МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, b, c – члены геометрической прогрессии, пусть q $(q \neq 0)$ – знаменатель прогрессии (причем $a \neq 0$), d – четвертый член прогрессии.

По св-ву прогрессии $b^2 = ac \Rightarrow b^2 - ac = 0$

$\Rightarrow$ дискриминант квадратного уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$ равен $D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 0$

$\Rightarrow$ корнем уравнения будет $d = \frac{b}{a}$.

Заметим следующее, что последовательность a, b, c, d – геометрическая $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{b}{ac}$

$\Rightarrow c = 1$

Ответ: 1.

№2.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $x - 6 - 6y + 6 = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$

$(x-6) - 6(y-1) = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$

$(x-6)^2 - 12(x-6)(y-1) + 36(y-1)^2 = (y-1)(x-6)$

Сделаем замену: пусть $a = x - 6$; $b = y - 1$.

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$.

$(a - 9b)(a + 4b) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 9b \\ a = 4b \end{array}\right.$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

№2 (продолжение).

(2): $x^2 - 12x + 36 - 36 + 2y^2 - 4y + 2 - 2 + 20 = 0.$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

Также следуя замене получаем: $a^2 + 2b^2 = 18$

~~$\Rightarrow$ система преобразовалась в $\{a^2 - 13ab +$~~

где мы знаем, что $\left[\begin{array}{ll} a = 4b & 1. \\ a = 9b & 2. \end{array}\right.$

1.: $\begin{cases} a = 4b \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow 18b^2 = 18 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1 \end{array}\right.$

при $b = 1$, $a = 4$, выражение $(a - 6b) < 0$, чего быть не может, т.к. $a - 6b = x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$

$\Rightarrow b = -1$, $a = -4$ $\Rightarrow \begin{cases} a = x - 6 = -4 \\ b = y - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ – решение системы.

2. $\begin{cases} a = 9b \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow 83b^2 = 18 \Rightarrow b^2 = \frac{18}{83} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \\ b = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \end{array}\right.$

при $b = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$, $a = \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ $\Rightarrow \begin{cases} a = x - 6 = \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \\ b = y - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 + \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \\ y = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \end{cases}$ – реш. сист.

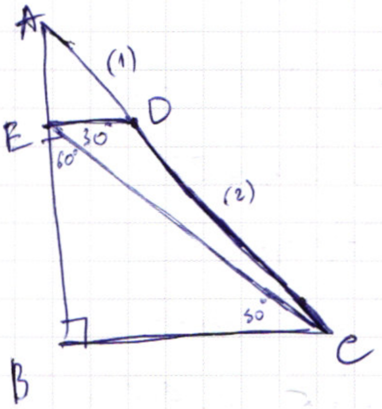
при $b = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$, $a = -\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$, чего быть не может, т.к.

$x - 6y = a - 6b = -\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{83}} < 0$, $\Rightarrow x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} < 0$ чего быть не может.

$\Rightarrow$ ~~реш~~ Ответ: $(2; 0)$ и $\left(6 + \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}; 1 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4.



$DE \perp EB$, $EB \perp BC \Rightarrow DE \parallel BC$.

$\Rightarrow \angle CED = \angle ECB = 30°$

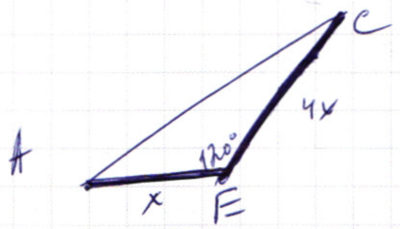
$\Rightarrow \angle BEC = 90° - \angle CED = 60°$

$\Rightarrow EB = \cos 60° \cdot EC = \frac{1}{2} EC$.

т.к. $AD : DC = 1 : 2$, $DE \parallel BC$, то

$AE : EB = 1 : 2 \Rightarrow EB = 2AE$

$4AE = EC$.



Пусть $AE = x$: тогда $EC = 4x$.

