МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7

$f(x/y)=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$\neq 0$, т.к. x можно разложить на простые множит.

$f(y\cdot\frac{1}{y})=f(y)+f(\frac{1}{y})=f(1)=0 \Rightarrow f(y)=-f(\frac{1}{y})$

чтобы $f(\frac{x}{y})<0$ $f(x)+f(\frac{1}{y})<0$ $f(x)<f(y)$

$k\in\mathbb{N}$, $k\in[1;21]$ должно выполн. это усл-ие

$f(k)=$

$f(1)=0$	$f(6)=2$	$f(11)=5$	$f(16)=4$	$f(21)=4$
$f(2)=1$	$f(7)=3$	$f(12)=3$	$f(17)=8$	
$f(3)=1$	$f(8)=3$	$f(13)=6$	$f(18)=3$	
$f(4)=2$	$f(9)=2$	$f(14)=4$	$f(19)=9$	
$f(5)=2$	$f(10)=3$	$f(15)=3$	$f(20)=4$	

значение от сост. числа $=\sum$ от всех его простых мн.

$f(p_1\cdot p_2\cdot p_3)=f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$

$k=p_1\cdot p_2\cdot p_3 \Rightarrow f(k)=$

если $x=$, то кол-во пар (n) = кол-ву значений в таблице, больших, чем x

$x=1$	$n=20$	$x=9$	$n=14$
$x=2$	$n=18$	$x=10$	$n=8$
$x=3$	$n=18$	$x=11$	$n=3$
$x=4$	$n=14$	$x=12$	$n=8$
$x=5$	$n=14$	$x=13$	$n=2$
$x=6$	$n=14$	$x=14$	$n=4$
$x=7$	$n=8$	$x=15$	$n=8$
$x=8$	$n=8$	$x=16$	$n=4$
		$x=17$	$n=1$
		$x=18$	$n=8$
		$x=19$	$n=0$
		$x=20$	$n=4$
		$x=21$	$n=4$

$\sum=20+2\cdot 18+3\cdot 14+6\cdot 8+4\cdot 4+$

$+3+2+1=182$

Ответ: 182 пары x и y

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

N ~~8~~1

$a \quad b \quad c \quad d$

$a \quad a\cdot q \quad a\cdot 2q \quad a\cdot 3q$

$ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2aqx+a\cdot 2q=0$

$D=4a^2q^2-4a^2\cdot 2q=(a2\sqrt{q^2-\cancel{8}q})^2$

$x_{1,2}=\frac{-2aq\pm a2\sqrt{q^2-2q}}{2a}=\cancel{\frac{-q\pm 2\sqrt{q^2-8q}}{2}}-q\pm\sqrt{a^2-2q}$

① $\cancel{\frac{-q+\sqrt{q^2-8q}}{2}}=a\cdot 3q$

$\cancel{-q+\sqrt{q^2-8q}=6aq}$

$\cancel{q^2-8q=36a^2q^2+12aq^2+q^2}$

$\cancel{36a^2q^2+12aq^2+8q=0}$

$\cancel{4q^2a^2+3q^2a+2q=0}$

$\cancel{D=9q^4-32q^3}$

① $-q+\sqrt{q^2-2q}=a\cdot 3q$

$q^2-2q=9a^2q^2+6aq^2+q^2$

$9a^2q^2+6aq^2+2q=0$

$D=36q^4-72q^3=(6q\sqrt{q^2-2q})^2$

$a_{1,2}=\frac{-6q^2\pm 6q\sqrt{q^2-2q}}{2q^2}=$

$=\frac{-3q\pm 3\sqrt{q^2-2q}}{q}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad b \quad c$

$a \quad aq \quad a\cdot 2q \quad a\cdot 3q$

$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$

$1 \quad 1\cdot 2 \quad 1\cdot 2\cdot 2 \quad 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

$ax^2+2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac=(2\sqrt{b^2-ac})^2$

