МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

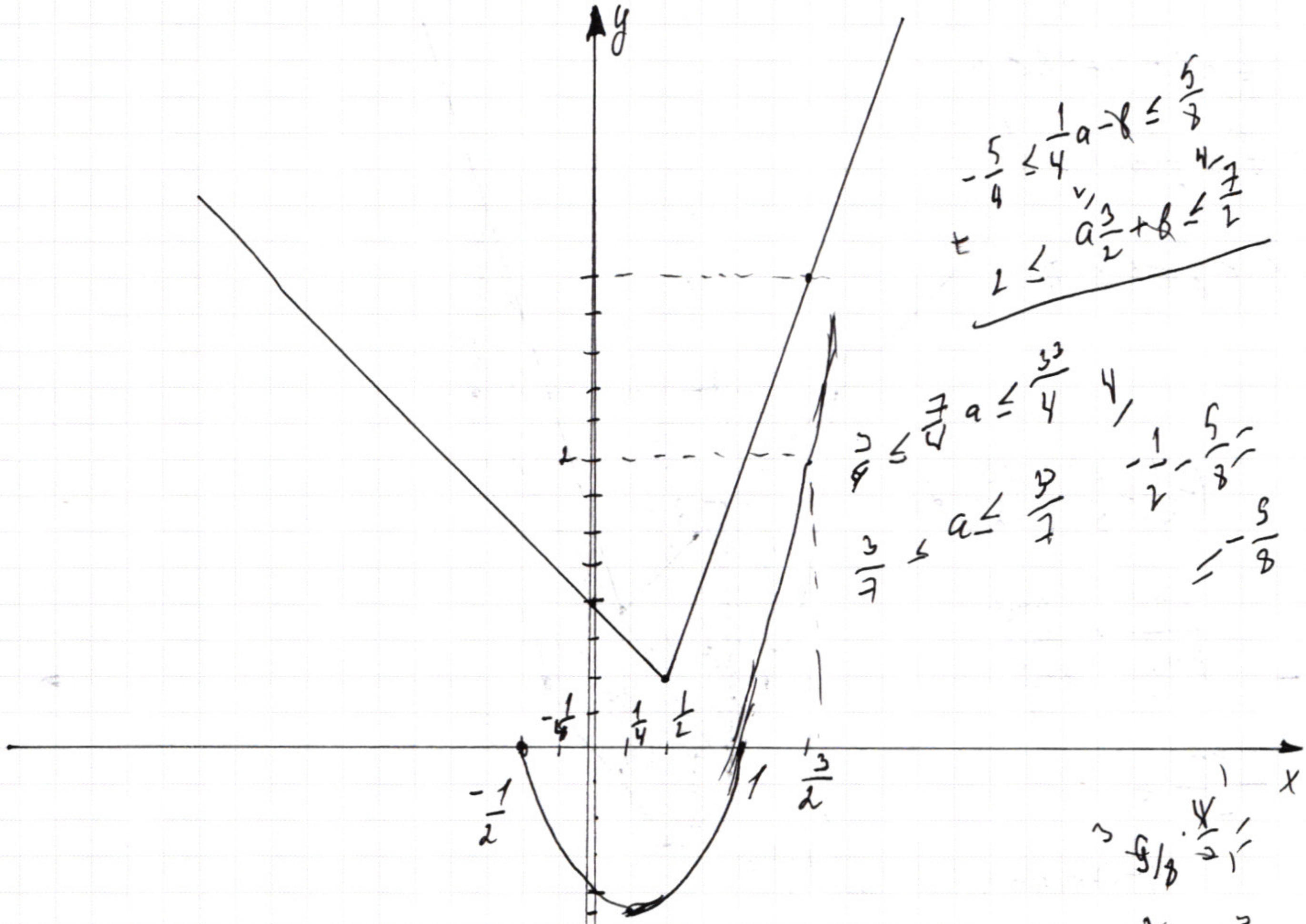
   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-\frac{5}{4} \le \frac{1}{4}a - b \le \frac{5}{8}$

$a\frac{3}{2} + b \le \frac{7}{2}$

$2 \le$

$\frac{3}{4} \le \frac{7}{4}a \le \frac{33}{4}$

$\frac{3}{7} \le a \le \frac{33}{7}$

$-\frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{9}{8}$

$\frac{9}{8} \cdot \frac{4}{2}$

$\frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$

$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 =$

$2x^2 - x - 1$

$x = 1; -\frac{1}{2}$

$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 2$

$$x + |2x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & x \ge \frac{1}{2} \\ -x + 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$