Посчитаем AC по теореме косинусов:

$AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2 \cdot AE \cdot CE \cdot \cos 120° =$

$= x^2 + 16x^2 + 4x^2 = 21x^2 \Rightarrow AC = \sqrt{21}x \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} x$

$\Rightarrow ED^2 = AD^2 - AE^2 = \frac{7x^2}{3} - x^2 = \frac{4}{3}x^2$

$\Rightarrow ED = \frac{2}{\sqrt{3}} x \Rightarrow \underline{tg \angle CABE = tg \angle EAD} = \underline{\frac{ED}{AE} = \frac{2}{\sqrt{3}}}$

$AC = \sqrt{7} = \sqrt{21}x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$S_{AEC} = \frac{1}{2} AE \cdot EC \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 4x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$S_{AED} = \frac{1}{2} AE \cdot ED = \frac{1}{2} AE^2 \cdot tg \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

$S_{EDC} = S_{AEC} - S_{AED} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

№7.

$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) = 0.$

$\Rightarrow$ Тогда $\forall a > 0$, причем a - действительное выполняется: $f(1) = f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0.$

$\Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$\Rightarrow f(x/y) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

Посчитаем значения $f(x)$ для x - нат., $2 \le x \le 22$:

$f(2) = 1$, т.к. 2 - простое; $f(3) = 1$, т.к. 3 - простое; $f(4) = f(2 \cdot 2) = 2$

$f(5) = 2$, т.к. 5 - простое; $f(6) = f(3 \cdot 2) = 2$; $f(7) = 3$, т.к. 7 - простое.

$f(8) = f(4 \cdot 2) = 3$; $f(9) = f(3 \cdot 3) = 2$; $f(10) = f(2 \cdot 5) = 3$; $f(11) = 5$, т.к. 11 - простое.

$f(12) = f(2 \cdot 6) = 3$; $f(13) = 6$, т.к. 13 - простое; $f(14) = f(2 \cdot 7) = 4$;

$f(15) = f(3 \cdot 5) = 3$; $f(16) = f(2 \cdot 8) = 4$; $f(17) = 8$, т.к. 17 - простое число; $f(18) = f(9 \cdot 2) = 3$

$f(19) = 9$, т.к. 19 - простое; $f(20) = f(2 \cdot 10) = 4$; $f(21) = f(3 \cdot 7) = 4$; $f(22) = f(2 \cdot 11) = 6$.

Тогда для каждого $x \in \mathbb{N}$, $2 \le x \le 22$, найдем все $y \in \mathbb{N}$, $2 \le y \le 22$, удовлетворяющие $f(x) - f(y) < 0$

для 2: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22. (19)

" 3: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22. (38)

4: 7, 8, 10, 12, 15, 16, 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. (53)

5: 7, 8, 10, 12, 15, 16, 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. (68)

6: 7, 8, 10, 12, 15, 16, 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. (83)

7: 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. (92)

8: 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. (101)

9: 7, 8, 10, 12, 15, 16, 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. (116)

10: 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. (125)

11: 13, 22, 17, 19. (129)

12: 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. (138)

13: 17, 19. (140)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

14: 11, 13, 22, 17, 19. 145

15: 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. 154

16: 11, 13, 22, 17, 19, 159

17: 19. 160

18: 14, 16, 20, 21, 11, 13, 22, 17, 19. 169

19: —

20: 11, 13, 22, 17, 19. 174

21: 11, 13, 22, 17, 19. 179

22: 17, 19. 181

Банально посчитав количество связей можно найти ответ, равный 181:

Ответ: 181.

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1: 2, 3.

2: 4, 5, 6, 9;   5: 11,   4   20

3: 7, 8, 10, 12, 15, 18, 11,   6: 13, 22,   4   54

4: 14, 16, 20, 21;   8: 17,   1   60

9: 19   0   38

9   172   181

~~ш~~ 7.

