МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

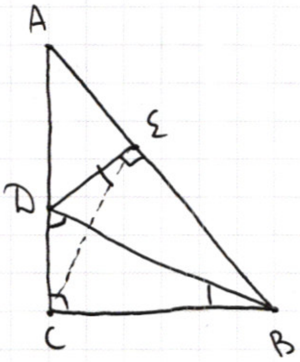
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4.

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, $DE \perp AB$, $\angle C = 90^\circ$; б) $AC = \sqrt{29}$; $\angle CED = 45^\circ$

?: $tg\angle BAC$, б) $S_{\Delta CED}$

Заметим, что CDEB – вписанный, ибо у него противоположные углы ($\angle DCB$ и $\angle DEB$) по 90° $\Rightarrow$ в сумме как раз 180°. $\angle CED = \angle CBD$, ибо они вписанные и опир. на одну дугу CD (меньшую). Тогда $\angle CDB = 180^\circ - \angle DCB - \angle CBD = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ$ (у нас $\angle CBD = \angle CED = 45^\circ$ по усл.) $= 45^\circ \Rightarrow$ в ΔCDB 2 угла равны по $45^\circ \Rightarrow$ он равнобедр. $\Rightarrow CD = CB$ как бок. стороны. Пусть $AC = x$. $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AD = 0{,}6x$. $CD = AC - AD = x - 0{,}6x = 0{,}4x$. $BC = CD = 0{,}4x$. $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{0{,}4x}{x} = 0{,}4$.

$CD = 0{,}4x$, но теперь $AC = \sqrt{29} \Rightarrow x = \sqrt{29} \Rightarrow CD = 0{,}4 \cdot \sqrt{29}$. ΔAED тоже прямоуг. и в нём $\frac{DE}{AD} = \sin\angle BAC$. $tg\angle BAC = 0{,}4 \Rightarrow ctg\angle BAC = \frac{1}{0{,}4} = \frac{5}{2}$. $\cancel{1+\sin^2\angle BAC =}$ $1 + ctg^2\angle BAC = \frac{1}{\sin^2\angle BAC} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\angle BAC} = 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin^2\angle BAC = \frac{4}{29} \Rightarrow \sin\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{29}}$ ($\sin\angle BAC > 0$, ибо это острый угол в прямоуг. Δ) $AD = 0{,}6x = 0{,}6 \cdot \sqrt{29} \Rightarrow \frac{DE}{AD} = \sin\angle BAC \Rightarrow DE = 0{,}6 \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = 1{,}2$. $\angle CBA = 180^\circ - \angle BCA - \angle BAC = 90^\circ - \angle BAC$. Из вписанности CDEB у нас $\angle CDE = 180^\circ - \angle CBA = 180^\circ - 90^\circ + \angle BAC = 90^\circ + \angle BAC$. $\sin\angle CDE = \sin(90^\circ + \angle BAC) = \sin(90^\circ - \angle BAC) = \cos\angle BAC$. $S_{\Delta CED} = \frac{\sin\angle CDE}{2} \cdot CD \cdot ED$. $\sin\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \cos\angle BAC = \sqrt{1 - \sin^2\angle BAC} = \sqrt{1 - \frac{4}{29}} = \sqrt{\frac{25}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow \sin\angle CDE = \cos\angle BAC = \frac{5}{\sqrt{29}}$. Тогда $S_{\Delta CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot 0{,}4 \cdot \sqrt{29} \cdot 1{,}2 = \frac{5 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}2}{2} = 1{,}2$.

Ответ: $tg\angle BAC = 0{,}4$ и $S_{\Delta CED} = 1{,}2$.

№1.

Давайте сразу скажем, что у геометрической прогрессии знаменатель $q \neq 0$ и

№1 (продолжение).

I член ж равен 0, иначе третий член будет 0 (если I член 0, то все члены равны 0, и уравнение $ax^2+2bx+c=0$ удовлетворяется в любом x, если I член не 0, но $q=0$, то у уравнения будет один корень $x=0$, и как раз всё сойдется, но мы эти случаи отметём, ибо они в опр. классической геом. прогрессии не попадают, а тут, наверное, это имелось в виду.

Тогда $a\neq0$, $b=aq$ и $c=a\cdot q^2$, где $q=0$.

$ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2aqx+aq^2=0 \qquad a\neq0$

$x^2+2qx+q^2=0$

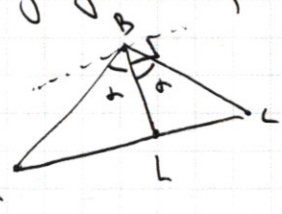
$(x+q)^2=0$

$x=-q$, причём x — это ещё и четвёртый член прогрессии $\Rightarrow -q=x=a\cdot q^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow aq^3+q=0 \Rightarrow q\cdot(aq^2+1)=0 \Rightarrow q\cdot(c+1)=0$, но $q\neq0 \Rightarrow c+1=0 \Rightarrow c=-1$.

