МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

~~№1~~

~~1 член a b c~~

~~a a $a\cdot d$ ad^2~~

№1

a_1 a_2 a_3 a_4

a $a\cdot d=b$ $c=ad^2$ $a\cdot d^3=x$

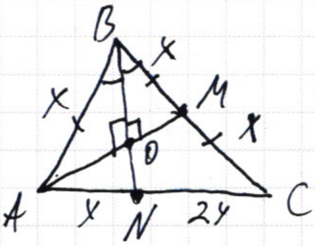
$ax^2+2bx+c=0 \Leftrightarrow a^3d^6+2a^2d^4+ad^2=0$;

$c^3+2c^2+c=0$; $c\cdot(c^2+2c+1)=0$; $c\cdot(c+1)(c+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c=0;-1$

Ответ: $c=0$ или -1.

№2



$BN\perp AM$; $\Rightarrow \angle BOM=\angle AOB=90^\circ$;

$\angle ABO=\angle CBO$ (свой. биссект.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AOB=\triangle BOM$ (по УСУ) $\Rightarrow BM=AB=x$;

$\frac{AN}{CN}=\frac{AB}{BC}$ (свой. биссект.) $\Rightarrow CN=2AN=2y$;

$P_{ABC}=3x+3y=1200 \Rightarrow x+y=400$; $x\in N$;

$x+2x>3y$; $x>y$ (свойс. $\triangle$); $x+3y>2x$; $x<3y$; $y\in N$;

$x>y \Rightarrow x+y>2y \Rightarrow 400>2y \Rightarrow y<200$; $x<3y \Rightarrow x+y<4y \Rightarrow 400<4y \Rightarrow$

$\Rightarrow y>100$; $100<y<200$ и $y\in N \Rightarrow$ всего 99 значений

$y \Rightarrow$ 99 подходящих $\triangle$.

Ответ: 99.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

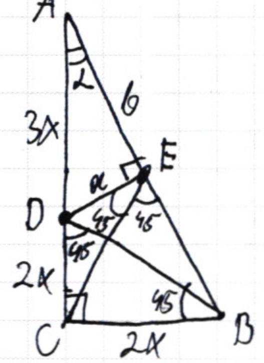
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: $\triangle ABC$ - прям.; AB - гипотен.; $D \in AC$; $E \in AB$; $DE \perp AB$; $AD : AC = 3:5$; $\angle CED = 45$

Найти: $tg\,\angle BAC = tg\,\alpha$

Решение: $\angle ACB = \angle BED = 90 \Rightarrow \angle ACB + \angle BED = 180 \Rightarrow BCDE$ - впис. четыр.; $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CED = \angle CBD = 45°$ и $\angle BDC = \angle DEC = 45° \Rightarrow \triangle BCD$ - равнобед. $\Rightarrow$

$CD = BC = 2x$; $tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \cancel{2x}\frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

б) $AC = \sqrt{29}$

Найти: S_{CED}

Решение: $5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$; $AB = \sqrt{25x^2 + 4x^2} = \sqrt{29}\cdot x$;

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (по 2-ум $\angle$) $\Rightarrow \frac{a}{2x} = \frac{3x}{\sqrt{29}\cdot x}$; $a = \frac{6}{\sqrt{29}}\cdot x = 1{,}2$; $b = \frac{a}{tg\,\alpha} = \frac{1{,}2\cdot 5}{2} = 3$; $\angle AEC = 180 - 45 = 135°$;

$\angle ADB = 180 - 45 = 135° \Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle ADB$ (по 2-ум углам) $\Rightarrow$

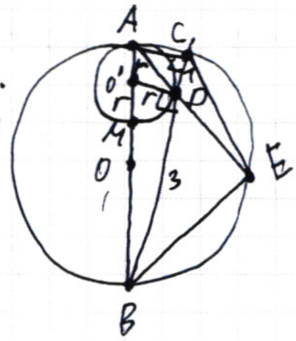
$\Rightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE} = \frac{3x}{3} = x$; $BD = 2\sqrt{2}\cdot x$; $\frac{2\sqrt{2}\cdot x}{CE} = x$; $CE = 2\sqrt{2}$;

$S_{CED} = \sin\angle CED \cdot DE \cdot CE \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1{,}2 \cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = 1{,}2$