$x_{1,2}=\dfrac{-2b\pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$x^2-2x-4=0$ $\quad$ $x^2-2x+1=(x-1)^2$

$D=4+16=20$ $\quad$ $D=4-4=0$

$x_{1,2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt5}{4}$ $\quad$ $x_{1,2}=\dfrac{2}{2}$

$1)\ \dfrac{-6q(q+\sqrt{\ })}{18q^2}=-\dfrac{q+\sqrt{\ }}{3q}$

$2)\ \dfrac{-6q(q-\sqrt{\ })}{18q^2}=-\dfrac{q-\sqrt{\ }}{3q}$

$\dfrac{-a\cdot q\pm\sqrt{a^2\cdot q^2-a\cdot a\cdot 2q}}{a}$

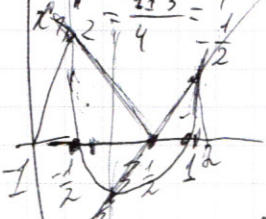
$\dfrac{-a\cdot q\pm a\sqrt{q^2-2q}}{a}=a\cdot 3q$

$-q\pm\sqrt{q^2-2q}=a\cdot 3q$

$2x^2-x-1\le ax+b\le x+|2x-1|$

$D=1+8=9$

$x_{1,2}=\dfrac{1\pm3}{4}=\dfrac{1}{-\frac12}$



$1\ \dfrac{1}{16}\quad \dfrac{1}{1}\quad -\dfrac{1}{\ }\ -1\dfrac{3}{8}$

$2x^2-x-1=3x-1$

$2x^2-4x=0$ $\quad$ $2x^2-x-1=-x+1$

$2x(x-2)=$ $\quad$ $2x^2-2=0$

$2(x^2-1)=0$

$\sqrt{q^2-2q}=a\cdot 3q+q$ $\quad$ $-\sqrt{q^2-2q}=3qa+q$

$-q^2+2q=9q^2a^2+6q^2a+q^2$

$9q^2a^2+6q^2a+2q(q-1)=0$

$q^2-2q=9q^2a^2+6q^2a+q^2$

$9q^2a^2+6q^2a+2q=0$

$D=36q^4-4\cdot2\cdot9\cdot q^3=36q^4-72q^3=(6q\sqrt{q^2-2q})^2$

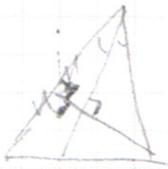
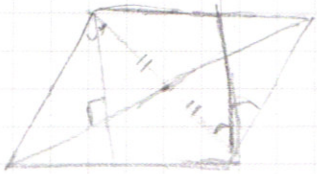
$a_{1,2}=\dfrac{-6q^2\pm 6q\sqrt{q^2-2q}}{18q^2}$

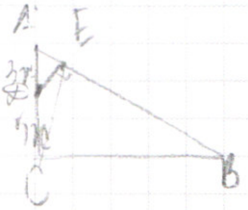
☑ черновик ☐ чистовик

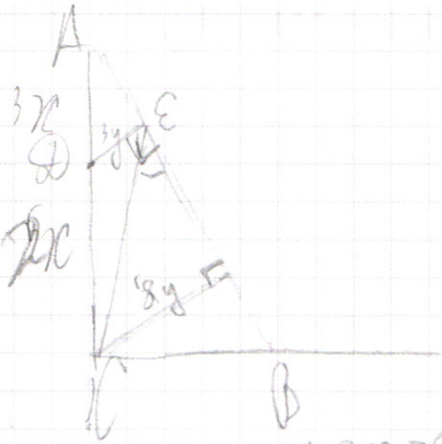
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$y-2x\geq 0$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0$

$y^2+(1-5x)y+4x^2+2x-2=0$

$D=1-10x+25x^2-4(4x^2+2x-2)=$

$9x^2-18x+9=(3(x-1))^2$

$y_{1,2}=\frac{5x-1\pm3(x-1)}{2}=$ $4x-2$ (2), $x+1$ (1)