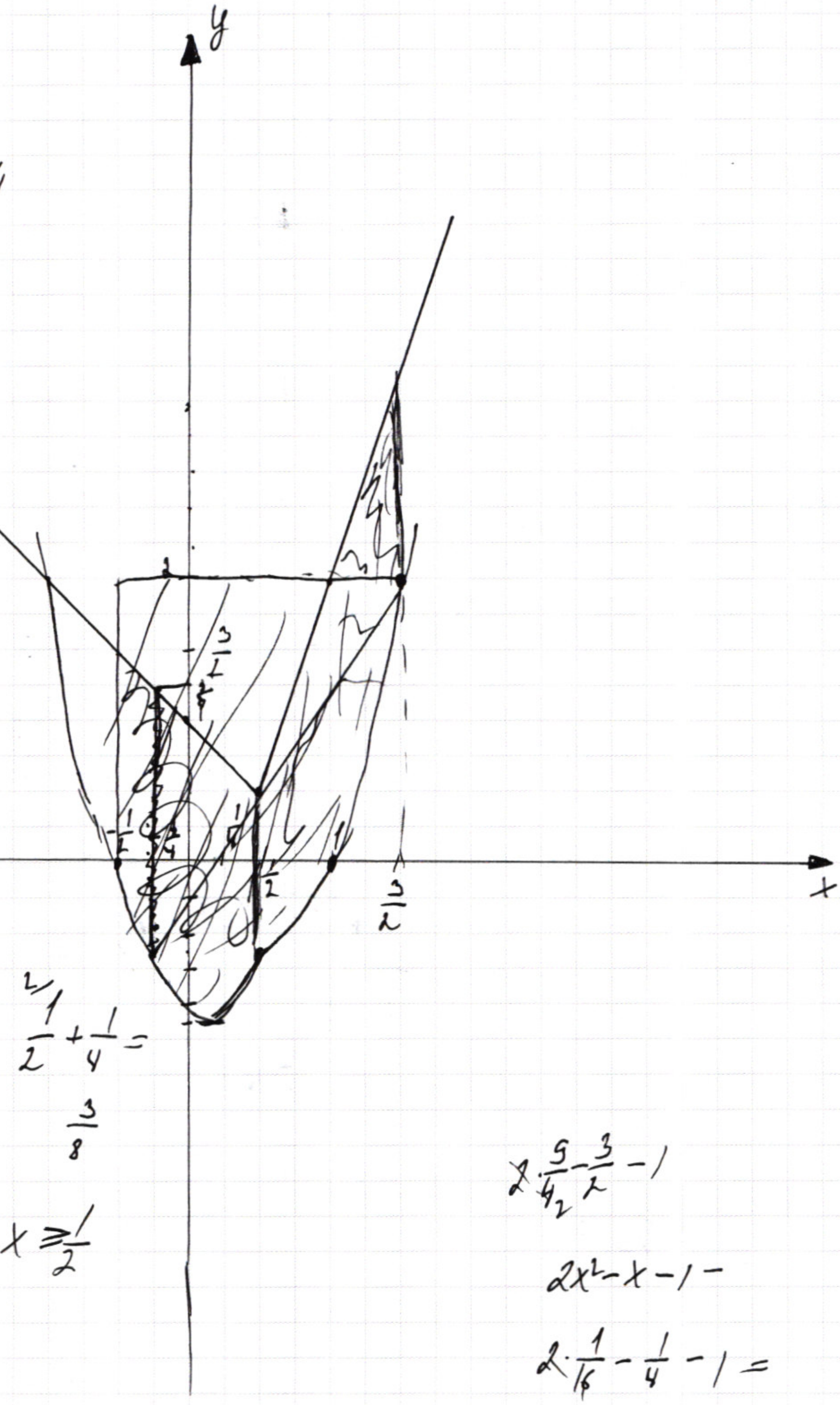
f

$-\frac{5}{8} \le a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+b \le 5/4$

$\cancel{-\frac{5}{2} \le -a+4b \le 5}$

$-\frac{5}{8} \le \frac{1}{2}a+b \le \frac{1}{2}$

$2 \le \frac{3}{2}a+b \le \frac{5}{4}$



$\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right); \left(\frac{3}{2}; 2\right)$

$\frac{x+\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{y+\frac{5}{8}}{2+\frac{5}{8}}$