$f(2) = 1$

$f(2) = f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1) = 1$

$\Rightarrow f(1) = 0.$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \rightarrow f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

$\Rightarrow f(x/y) = f\left(x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f:\ (2) = 1;\ (3) = 1;\ f(4) = 2;\ f(5) = 2;\ f(6) = 2;$
$f(7) = 3;\ f(8) = 3;\ f(9) = 2;\ f(10) = 3;\ f(11) = 5;\ f(12) = 3;$
$f(13) = 6;\ f(14) = 4;\ f(15) = 3;\ f(16) = 4;\ f(17) = 8;\ f(18) = 3;$
$f(19) = 9;\ f(20) = 4\ f(21) = 4;\ f(22) = 6.$

6.

$\frac{1}{2} \le x \le 1:\quad 8x - 6(2x-1) = -4x + 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

$(x-6y)^2 = (x-6)(y-1)$

$x = 6\ \ y = 1$

$36 + 2 - 72 - 4 + 20$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 + (y-2)^2 = 20$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 + (y-2)^2 = 20. \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

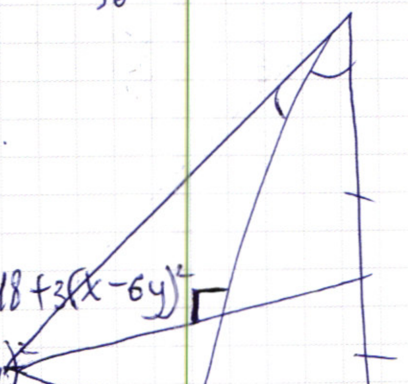
$y = 3$
$x = 6.$

~~$y^2 + (y-2)^2 = 12 + 2(y-1)^2$~~

$(x-6)(y-1+x-6) + 2(y-1)(y-1+x-6) = 18 + 3(x-6y)^2$

$(x+y-7)((x-6) + 2(y-1)) = 18 + 3(x-6y)^2$

$(x+y-7)(x+2y-8) = 18 + 3(x-6y)^2$



$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) + 20 - 38 = 0.$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$x - 6y + 6 - 6 = (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2 - 12(y-1)(x-6) + 36(y-1)^2 = (x-6)(y-1)$

$$\begin{cases} (x-6)^2 - 12(y-1)(x-6) + 36(y-1)^2 = (x-6)(y-1) \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \quad | : b^2$$

$$\begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$k^2 - 12k + 36 = k$

$k^2 - 13k + 36 = 0.$

~~$39b^2 + 13ab - 18 = 0$~~

$D = 169 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25$

$k = 9$

$k = 4$

$81 - 117 + 36 = 0$

$16 - 52 + 36 = 0.$

1) $k = 4: \Rightarrow \frac{a}{b} = 4 \quad a = 4b$

$2b^2 + a^2 = 16b^2 + 2b^2 = 18 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1 \end{array}\right. \Rightarrow a = 4$$

2) $k = 9$: $a = 9b$

$a^2 = 81b^2$ $\quad 81b^2 + 2b^2 = 18$

$83b^2 =$

$a - 6b = \sqrt{9b \cdot b}$

$3b = \sqrt{}$ ✓

$9b - 6b < 0$, при $b < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b^2 = ac$ – геометрическая прогрессия

$ax^2 - 2bx + c = 0.$

$D = 4b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ корнем является $x = +\frac{b}{a}.$

$\frac{\pm\sqrt{D} + 2b}{2a} = \frac{b}{a}.$

$a \quad b \quad c \quad \frac{b}{a}$

$c = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot a = \frac{b^2}{a}$

$c = \frac{b^2}{a} \Rightarrow q = \frac{b}{a}$

из уравнения.