Ответ: третий член прогрессии $c=-1$.

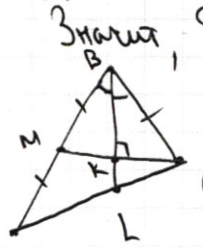
№2.

Заметим, что не бывает треугольников, у которых биссектриса и медиана из одной вершины $\perp$, ведь иначе у нас такая картинка:



$\angle ABC < 180^\circ \Rightarrow 2\alpha < 180^\circ \Rightarrow \alpha < 90^\circ$. Теперь тогда перпендикуляр к BL через точку B будет вне треугольника $\triangle ABC$ (ибо $\alpha<90^\circ$), но медиана, очевидно, лежит строго внутри, т.е. получили противоречие.

Значит, бис. и мед. идут из разных вершин.



CM — мед. и BL — бис., причём $CM\perp BL$.

Пусть CM и BL пересекаются в точке K. Тогда BK — и бис., и высота в $\triangle BMC \Rightarrow$ он равнобед. $\Rightarrow BM=BC$ как бок. стороны $\Rightarrow$
$\Rightarrow BC=\frac{AB}{2} \Rightarrow$ т.е. любой треугольник, у которого мед. $\perp$ бис. имеет пару сторон, одна из которых в 2 раза больше другой. Теперь рассмотрим треугольни-

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

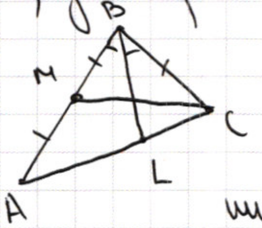
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение).

ки, у которых одна из сторон в 2 раза больше другой.



$2BC = AB$, CM – медиана и BL – бис.

$BM = \frac{AB}{2} = BC \Rightarrow \triangle MBC$ равноб. $\Rightarrow$ но бис. BL из вершины напротив осн. явл. и высотой $\Rightarrow BL \perp CM \Rightarrow$ т.е. любой треугольник, у которого одна из сторон в 2 раза больше другой явл. треугольником, у кот. одна из бис. $\perp$ мед. Значит, по сути нам достаточно посчитать кол-во $\triangle$ с $P=1200$, у которых одна из сторон в 2 раза больше другой. Пусть тогда у $\triangle$ стороны $a; 2a; b$. $a+2a > b \Rightarrow$ $\Rightarrow b < 3a$ и $a+b > 2a \Rightarrow b > a$ (если брать $a < b < 3a$, то треугольник построится). $P = a+2a+b = 3a+b$. $3a+b > 3a+a = 4a$ и $3a+b < 3a+3a = 6a \Rightarrow$ $\Rightarrow 4a < P < 6a \Rightarrow 4a < 1200 < 6a \Rightarrow a < 300$ и $a > 200$. Понятно, что для всех таких a я однозначно строю $2a$ и b (не может быть $a; 2a$ и $\frac{a}{2}$, ибо $a < b < 3a$), т.е. кол-во нужных мне $\triangle$ равно кол-ву подходящих a (то, что я треугольник по такому a понятно, ибо b попадёт в промежуток $(a; 3a)$), таких a (они по усл. целые $\Rightarrow$ и $2a$ будут целыми $\Rightarrow$ и b будет целым) равно $299 - 200 = 99$.