$\frac{4x+1}{7} =$

$x-2x+1=-x+1$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

$\frac{3}{8}$

$x+2x-1=3x-1, \ x \ge \frac{1}{2}$

$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1=\frac{3}{8}-1$

$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1=$

$=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$

$2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1$

$2x^2-x-1-$

$2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1=$

$=-\frac{9}{8}$

$-\frac{1}{4}$

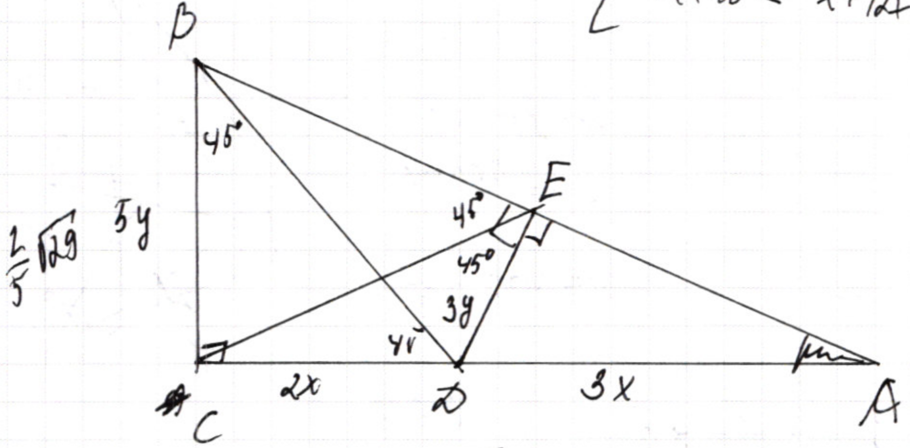
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax + b \\ ax + b \le x + |2x-1| \end{cases}$ $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$



$tg\angle BAC$ - ?

$\cancel{6}\frac{2}{5}$ $\sqrt{29}$

$5y = 2x$

$\cancel{10}$

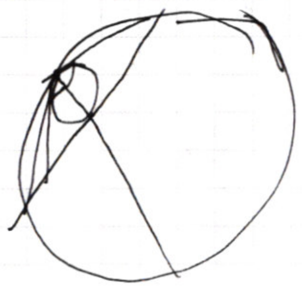
$\boxed{x = \frac{5}{2}y}$

$\frac{5y}{5x} = \frac{y}{x} = \frac{2}{5}$

$2x^2 - x - 1 = f(x)$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$2 \cdot \frac{1}{16} + -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$



$16 + x^2 = 9x^2$

$8x^2 = 16$

$x = \sqrt{2}$

$9x^2 + x^2 = 4$

$10x^2 = 4$

$x^2 = \frac{2}{5}$

$x = \sqrt{\frac{2}{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

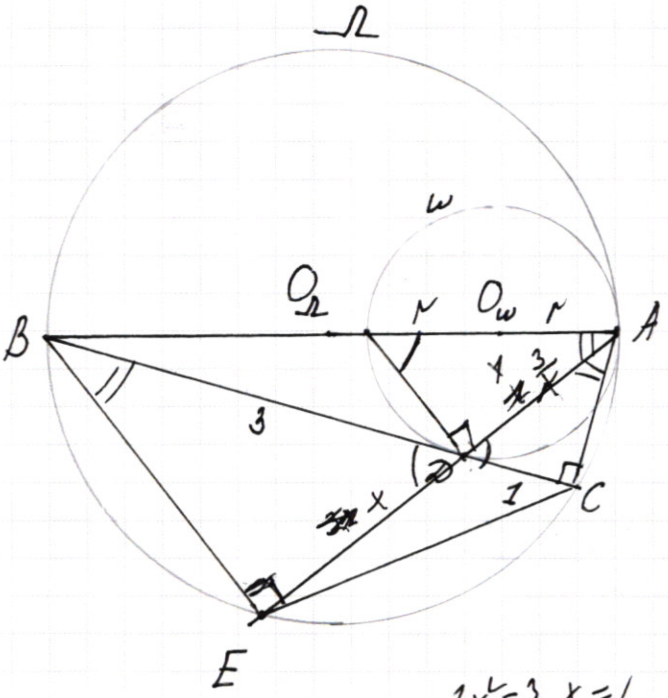
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1200

$3x+y=1200$

$3x=1200-y$

$x=400-\frac{y}{3}$



BACE

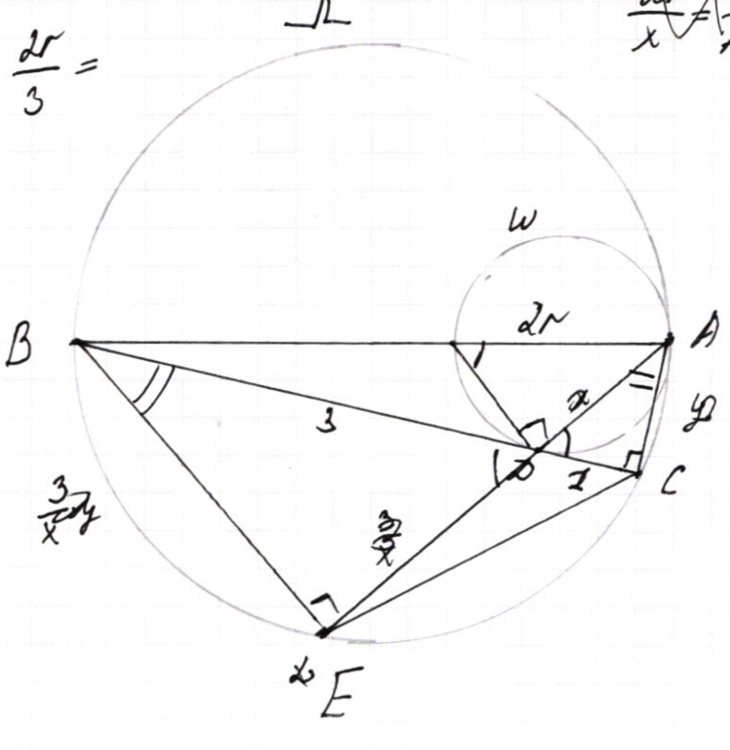
$\frac{2r}{3}=\frac{x}{\frac{3}{x}\cdot y}$