Ответ: $tg\,\alpha = \frac{2}{5}$; $S_{CED} = 1{,}2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Дано: $\Omega(O;OA)$ и $\omega(O';O'A)$; BC – хорда Ω;
BC касат. ω; D – точка касан.;
$BD=3$; $CD=1$; $AD\cap\Omega=E$;
Найти: R; r; S_{BACE}

Решение: $BM=a$; $\triangle ABC$ постр. на диам. окр. $\Rightarrow \triangle ABC$ – прям. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ACB=90^0$; $O'D\perp BD$ (свой. касат.) $\Rightarrow \angle BDO'=\angle ACB=90^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BDO' \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{BD}{BO'}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow \frac{3}{a+r}=\frac{4}{a+2r}\Rightarrow 3a+6r=4a+4r \Rightarrow$
$\Rightarrow a=2r$; $BM\cdot AB=BD^2$ (теор. о кас. и сек.) $\Rightarrow a\cdot(a+2r)=3^2$;
$2r\cdot(2r+2r)=9$; $8r^2=9$; $r=\frac{3}{2\sqrt2}$; $a=\frac{3}{\sqrt2}$; $a+2r=2R\Rightarrow$
$\Rightarrow R=\frac{a+2r}{2}=\frac{3}{\sqrt2}$;
$\cos\angle BO'D=-\cos(180-\angle BO'D)=\frac{O'D}{O'B}=\frac{\frac{3}{2\sqrt2}}{\frac{3}{\sqrt2}+\frac{3}{2\sqrt2}}=\frac13$;
$\cos\angle AO'D=-\frac13$; $AD=\sqrt{2r^2-2\cos\angle AO'D\cdot r^2}$;

$AD=\sqrt{2\cdot\frac98+2\cdot\frac13\cdot\frac98}=\sqrt3$; $BD\cdot CD=AD\cdot DE$ (свой. хорд);
$DE=\frac{BD\cdot CD}{AD}=\frac{3\cdot1}{\sqrt3}=\sqrt3$; $AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt2$; $\sin\angle ADC=$
$=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$; $S_{BACE}=\sin\angle ADC\cdot BC\cdot AE$; $S_{BACE}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\cdot4\cdot2\sqrt3=$
$=8\sqrt2$

Ответ: $r=\frac{3}{2\sqrt2}$; $R=\frac{3}{\sqrt2}$; $S_{BACE}=8\sqrt2$

№7

~~Если~~ $f(2)=\left[\frac{2}{2}\right]=1$ ~~...~~; $f(2)=f(1)+f(2) \Rightarrow f(1)=0$;

$f(3)=1$; $f(5)=2$; $f(7)=3$; $f(11)=5$; $f(13)=6$; $f(17)=8$; $f(19)=9$.

Остальные значения $f(a)$, при $1<a\leq 21$ можно получить, складывая $f(p)$, при p-простом, которые написаны выше.

Получаем:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f(a)$	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

$f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(y)>f(x)$, ~~при при x>y~~

при $1\leq x,y\leq 21$.

Т.к. $f(p)$, где p-простые ~~возрастающая~~ неубывающая функция, то $f(a)$, где a-составные, также неубывает

Вариантов выбрать x при:

$f(y)=9$ — 20

$f(y)=8$ — 19

$f(x)=6$ — 18

$f(y)=5$ — 17

$f(y)=4$ — 13

$f(y)=3$ — 7

$f(y)=2$ — 3

$f(y)=1$ — 1

$f(y)=0$ — 0

$20+19+18+17+13+7+3+1+0 = 98$ пар натуральных $(x;y)$

Ответ: 98 пар.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

№ ~~2~~ 6

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b$; $2x^2 - (a+1)x - (b+1) \leq 0$;

~~a~~ $D = a^2 + 2a + 1 + 8b + 8 \leq 0$;

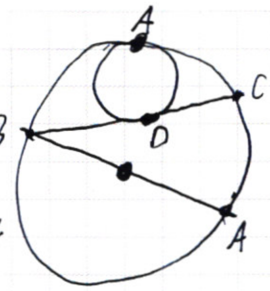
~~$b \geq -\frac{a^2+2a+1}{}$~~ $b \leq -\frac{a^2+2a+1}{8} - 1$;