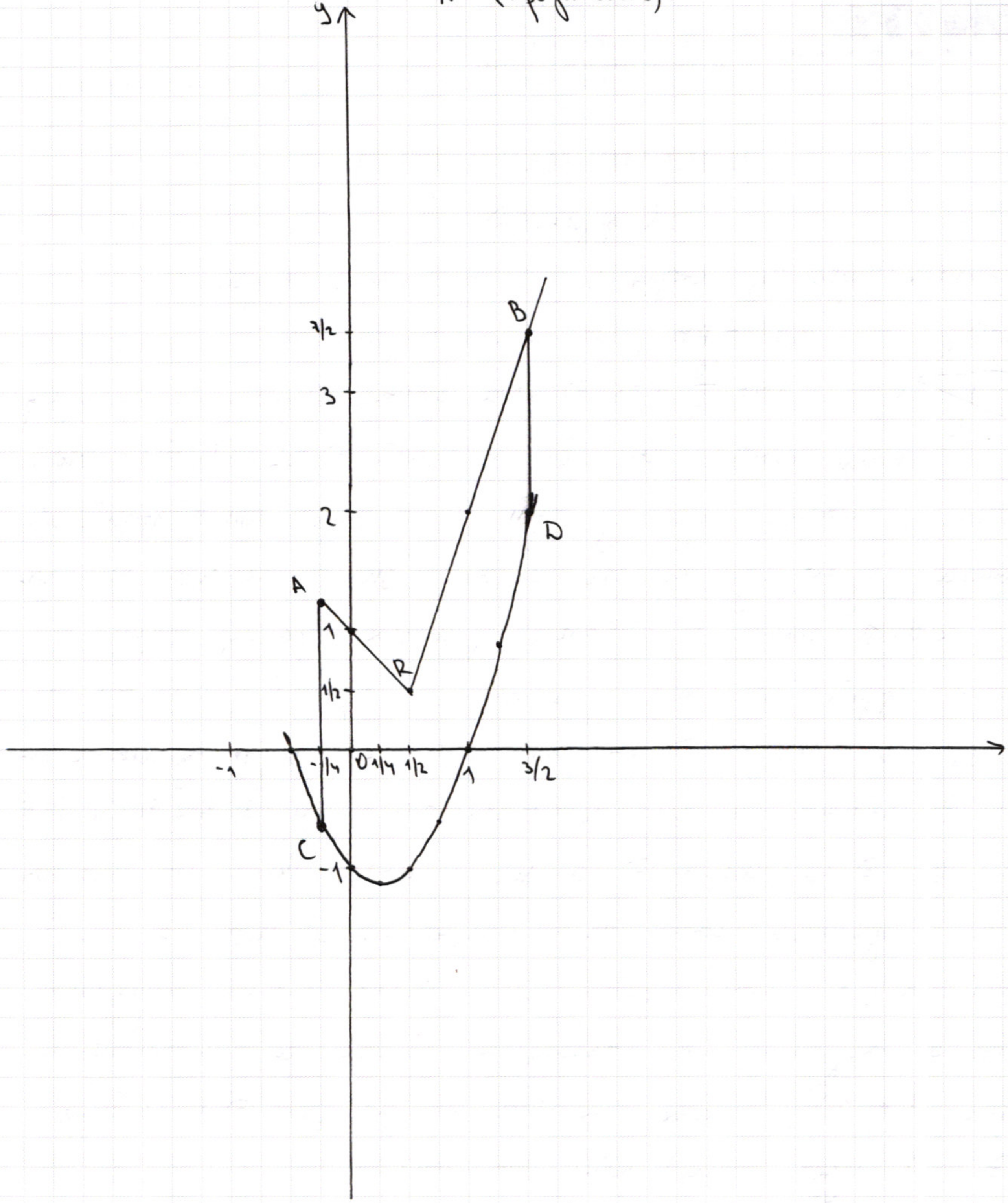
Ответ: 99.

№6.

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|$ на $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

Давайте построим графики $2x^2-x-1$ и $x+|2x-1|$ (они построены на след. странице). $2x^2-x-1$, у неё $x_в = \frac{1}{4} \Rightarrow y_в = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$ $= -1 - \frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$.

№6 (продолжение).



Теперь строим $x+|2x-1|$. При $x \geq \frac{1}{2}$ $x+|2x-1| = x+2x-1 = 3x-1$. При $x < \frac{1}{2}$ $x+|2x-1| = x-2x+1 = -x+1$.

Пусть теперь точка $A\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$ и точка $B\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ — точки $x+|2x-1|$ в $-\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{2}$ соотв. Пусть точка $C\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ и точка $D\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ — точки $2x^2-x-1$ в $-\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{2}$ соотв. Пусть $ax+b$ попадает в $x=-\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{2}$ в точки K и N соотв. Тогда т.к. должно выполняться нер-во у нас K лежит

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение).

на отрезке AC и N на отрезке BD. Пусть точка R – точка $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Прямая через точки $C\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$ и $D\left(\frac{3}{2};2\right)$ – это прямая $\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$ (эта подходит, и она очевидно одна). $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow R$ тоже на этой прямой. Если я начну двигать один из концов отрезка вверх, то пересечение с ~~оси~~ перпендикуляром к оси абсцисс в $x=\frac{1}{2}$ будет подниматься вверх. Из концов C, D я могу попасть в любую другую пару точек (сначала на одном отрезке поднимаем до нужной, потом на другом), т.е. если это какая-то другая пара, то в точке $x=\frac{1}{2}$ я получу больше, чем $\frac{1}{2}$ (пересечение будет строго выше R), но это противоречит тому, что на $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$ $ax+b\le x+|2x-1|$, т.е. кроме пары точек C, D нам ничего точно не подойдет. Осталось понять, почему C, D подойдет. Можно сослаться на график, но давайте скажем, что, как мы помним, это прямая $\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$.

$\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\ge 2x^2-x-1 \Rightarrow 2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}\le 0 \Rightarrow 8x^2-10x-3\le 0$, $D=100+12\cdot 8=$
$=196 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{10\pm 14}{16} \Rightarrow x_1=\frac{-4}{16}=-\frac{1}{4}$ и $x_2=\frac{24}{16}=\frac{3}{2} \Rightarrow 8x^2-10x-3\le 0$ при $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$, что как раз нужно.