$3x^2=3,\ x=1$

$\frac{BD}{2r}=$

$\frac{2r}{3}=$

$\frac{2r}{x}=\frac{x}{AC}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ $\quad 2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1$

$f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$1 \le x \le 21$

$1 \le y \le 21$

$f(1\cdot 0) = f(1) + f(0)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\boxed{f(1) = 0}$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$x = 2:$

$2\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1$ $\quad f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$1 + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) < -1$

$2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 =$

$f(y) > 1$

$= -\frac{5}{8}$

$\frac{13}{7}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$x = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}\cdot 7^{\delta}\cdot 11^{\varepsilon}\cdot 13^{\zeta}\cdot 17^{t}\cdot 19^{e}$

12 13 14 15 16 17

$4{,}5 - 1{,}5 =$

$= 3$

18 19 20 21

$\frac{3}{7} \le a \le$

$-\frac{5}{4} \le \frac{1}{4}a - b \le \frac{5}{8}$ $\quad 2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 =$

$+$

$= 2$

$2 \le \frac{3}{2}a + b \le \frac{7}{2}$ $\quad \frac{3}{4} \le \frac{7}{4}a \le \frac{33}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6

прямая ABC удв. условиям

$A\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$

$B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

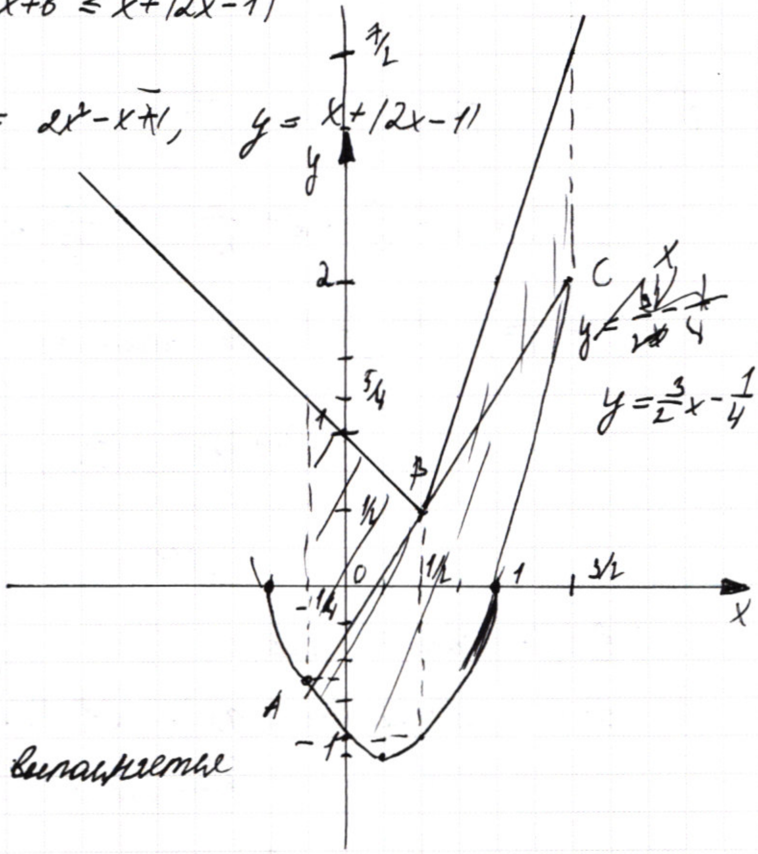
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№6

(a, b) $\quad \forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$ верно

$$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$$

Построим графики $y = 2x^2 - x \mp 1$, $\quad y = x + |2x-1|$



$x_0 = \frac{1}{4}; \; y_B = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$

$y = 2x^2 - x \mp 1$

$x = 1; \; -\frac{1}{2}$ - корни, $\; y(0) = -1$

$$y = x + |2x-1| = \begin{cases} 3x - 1, & x \ge \frac{1}{2} \\ -x + 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