$ax + b \leq x + |2x - 1|$; ~~пр~~

1) при $x \geq 0{,}5$

$-(a-3)x - (b+1) \geq 0$; $b \leq -(a-3)x - 1$

$-(a-3)x-(b+1)\geq 0$; $x>0{,}5$; $b\geq -\dfrac{a^2+2a+1}{8}-1$

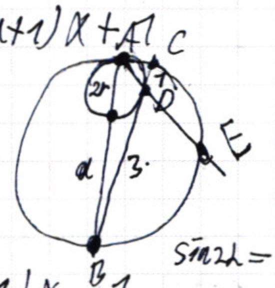


$-(a+1)x-(b-1)\geq 0$; $x<0{,}5$ $\qquad \dfrac{a+r}{a+2r}=\dfrac{3}{4}$ $a^2=4{,}5$; $a=3\sqrt{0{,}5}$

$3a+6r=4a+4r$; $a=2r$ $\qquad 9=a\cdot 2a$;

$2a=2R$; $b\leq -(a-3)x-1$ $\qquad 0\geq -\dfrac{a^2+2a+1}{8}+(a-3)x$ $\quad 2R=3$

$a=R$ $\qquad b\leq -(a+1)x+1$ $\qquad a+2r=2R$



$x\leq \dfrac{a^2+2a+1}{8(a-3)}$ $\quad a=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ $\quad a\cdot 2R=9$

$b\geq -\dfrac{a^2+2a+9}{8}$

$4a-12\leq a^2+2a+1$ $\quad r=0{,}5$

$\sin 2\angle=\dfrac{r}{a+r}$

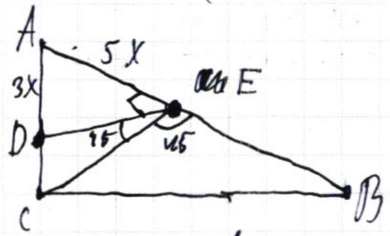
$\dfrac{a^2+2a+9}{8}\geq (a+1)x-1$ $\qquad (a-1)^2\geq -12$ $\quad a=1{,}5$

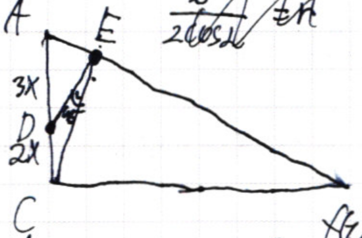
$a\in N$ $\quad 3r\cdot 6r=9$

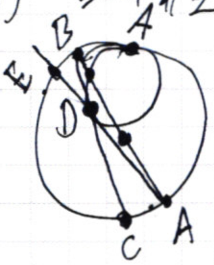
$x\leq \dfrac{a^2+2a+17}{8(a+1)}$ $\qquad r^2+9=a^2+2ar$ $\qquad 12a-36\leq a^2+2a+1$

$\dfrac{b}{\sin 2\angle}=\dfrac{r}{\sin\angle}$ $\qquad (a-5)^2\geq -12$ $\quad a\cdot(a+2r)=9$

$\dfrac{b}{2\cos\angle}$







$\dfrac{3}{a+r}=\dfrac{a+2r}{4}$

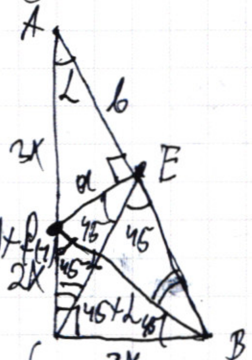
$a^2+3ar+2r^2=12$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f(1)=2\cdot f(0{,}5)$

$\dfrac{b}{\sin 2\angle}=\dfrac{r}{\frac{\sin 2\angle}{2\cos\angle}}$ $\qquad \operatorname{tg}\angle=\dfrac{a}{b}$ $\quad a^2+b^2=9x^2$

$\dfrac{\frac{15\cdot\sqrt{29}\cdot x}{4}}{3x}=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$



$f(8)=$

$\dfrac{a}{b}\cdot 5x:\dfrac{1}{a}=\dfrac{5x}{b}$

$f(2)=f(2)+f(1)$

$b=ad$ $\qquad f(1)=0$ $\qquad 5x\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}=$

$c=ad^2$ $\qquad \operatorname{tg} BAC\cdot 5x=2x$

$ax^2+2adx+ad^2=0$ $\qquad f(4)=f(0{,}5)+f$ $\qquad f(4)=2$ $\qquad f(6)=2$

$x=ad^3$ $\qquad \sqrt{29}x$ $\quad f(2)=f(4)+f(0{,}5)$ $\quad \sqrt{29}$ $\qquad b=\dfrac{15\sqrt{29}x}{4}$