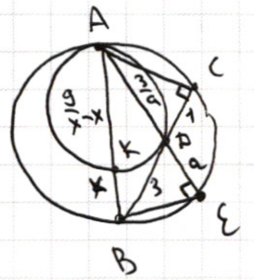
$\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\le x+|2x-1| \Rightarrow \frac{1}{2}x\le\frac{1}{4}+|2x-1|$, поэтому в $x\le\frac{1}{2}$ понятно, ибо тогда $\frac{1}{2}x\le\frac{1}{4}$, а справа точно $\ge\frac{1}{4}$. При $x>\frac{1}{2}$ модуль раскрывается с „+“ $\Rightarrow \frac{1}{2}x\le\frac{1}{4}+2x-1 \Rightarrow \frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\ge 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x\ge\frac{1}{4} \Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$ ч.т.д.

Ответ: $a=\frac{3}{2}$ и $b=-\frac{1}{4}$.

№5.

AB – диаметр; BC кас. в точке C мал. окр.; $BD=3$; $CD=1$; R, r, S_{BACG} – ?

№5 (продолжение).



Во-первых, пусть K — пересечение AB и мал. окр. Окр. касаются внутр. обр. в точке A ⇒ ⇒ они гомотетичны с коэфф. отнош. их радиусов (ну и с центром в точке A). Значит, $\frac{AK}{BK} = \frac{AD}{ED}$. Степень точки D отн. бол. окр. равна $-BD\cdot CD = -AD\cdot DE$ ⇒ ⇒ $AD\cdot DE = 3\cdot 1 = 3$. Пусть $DE = a$, тогда $AD = \frac{3}{a}$. Степень точки B отн. мал. окр. равна $BD^2 = BK\cdot AB$ ⇒ $BK\cdot AB = 3^2 = 9$. Пусть $BK = x$ ⇒ $AB = \frac{9}{x}$. $AK = AB - BK = \frac{9}{x} - x$. $\angle BEA = 90°$, т.к. он вписан в бол. окр. и опир. на её диаметр. Тогда $\triangle BDE$ — прямоуг. ⇒ по т. Пифагора $BD^2 = ED^2 + BE^2$ ⇒ ⇒ $BE^2 = BD^2 - ED^2 = 9 - a^2$. $\triangle ABE$ тоже прямоуг. ⇒ по т. Пифагора $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ⇒ $\left(\frac{9}{x}\right)^2 = \left(\frac{3}{a}+a\right)^2 + 9 - a^2$ ⇒ $\frac{81}{x^2} = \frac{9}{a^2} + a^2 + 6 + 9 - a^2 = \frac{9}{a^2} + 15$. Мы помним, что $\frac{AK}{BK} = \frac{AD}{ED}$ ⇒ $\left(\frac{9}{x} - x\right)\cdot\frac{1}{x} = \frac{3}{a}\cdot\frac{1}{a}$ ⇒ $\frac{3}{a^2} = \frac{9}{x^2} - 1$ ⇒ $\frac{9}{a^2} = \frac{27}{x^2} - 3$. Тогда $\frac{81}{x^2} = \frac{9}{a^2} + 15 = \frac{27}{x^2} - 3 + 15 = \frac{27}{x^2} + 12$ ⇒ $\frac{27}{x^2} = \frac{9}{x^2} + 4$ ⇒ $4 = \frac{18}{x^2}$ ⇒ ⇒ $4x^2 = 18$ ⇒ $2x^2 = 9$ ⇒ $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (понятно, что $x>0$). AB — диаметр бол. окр. ⇒ ⇒ $AB = 2R$ ⇒ $2R = \frac{9}{x}$ ⇒ $R = \frac{9}{2x} = \frac{9}{2\cdot 3/\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2\cdot 3} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. AK — диаметр мал. окр. (ну это из гомотетии, например, либо просто известно, что A на линии центров). Значит, $AK = 2r$ ⇒ $2r = \frac{9}{x} - x$ ⇒ $r = \frac{9-x^2}{2x} = \frac{9 - 9/2}{2\cdot 3/\sqrt{2}} = \frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

~~$\frac{9}{a^2} = \frac{9}{x^2} - 1$ ⇒ $\frac{3}{a^2} = \frac{9}{9/2} - 1 = 2 - 1 = 1$ ⇒ $a^2 = 3$ ⇒ $a = \sqrt{3}$ (понятно, что $a>0$). $\angle ACE = 90°$ по аналогии с $\angle AEB$. $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}CD\cdot AC = \frac{1}{2}CD\cdot\sqrt{AD^2 - CD^2} = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{9/a^2 - 1^2} = \sqrt{9/3 - 1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot BE = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{BD^2 - DE^2} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{3^2 - a^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{9-3} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Понятно, что $\triangle ADB \sim \triangle EDC$ (общеизвестное подобие тр. в окр.) ⇒ $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle DEC}\cdot k^2$ (где k — коэфф. подобия) ⇒ $S_{\triangle ADB} + S_{\triangle EDC} = S_{\triangle ADB}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$~~ $S_{BACE} = AE\cdot BC\cdot\frac{\sin\angle ADB}{2}$. $BC = BD + CD = 1+3 = 4$.