нер-во означает, что прямая целиком лежит в заштр. области, значит выполняется

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} \le a\left(-\frac{1}{4}\right) + b \le \frac{5}{4} & (1) \\ -1 \le a \cdot \frac{1}{2} + b \le \frac{1}{2} \; |\cdot(-1), \quad -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2}a - b \le 1 & (2) \\ 2 \le a \cdot \frac{3}{2} + b \le \frac{7}{2} & (3) \end{cases}$$

(1)+(2):

$-\frac{9}{8} \le a\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \le \frac{9}{4}$

$-\frac{9}{8} \le a \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \le \frac{9}{4}$

$\cancel{\ldots \le a \le \frac{13}{6}}$

$\boxed{-3 \le a \le \frac{3}{2}}$

(2) + (3):

$\boxed{\frac{3}{2} \le a \le \frac{9}{2}}$

$\boxed{a = \frac{3}{2}} \rightarrow \begin{cases} -\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \le b \le \frac{5}{4} + \frac{3}{8} \\ -1 - \frac{3}{4} \le b \le \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \\ 2 - \frac{9}{4} \le b \le \frac{7}{2} - \frac{9}{4} \end{cases}$

$y = \frac{3}{2}x + b$

$\begin{cases} -\frac{1}{4} \le b \le \frac{13}{8} \\ -\frac{7}{4} \le b \le -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \le b \le \frac{5}{4} \end{cases}$ $\quad \boxed{b = -\frac{1}{4}}$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ действ. лежит в искомой области

$\boxed{\text{Ответ: } \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{6}}$, $y = 2 - \frac{4}{\sqrt{6}}$

$y - 2x = \cancel{2} - \frac{4}{\sqrt{6}} - \cancel{2} + \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{2}{\sqrt{6}} < 0$, значит (1) не вып.

$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}};\ 2 - \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$ – не решение

Ответ: $(0;1)$; $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{6}};\ 2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$

N1

a, b, c, d – геом. прогр.

d – d – корень $ax^2 + 2bx + c = 0$ c – ?

Решение:

1) если $a = 0$, то $b = c = d = 0$ и d – корень: $0 + 0 + 0 = 0$

2) $a \neq 0$: $ax^2 + 2bx + c = 0$ – квадр. ур-е

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = 0$, $x_0 = \frac{-b}{a} = d$

по характ. св-ву геом. прогр. $b^2 = ac$

Итак $a, b, c, -\frac{b}{a}$ – геом. прогр.

~~$\frac{c}{\frac{b}{a}} =$~~ Подставим x_0 в ур-е:

$a \cdot \frac{b^2}{a^2} - \frac{2b^2}{a} + c = 0$, $c = \frac{b^2}{a}$

$a, b, \frac{b^2}{a}, -\frac{b}{a}$

$c^2 = bd$, $\frac{b^4}{a^2} = -\frac{b^2}{a}$, $\left(\frac{b^2}{a}\right)^2 + \frac{b^2}{a} = 0$ $\left[\begin{array}{l} c = 0 \text{ не подх. (иначе } a = b = d = 0) \\ c = -1 \end{array}\right.$

Ответ: -1

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases},\quad y^2-4y+2x^2-4x+3=0$$

$$\cancel{\frac{D}{4}=4-2x^2+4x-3=-2x^2+4x+1}$$

(1): $\Rightarrow\quad (y-2x)^2=xy-2x-y+2$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$

$y^2-(5x-1)y+4x^2+2x-2=0$

$D=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=9x^2-18x+9=9(x-1)^2$

$$y=\frac{5x-1\pm(3(x-1))}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{5x-1+3x-3}{2}=4x-2\\ \frac{5x-1-3x+3}{2}=x+1\end{array}\right.$$

(модуля нет, т.к. перед ним знак $\pm$)

I) $y=4x-2$: подст^{a}в. во (2):

$(4x-2)^2-4(4x-2)+2x^2-4x+3=0$

$16x^2-16x+4-16x+8+2x^2-4x+3=0$

$18x^2-36x+15=0\ /:3$, $6x^2-12x+5=0$ $\frac{D}{4}=36-30=6$

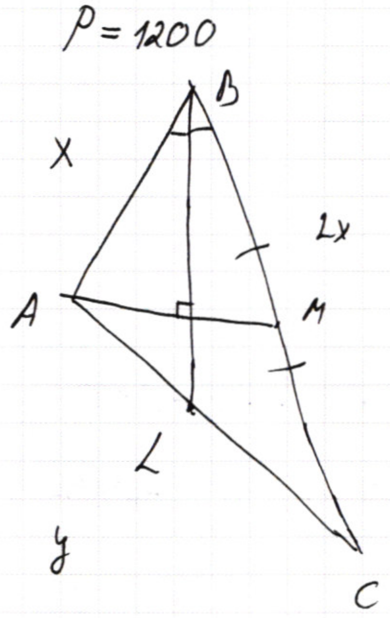
$x=\frac{6\pm\sqrt{6}}{6}=1\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=2\pm\frac{4\cdot 1}{\sqrt{6}}$

II) $y=x+1$: подст. в (2):

$(x+1)^2-4(x+1)+2x^2-4x+3=0$, $x^2+2x+\cancel{1}-4x-\cancel{4}+2x^2-4x+\cancel{3}=0$

$3x^2-6x=0$, $\left[\begin{array}{l}x=0,\ y=1\\ x=2,\ y=3\end{array}\right.$

№2



ΔABM - р/б (бисс. явл. выс.)