$x=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$

$a^3d^6+2a^2d^4+ad^2=0$ $\qquad \dfrac{2x}{a}=\dfrac{\sqrt{29}\cdot x}{3x}$; $a=\dfrac{3\sqrt{29}}{2}$ $\quad \dfrac{5}{\sqrt{29}}x=$

$x^3+2x^2+x=0$

$x\cdot(x^2+2x+1)=0$ $\qquad x=-1$ $\quad (a+r)\cdot 9=12a$ $\quad b=\dfrac{15}{\sqrt{29}}x$

$f(2)=1$ $\qquad f(5)=2$ $\qquad 3a=9r$; $a=3r$

$f(3)=1$ $\qquad f(7)=3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

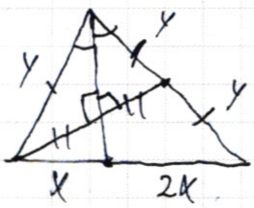
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) = -0{,}5$ $\quad |2x-1| - (a-1)x - b \geq 0$ $\quad 40 \quad 158$

$3(x+y) = 1200; \; x+y = 400 \quad 80 \cdot 18 = 98$



$1 \leq x < 399$ $\quad -0{,}5 \quad 1$

$2x^2 + x - 2x - 1 =$

$f(2) = 1$

$y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$ $\quad = x(2x+1) - (2x+1) = (2x+1)(x-1)$

$(y-4x)(y-x) + 2x + y$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \quad \frac{y}{2} = 2$$

$4x(1-x) + 4x(x-y)$

$y^2 - 4y + 4x^2 - 5xy + 5y$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2x + 3y - 5 = 0 \\ 2x^2 \end{cases} \quad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -1$$

$f(1) = 0 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 1 \quad f(6) = 2 \quad f(0{,}5) = -1 \quad f(4) = 2$

$xy - x - y = 0$

$x(y-1) - (y-1) = 1$

$(x-1)(y-1) = 1$

$x^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 - 5 = 0$

$f(6) = f\left(\frac{6}{2}\right) + f(2)$

$x^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad \frac{x=1}{y=2} \quad 2x(2y-1)$

$y(y-x) - 4x(y-x) = -2x - y + 2 \quad 2xy - 2x - y =$

$(y-x)(y-4x) + 2x + y = 2$

$\frac{20}{21} = \frac{f(2)+f(3)+f(5)}{f(3)+f(7)} = 2x\left(\frac{y}{1+7+2}\right) - (y-1) = 1$

$a^2 + 2a + 1 + 8b + 8 \leq 0$

$y(y-4x) + x(4x-y)$.

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \quad y \neq 1$

$(y-2)^2 + (x-2)^2 - 4xy + 3x^2 = xy + 2x + 3y + \quad + 0$

$f(y) > f(x)$

$2\cdot(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \quad x = 2 \quad y = 3$

$1 > 0$

$f\left(\frac{x}{k}\right) > 0$

$ax + b \geq 2x^2 - x - 1; \; 2x^2 - (a+1)x - (b+1) \leq 0$

$k \neq 0 \quad y > 1 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \quad y > x$

$20 + 19 + 18 + 17 + 13 + 7 + 3 + 1$

0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2 - 4y + 4x^2 - 5xy + 5y + 2x - 2 = 0;$

$y^2 - 4y + 4x(x-1) - 5y\cdot(x-1) + 5\cdot(x-1) + x + 3 = 0;$

$y^2 - 4y + (x-1)(4x - 5y + 5) + x + 3 = 0;$

$(x-1)(4x-5y+5) + x + 4x - 2x^2 = 0;$

$\cancel{(x-1)\cdot(4x-5y+5)}$ $\quad x\cdot(4x-5y+2) + y^2 + y - 2 = 0$ и

$x\cdot(4x-5y+2) + (y+2)(y-1) = 0$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2;$

$x\cdot(2x-4) + (y-1)(y-3) = 0$

$\cancel{x\cdot(-5y+10)} + x\cdot(2x-5y+8) + (y-1)\cdot(y+5) = 0$

$\cancel{-(y-1)^2 = x\cdot(2x-5y+8)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)