$\frac{3}{a^2} = \frac{9}{x^2} - 1 = \frac{9}{9/2} - 1 = 2 - 1 = 1$ ⇒ $a^2 = 3$ ⇒ $a = \sqrt{3}$ (понятно, что $a>0$). $AE = AD + ED = a + \frac{3}{a} = \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. $\sin\angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{9-a^2}}{9/x} = \frac{x\cdot\sqrt{9-a^2}}{9} = \frac{3\cdot\sqrt{9-3}}{9\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\cdot 3}{\sqrt{2}\cdot 9} =$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение).

$= \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (это из прямоуг. $\triangle ABE$). В $\triangle ADB$ по т. синусов $\frac{AB}{BD} = \frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{9}{x}\cdot\frac{1}{3} = \sin\angle ADB \cdot \frac{1}{1/\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}\cdot\sin\angle ADB = \frac{9\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 3} = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\angle ADB = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Тогда $S_{BACE} = AE\cdot BC\cdot \sin\angle ADB \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}\cdot 4\cdot \cancel{2}\cancel{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

№3.

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $y-2x \geq 0$ и $xy-2x-y+2\geq 0$

Возведём I в квадрат $\Rightarrow$ $y^2+4x^2-4xy = xy-2x-y+2 \Rightarrow y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - y(5x-1)+4x^2+2x-2=0$

$D=(5x-1)^2-4(4x^2+2x-2) = 25x^2+1-10x-16x^2-8x+8 = 9x^2-18x+9=(3x-3)^2$

$y=\frac{5x-1\pm(3x-3)}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{5x-1+3x-3}{2} = \frac{8x-4}{2} = 4x-2$ и $y_2 = \frac{5x-1-3x+3}{2} = \frac{2x+2}{2} =$

$=x+1$.

① $y=4x-2$.

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \Rightarrow 2x^2+(4x-2)^2-4x-4(4x-2)+3=0 \Rightarrow 2x^2+16x^2+4-16x-$

$-4x-16x+8+3=0 \Rightarrow 18x^2-36x+15=0 \Rightarrow 6x^2-12x+5=0 \Rightarrow D=144-120=$

$=24 \Rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{24}}{6} = \frac{12\pm2\sqrt{6}}{6} = 2\pm\frac{\sqrt{6}}{3} = 2\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$x=2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = 4\left(2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)-2 = 8-2+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 6+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$x=2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = 4\left(2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)-2 = 8-2-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 6-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

② $y=x+1$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \Rightarrow 2x^2+(x+1)^2-4x-4(x+1)+3=0 \Rightarrow 2x^2+x^2+1+2x-4x-4x-4+$

$+3=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow x(3x-6)=0 \Rightarrow x=0$ и $3x-6=0 \Rightarrow x=2$.

$x=0 \Rightarrow y=0+1=1$

№3 (продолжение).

$x=2 \Rightarrow y=2+1=3.$

Заметим, что под ОДЗ: $y-2x \geq 0$ подходят все, кроме $x=2$ и $y=3$.

Пара $x=0$ и $y=1$ под второе ОДЗ тоже подходит очевидно. Для пар $y=4x-2$ у нас $xy-2x-y+2=x(4x-2)-2x-4x+2+2=4x^2-8x+4=(2x-2)^2 \geq 0$ ч.т.д. (то, что они подходят по $y-2x \geq 0$ следует из: $y-2x=4x-2-2x=2x-2=2(x-1) \Rightarrow$ достаточно понять, что $x \geq 1$, а x у нас был равен в этих парах $2 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \geq 1$) $\Rightarrow$ под второе ОДЗ все 3 ост. пары подходят.

Ответ: $x=0$ и $y=1$; $x=2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ и $y=6+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $x=2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ и $y=6-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

№7.

$f(a)=f(a^2\cdot\frac{1}{a})=\cancel{f(a^2\cdot\frac{1}{a})}\ f(a^2)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a})=f(a)-f(a^2).$

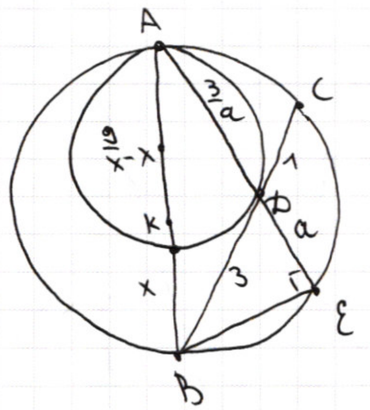
~~Итак~~ $f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)+f(y)-f(y^2)$. Аналогично, это же $f(x)+f(y)-f(x^2) \Rightarrow f(x^2)=f(y^2)$ при $\forall x$ и $y (\in \mathbb{N})$. $f(2^2)=f(4)=f(2)+f(2)=1+1=2.$

$AB = \frac{9}{x}$

$R = \frac{AB}{2} = \frac{9}{2x}$

$r = \frac{AK}{2} = \frac{9-x^2}{2x}$

$r, R, S_{BACE} - ?$



$\frac{9}{x^2} - 1 = \frac{3}{a^2}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$\frac{81}{x^2} = 9 + a^2 + a^2 + 6 + \frac{9}{a^2}$