$AB = BM$

Пусть $AB = BM = x$. $\overset{B}{\cancel{A}}C = 2x$; $AC = y$

$P = 3x + y = 1200$

и нер-во Δ-ка: $\begin{cases} y + 2x > x, \text{ верно всегда} \\ 3x > y \\ y + x > 2x \end{cases}$

$$\begin{cases} y < 3x \\ y > x \end{cases}$$

Получаем систему $(x, y \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} 3x + y = 1200, \ y = 1200 - 3x \\ y < 3x, \ 1200 - 3x < 3x, \ 6x > 1200, x > 200, \ x \geq 201 \\ y > x, \ 1200 - 3x > x, \ 4x < 1200, \ x < 300, \ x \leq 299 \end{cases}$$

x - можно выбрать $299 - 201 + 1 = 99$ сп.

по x однозначно задаётся y

причём мы все такие Δ-ки посчитали 1 раз

Ответ: 99

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проверка: 1) $(0;1)$: $\begin{cases} 1-0=\sqrt{0-0-1+2}=1 \; \oplus \\ 2\cdot 0+1-4\cdot 0-4\cdot 1+3=0 \; \oplus \end{cases}$

$(0;1)$ – решение

2) $(2,3)$: $\left\{ \cancel{3-2\cdot 2} \right.$ –

$y-2x=3-4<0$, значит (1) не вып.

$(2;3)$ – ~~р~~ не решение

3) $x=1+\frac{1}{\sqrt6}$, $y=2+\frac{4}{\sqrt6}$

$$\begin{cases} \cancel{2}+\frac{4}{\sqrt6}-\cancel{2}-\frac{2}{\sqrt6}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt6}\right)\left(2+\frac{4}{\sqrt6}\right)-2-\frac{2}{\sqrt6}-\cancel{2}-\frac{4}{\sqrt6}+\cancel{2}} \quad (1) \\ 2\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt6}\right)^2+\left(2+\frac{4}{\sqrt6}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{\sqrt6}\right)-4\left(2+\frac{4}{\sqrt6}\right)+3=0 \quad (2) \end{cases}$$

(1):

$$\frac{2}{\sqrt6}=\sqrt{\cancel{2}+\cancel{\frac{6}{\sqrt6}}+\frac{4}{6}-\cancel{2}-\cancel{\frac{6}{\sqrt6}}}=\frac{2}{\sqrt6} \quad \text{верно}$$

(2): $$2\left(\overset{6}{1}+\frac{2}{\sqrt6}+\frac{1}{6}\right)+\left(4+\frac{16}{\sqrt6}+\frac{16}{6}\right)-4\left(1+\frac{1}{\sqrt6}+2+\frac{4}{\sqrt6}\right)+3=0$$

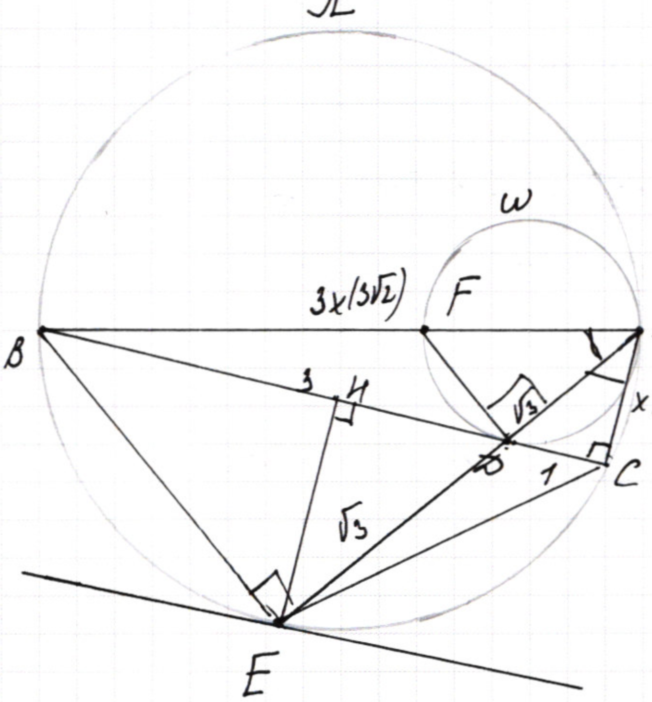
$$\cancel{\frac{7}{3}}+\cancel{\frac{4}{\sqrt6}}+\cancel{\frac{20}{3}}+\cancel{\frac{16}{\sqrt6}}-\cancel{12}-\cancel{\frac{20}{\sqrt6}}+\cancel{3}=0$$

$0=0$ ист.