$d = c \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{c = 1}$

(2) $x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 2 + 36 = 18$

$(x^2 - 12x + 36) + 2y^2 - 4y + 2 = 18$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$y(x-6) - (x-6)$

$(y-1)(x-6)$

(1) ~~$x^2 - 12xy + y^2 = xy - 6y - x + 6.$~~

~~$x^2 + 13xy + y^2 + 6y + x = 6$~~

~~$3x^2 - 57xy + 3y^2 + 18y + 3x = (x-6)^2 + 2(y-1)^2$~~

$x^2 - 12xy + y^2 = xy - 6y - x + 6.$

$x^2 - 13xy + y^2 + 6y + x = 6$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 =$

$(x-6y)^2 = (y-1)(x-6) \quad |\cdot 2$

$(x-6)^2 + (y-1)^2 + (y-1)^2 = 18.$

$(x-6)^2 + 2(y-1)(x-6) + (y-1)^2 + (y-1)^2 = 18 + 2(x-6y)^2$

$(x+y-7)^2 + (y-1)^2$

3.

$(x-6y)^2 = xy - 6y + x + 6$

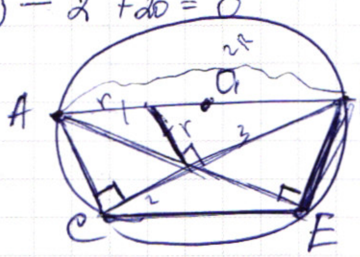
$(x-6y)^2 = (y-1)(x+6)$

$x^2 + 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0.$

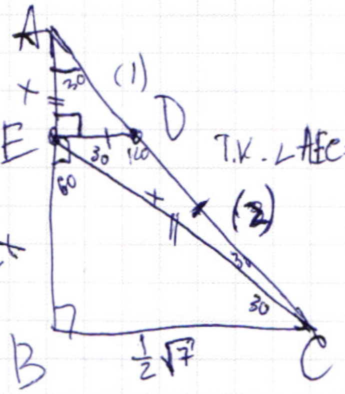
$(x-6)^2 - 36 + 2(y+1)^2 - 2 + 20 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$(x-6y)^2 = (y-1)(x-6)$



4. a)



$AB = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}}{2}$

$AE = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}\ 2x$

$\angle CAB = \angle ACE$, т.к. $\triangle AEC$ – ~~прям~~ равноб.

т.к. $\angle AEC = 120^\circ$. $\angle CAB = 30^\circ$. $tg\angle CAB = tg\, 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$AC = \sqrt{7}$

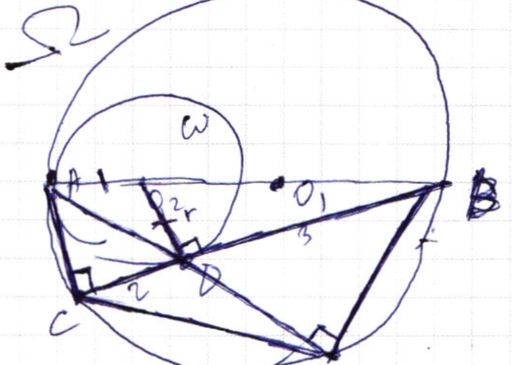
a)

~~$EC \cdot CD \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} EC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{7}\ EC = \frac{1}{3}\sqrt{7}$.~~

$ED = \frac{1}{3} BC = \frac{1}{6}\sqrt{7}$.

$S = ED \cdot DC \cdot \sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{7}}{6} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{18}$ б)

5.

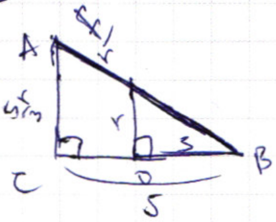


$f(1) = 0.$

$O_2B = \sqrt{r^2+9}$

$AB = \sqrt{r^2+9} + r = R$

$R^2 = \frac{25r^2}{9} + 25.$



$\frac{r}{3} = \frac{x}{5}$

$x = \frac{5r}{3}$

$r^2 + r^2 + 9 + 2\sqrt{r^2+9} \cdot r = \frac{25r^2}{9} + 25.$

$126 + 7r^2 =$

$16 + \frac{7r^2}{9} = 2\sqrt{r^2+9} \cdot r \quad | \cdot 9.$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)