$x, y \in \mathbb{N}$

$1 \le x \le 21$

$1 \le y \le 21$

$(a-3)(a+$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x \ge 0 \\ xy - 2x - y + 2 \ge 0 \end{cases}$$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

① $y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - y(5x - 1) + (4x^2 + 2x - 2) = 0$

$D = 25x^2 + 1 - 10x - 4(4x^2 + 2x - 2) = 25x^2 + 1 - 10x - 16x^2 - 8x + 8 =$

$= 9x^2 - 18x + 9 = (3x-3)^2$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(y \cdot \frac{1}{x}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$y = \frac{5x - 1 \pm (3x-3)}{2}$

$y_1 = \frac{5x-1+3x-3}{2} = \frac{8x-4}{2} = 4x - 2$

$y_2 = \frac{5x-1-3x+3}{2} = \frac{2x+2}{2} = x + 1$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(2p) = f(2) + f(p) = 1 + \left[\frac{p}{2}\right]$

$x(4x-2) - 2x - 4x + 2 + 2 = 4x^2 - 2x - 2x - 4x + 4 = 4x^2 - 8x + 4$

$f(y) = f\left(y^2 \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y^2) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

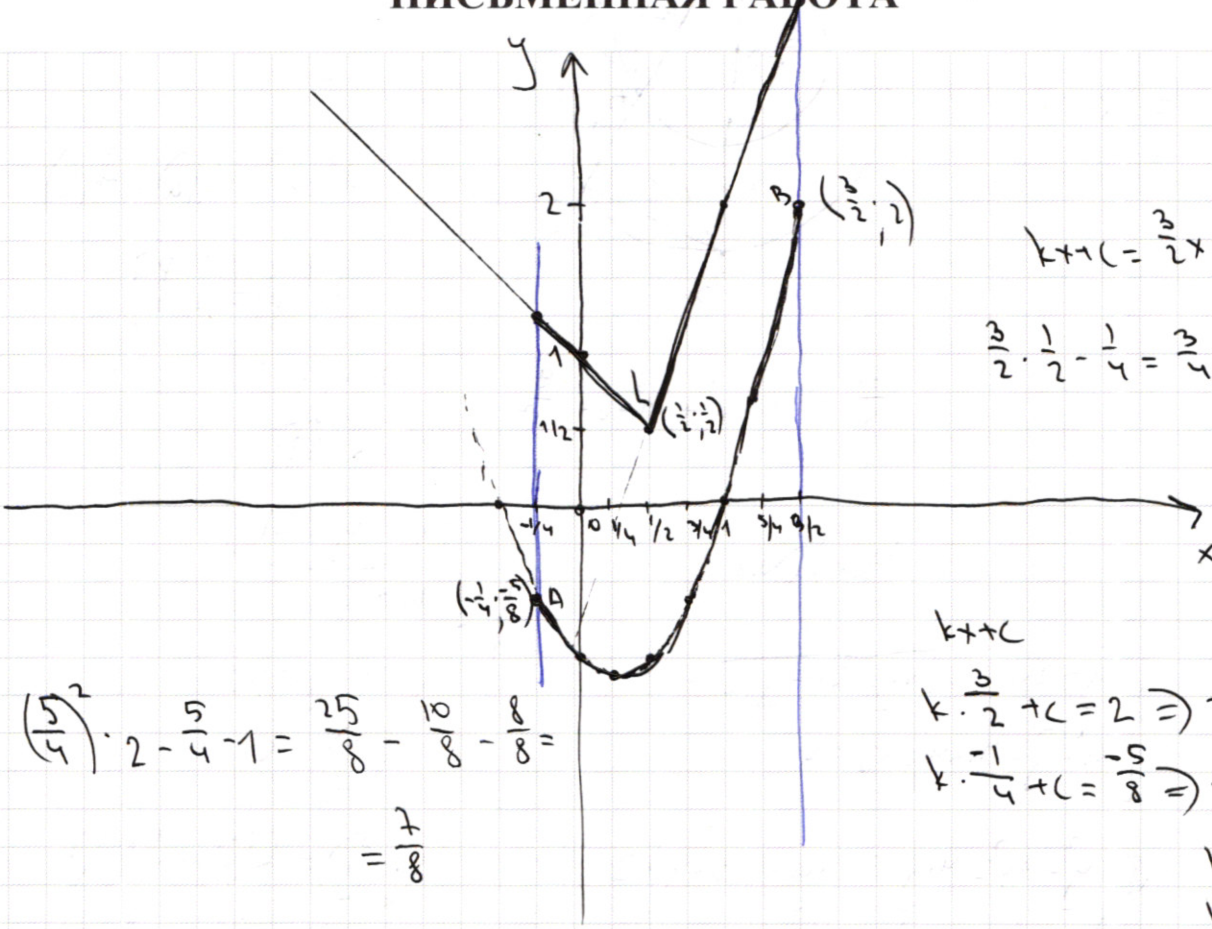
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$kx+c=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$12k+8c=16$