$\left(1+\frac{1}{\sqrt6};\ 2+\frac{4}{\sqrt6}\right)$ – решение.

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\,24 \\ \hline 40 \end{array}$$

№5



r_ω, R_Ω – ?

S_{BACE} – ?

Решение:

1) по лемме Архимеда AD – бисс. $\angle BAC$

~~2)~~ Для док-ва этой теоремы нужно выполнить гомотетию с цент. в т. A, переводящую ω в Ω т. к. D, E, A леж на одной прямой. Тогда кас. BC перейдет в кас. к E Ω и они параллельны ~~⇒~~ значит $\breve{BE}=\breve{CE}$ ч.т.д.

2) $\angle BCA = 90^\circ$, т.к. опир. на диам. Ω

3) по св-ву бисс. $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{3}{1}$.

4) Пусть $AB=3x$, $AC=x$. По th. Пиф $\triangle ABC$: $9x^2=16+x^2$, $x=\sqrt{2}$

5) th. Пиф $\triangle ADC$: $AD=\sqrt{DC^2+AC^2}=\sqrt{3}$.

6) из свойства хорд: $BD\cdot DC=AD\cdot DE$, $3=\sqrt{3}\cdot DE$, $DE=\sqrt{3}$

7) $S_{BEC}=S_{ABC}$, EH-выс. $\triangle BEC$, $\triangle EHD=\triangle ADC \Rightarrow EH=AC$ т.т. $S_{BEC}=S_{ABC}$

8) $S_{BACE}=2S_{ABC}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC=4\sqrt{2}$

9) $R_\Omega=\frac{AB}{2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

10) $F=(AB\cap\omega)\setminus\{A\}$

11) по св-ву кас. окр. AF – тоже диам. $r_\omega=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

12) $\cos\angle DAC=\sqrt{\frac{2}{3}}$. из $\triangle DFA$: $AF=2r_\omega=\frac{AD}{\cos\angle FDA}=\frac{AD}{\cos\angle DAC}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

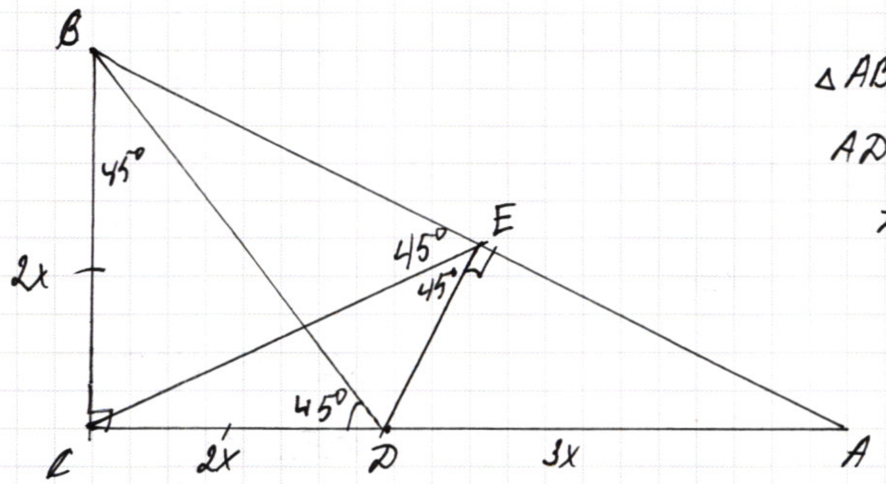
Ответ: $r_\omega=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$R_\Omega=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$S_{BACE}=4\sqrt{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4



$\triangle ABC$

$AD:AC=3:5$

$DE \perp AB$

а) $tg\angle BAC - ?$

б) $S_{CED} - ?$

а) 1) $BEDC$ - впис. $\Rightarrow \angle CBD = \angle CED = 45^\circ$

$\angle C + \angle BED = 180^\circ$

2) $\triangle BCD$ равноб. ~~пр~~, значит $BC = CD$

3) Пусть $AD = 3x$. Тогда ~~AD~~ $AC = 5x$, $DC = 2X$

4) $BC = CD = 2x$

5) $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5}$ $\boxed{tg\angle BAC = \frac{2}{5}}$

б) 6) $BC = tg\angle BAC \cdot AC = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

