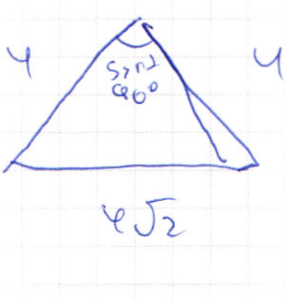
$\frac{4\cdot 4}{2} = 8$

$S_{ADC} = \frac{1}{2}\sin\alpha\, ab$

$\frac{4}{3} = \frac{2R}{2R-r}$

$\frac{4\cdot 4}{2} = \boxed{8}$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-1+y-2$

$x+y-3$

$2(y-2x)^2=2(x-\cancel{y})(y-2)$

$(x-1)^2+(y-2)^2=3-(x-1)^2$

$(x+y-3)^2=3-(x-1)^2+2(y-2x)^2$

$(x+y-3)^2-(y-2x)^2=3+(y-2x)^2-(x-1)^2$.

$(x+y-3-y+2x)(x+y-3+y-2x)=3+(y-2x-x+1)$
$(y-2x+x-1)$

$(3x-3)(2y-x-3)=3+(y-3x+1)(y-x-1)$

$(x-1)(y-2)=\boxed{xy-2x-y+2}$

$(2x^2+y^2-2x-3y+1)-2x-y+2+xy-xy=0$

$(2x^2+y^2-xy-2x-3y+1)+(x-1)(y-2)=0$

$(x-1)^2+(x-1)(y-2)+(x^2+y^2-xy-3y)=0$

$(y-2)^2=\boxed{y^2-4y+4}$

$\boxed{(x-1)^2+(x-1)(y-2)+(y-2)^2+(x^2+y-4-xy)=0}$

$1 \quad 4 \quad x \quad y \quad (x-1)(x-y)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3aec = 1200