$kx+c$

$k\cdot\frac{3}{2}+c=2 \Rightarrow 3k+2c=4$

$k\cdot\frac{-1}{4}+c=\frac{-5}{8} \Rightarrow -2k+8c=-5$

$14k=21$

$k=\frac{3}{2} \Rightarrow c=2-\frac{9}{4}=$

$\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot 2-\frac{5}{4}-1=\frac{25}{8}-\frac{10}{8}-\frac{8}{8}=$

$=\frac{7}{8}$

$D=1+8=9 \quad x=\frac{1\pm3}{4}=-\frac{1}{4}$

?. все пары (a,b)

$3\cdot\frac{3}{2}-1=3,5$

$2x^2-x-1\le ax+b\le x+|2x-1|$

для $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$

$\frac{3}{2}\cdot 3-1=\frac{9}{2}-1=$

$=\frac{7}{2}$

$2x^2-x-1$

$x_B=\frac{1}{4} \Rightarrow y_B=2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1=$

$=\frac{1}{8}-\frac{2}{8}-1=\frac{-9}{8}$

$ax+b\ge 2x^2-x-1$

$2x^2-(a+1)\cdot x-(b+1)\le 0$ на $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$

$\frac{9}{4}\cdot 2-\frac{3}{2}-1=\frac{6}{2}-1=2$

$D=(a+1)^2+8(b+1)$

$x=\frac{a+1\pm\sqrt{D}}{4}$

$x+|2x-1|$ смотрим на $x\ge\frac{1}{2}$

$x+|2x-1|=3x-1$

смотрим на $x<\frac{1}{2}$

$x+|2x-1|=x-2x+1=1-x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$q \Rightarrow b = aq$ и $c = aq^2$

a, b, c

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2aq\cdot x + aq^2 = 0$

$x^2 + 2q\cdot x + q^2 = 0$

$D = 4q^2 - 4q^2 = 0$

$(x+q)^2 = 0$

$x = -q$

$-q = x = a\cdot q^3$

$q(aq^2+1) = 0$

$q = 0$ — что-то не работает по условию

$c+1=0$

$c=-1$

$BE^2 = a^2 + 9$

$BE^2 + AE^2 = AB^2$

$a^2 + 9 + a^2 + 18 + \frac{9}{a^2} = x^2 + \frac{81}{x^2} + 18$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$2a^2 + \frac{9}{a^2} = x^2 + \frac{81}{x^2} + 3$

$\frac{2}{3}x^2 + \frac{27}{x^2} = x^2 + \frac{81}{x^2} + 3$

$\frac{4}{3}x^2 + \frac{54}{x^2} + 3 = 0$

$\frac{4}{3}t + \frac{54}{t} + 3 = 0$

$\frac{4}{3}t^2 + 3t + 54 = 0$

$4t^2 + 9t + 162 = 0$

$D = 81 -$

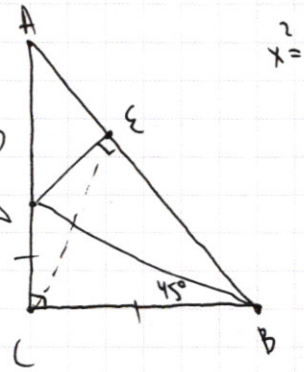
$AC = x \Rightarrow AD = 0{,}6x \Rightarrow CD = $

$= CB = 0{,}4x$

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{0{,}4x}{x} = 0{,}4$

$\angle CED = 45° \Rightarrow$

$x^2 = t$



$tg\angle BAC$

$\frac{9}{x^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow \frac{9}{a^2} = \frac{27}{x^2}$

$3a^2 = x^2$

$2a^2 = \frac{2}{3}x^2$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \frac{4}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

! надо закончить вопрос

$\cos^2\alpha = \frac{25}{29}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\Downarrow$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$

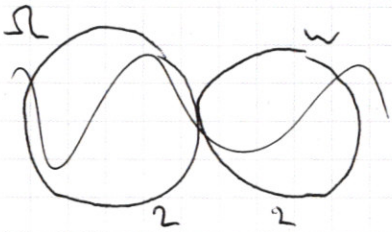
$AC = \sqrt{29} \Rightarrow BC = 0{,}4\cdot\sqrt{29}$

$S = \frac{AC\cdot BC}{2} = \frac{29\cdot 0{,}4}{2} = 29\cdot 0{,}2 =$

$= 5{,}8$

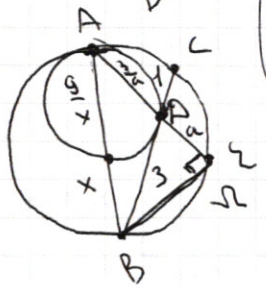
$2R = x + \frac{9}{x}$

$2r = \frac{9}{x}$



$CD = 1$

$BD = 3$



r_1 и R_2?