7) по th. Пиф $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 29 + 29 \cdot \frac{4}{25} = \frac{29 \cdot 29}{25}$

$AB = \frac{29}{5}$

8) $\triangle DEA \sim \triangle ABC$ (по 2 углам):

$\frac{DA}{AB} = \frac{EA}{AC}$, $\frac{\frac{3}{5}\sqrt{29}}{\frac{29}{5}} = \frac{EA}{\sqrt{29}}$, ~~$3\sqrt{29} = \frac{EA}{\sqrt{29}}$, $EA = 3\sqrt{29}$~~

$DA = \frac{3}{5}AC = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

$\frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{EA}{\sqrt{29}}$, $\boxed{EA = 3}$

9) $S_{ABC} = BC \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{5}$

10) $S_{DEA} = \frac{EA}{AB} \cdot S_{ABC} = \frac{3}{\frac{29}{5}} \cdot \frac{29}{5} = 3$ (общ. выс)

11) $S_{CED} = \frac{\cancel{2}CD}{DA} \cdot S_{DEA} = 2$ (общ. выс)

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$; б) $S_{CED} = 2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

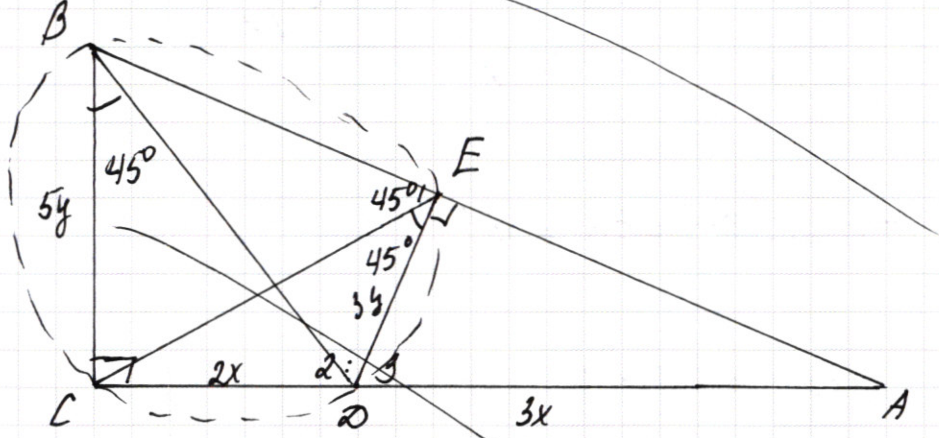
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4



$AD : AC = 3 : 5$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 45^\circ$

а) $tg\angle BAC$ - ?

б) $AC = \sqrt{29}$

S_{CED} - ?

Решение:

а) 1) чет-к $BEDC$ - впис., т.к. $\angle C + \angle BED = 180^\circ \Rightarrow \angle CBD = \angle CED = 45^\circ$

2) Пусть $AD = 3x \Rightarrow AC = 5x$, $CD = 2x$

3) $\triangle AED \sim \triangle ABC$ по 2 углам: $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, $\frac{3x}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{5x}$

Пусть $DE = 3y$. Тогда из подобия $\triangle AED$ и $\triangle ABC$ $BC = 5y$

+ 4) $\triangle BCD$ равноб. с углами $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$: $5y = 2x$, $x = \frac{5}{2}y$

5) $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{y}{x} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

б) 6) $BC = AC \cdot tg\angle BAC = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29}$

7) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29} = \frac{29}{5}$

8) $S_{CEA} = \frac{EA}{AB} \cdot S_{ABC}$

т.к. общ. выс.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$f(a) \mp f(b) = f(ab)$ $\forall p$ - простого $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$x \in [1;21]$

$y \in [1;21]$

$f(x/y) < 0$

Решение:

$a = y,\ b = \frac{1}{y}$:

$f(1/y \cdot y) = f(y) + f(1/y)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$\cancel{a=0,\ b=1}$

$\cancel{f(0)+f(1)=f(1\cdot 0)}$

в $a = 2$: $f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$

$b = 1$:

$f(2) + f(1) = f(2)$

$\boxed{f(1) = 0}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, $f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(x) < f(y)$

~~если~~ на промежутке $[1;21]$ простые числа - 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

если $x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \cdot 13^{\alpha_6} \cdot 17^{\alpha_7} \cdot 19^{\alpha_8}$, то

$f(x) = \alpha_1 \cdot \left[\frac{2}{2}\right] + \alpha_2\left[\frac{3}{2}\right] + \ldots \alpha_8 \left[\frac{19}{2}\right]$

Это следует из $f(ab) = f(a) + f(b)$

каждый раз уменьш. степень простого числа, ~~при этом~~ $f($

$y = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot 19^{\beta_8}$

1) $y = 19$: $f(y) = \left[\frac{19}{2}\right] = 9$