S_{BAE}

$\frac{DE}{AD} = \sin\alpha$

$\Rightarrow DE = AD\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}\cdot 0{,}6\cdot\sqrt{29} = 1{,}2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

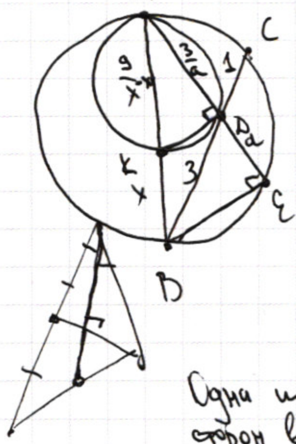
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\cancel{R=\frac{x+\frac{9}{x}}{2}=\frac{x^2+9}{2x}}$$

$$\cancel{r=\frac{9}{2x}}$$

$$R=\frac{AA}{2}=\frac{9}{2x}$$

$$r=\frac{AK}{2}=\frac{\frac{9}{x}-x}{2}=\frac{9-x^2}{2}$$



? $r, R, S_{BAC\mathcal{E}}$

$CD=1$ и $BD=3$

$1200=P>4a$

$P<6a$

$4a<\overset{1200}{P}<6a$

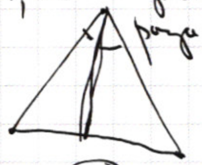
$$\frac{81}{x^2}=\frac{27}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{a^2}=\frac{27}{x^2} \quad \boxed{\begin{matrix}a<300\\ a>200\end{matrix}}$$

$$\frac{9}{x^2}=\frac{3}{a^2} \Rightarrow x^2=3a^2 \Rightarrow 2a^2=\frac{2}{3}x^2$$

$a, 2a, 2a$ возможно?

раза посчитать



$$B\mathcal{E}^2=9+a^2$$

Одна из сторон в 2 раза меньше другой

$$B\mathcal{E}^2+A\mathcal{E}^2=AB^2$$

$$9+a^2+\frac{9}{a^2}+a^2+6=\frac{81}{x^2}$$

$$\cancel{9+a^2+\left(a+\frac{3}{a}\right)^2=\left(x+\frac{9}{x}\right)^2}$$

99

$$2a^2+15+\frac{9}{a^2}=\frac{81}{x^2}$$

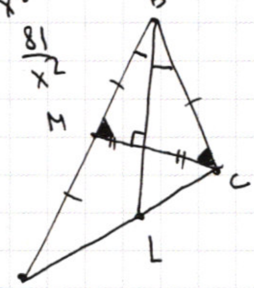
$$\cancel{9+a^2+a^2+\frac{9}{a^2}+6=x^2+\frac{81}{x^2}+18}$$

$3a>b$

$$15+\frac{2}{3}x^2+\frac{27}{x^2}=\frac{81}{x^2}$$

$$\cancel{2a^2+\frac{9}{a^2}=3+x^2+\frac{81}{x^2}}$$

=



$$\frac{2}{3}x^2-\frac{54}{x^2}+15=0$$

$$\cancel{2a^2+\frac{9}{a^2}=3+3a^2+\frac{27}{a^2}}$$

$$x^2=t$$

$$\cancel{a^2+3+\frac{18}{a^2}=0}$$

$a, 2a, b$

$a+b>2a \Rightarrow \boxed{b>a}$

$$\frac{2}{3}t-\frac{54}{t}+15=0$$

$$(1)-(2') \quad y^2-5xy+2x+y-2-2y^2+8x+8y-6=0$$

$$-y^2-5xy+10x+9y-8=0$$

$$\frac{2}{3}t^2+15t-54=0$$

$$D=15^2+\frac{8}{3}\cdot 54=225+8\cdot 18=225+80+64=305+64=369=3\cdot 123=9\cdot 41$$

$$t=\frac{-15\pm\sqrt{D}}{4/3}=\frac{-45\pm 9\sqrt{41}}{4}$$

$$2x^2+y^2+6x+5y-10x-9y=0$$

$$t\geq 0 \Rightarrow t=\frac{9\sqrt{41}-45}{4} \Rightarrow x^2=t=\frac{9\sqrt{41}-45}{4}$$

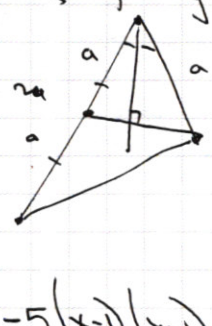
$$2x^2+y^2-4x-4y=0$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $y-2x\geq 0 \Rightarrow y\geq 2x$

$xy-2x-2y+2\geq 0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-4-$



$$(1)\quad y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2 \Rightarrow 4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$$

$$(2)\quad 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \Rightarrow (2')\ 4x^2+2y^2-8x-8y+6=0$$

$$x(2x+1)-5(x-1)(y-1)=0$$

$$(1)-(2)\quad 2x^2-5xy+2x+y-2+4x+4y-3=0$$

$$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$$

$$2x^2+x-5(xy-x-y+1)=0$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)