(1) $2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$x=0$ $y=1$ +

$x=2$ $y=3$ −

(2) $2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0$

$18x^2-36x+15=0$

$6x^2-12x+5=0$

$D=144-4\cdot5\cdot6=24=(2\sqrt{6})^2$

$x_{1,2}=\frac{12\pm2\sqrt{6}}{12}=1\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

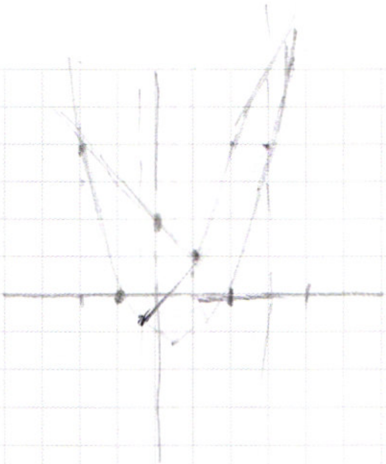
$y=4+2\frac{\sqrt{6}}{3}-2=2\left(1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$y=4-2\frac{\sqrt{6}}{3}-2=2\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$xy-2x-y+2\geq0$

$\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)-2-\frac{\sqrt{6}}{3}-\cancel{2}-\frac{2\sqrt{6}}{3}+\cancel{2}\geq0$

$\cancel{2}+\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{2\cdot6}{18}-\cancel{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\geq0$



$\frac{3}{2}a + b \geq 2 \qquad \frac{3}{2}a + b = 2$

$\frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{2}(1-a)$

$\frac{3}{2}a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a = 2$

$a + \frac{1}{2} = 2$

$a = \frac{3}{2}$

$b = -\frac{1}{4}$

$3a + 2b \geq 4$

$a + 2b \leq 2$

$b \geq 2 - \frac{3}{2}a$

$b \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a$

$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

$-\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{8}$

$a \quad a^2 \quad a^3 \quad a^4$

$$x_{1,2} = \frac{-a^2 \pm \sqrt{a^4 - a^5}}{a} = \frac{-a^2 \pm a^2\sqrt{1-a}}{2a} = \frac{-a \pm a\sqrt{1-a}}{2}$$

$$\frac{-a \pm a\sqrt{1-a}}{2} = a^4$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(a\cdot b) = f(a)+f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(p)+f(q)$

≥ 0

x — кол-во пар	
1 - 20	12 - 8
2 - 18	13 - 2
3 - 18	14 - 4
4 - 14	15 - 8
5 - 14	16 - 4
6 - 14	17 - 1
7 - 8	18 - 8
8 - 8	19 - 0
9 - 14	20 - 4
10 - 8	21 - 4
11 - 3	

$20+$

$f\left(\frac{2}{4}\right)$

$f\left(1\cdot\frac{1}{7}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{7}\right)$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{14}\right) = -4$

$f\left(\frac{1}{15}\right) = -3$

$f\left(\frac{1}{16}\right) = -4$

$f\left(\frac{1}{17}\right) = -8$

$f\left(\frac{1}{18}\right) = -3$

$f\left(\frac{1}{19}\right) = -9$

$f\left(\frac{1}{20}\right) = -4$

$f(21) = -4$

$f\left(\frac{2}{y}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{2}{y}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= 182$

$112 =$

$\overbrace{20+36}^{56}+56+48+16+$

$3+2+1 = 20$

$f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f\left(4\cdot\frac{1}{4}\right) = 1+1+f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

-2

$f\left(3\cdot\frac{1}{3}\right) = \underset{1}{\overset{1}{f(3)}} + \underset{-1}{\overset{-1}{f\left(\frac{1}{3}\right)}} = 0$

$f\left(\frac{1}{5}\right) = -2$

$f\left(\frac{1}{9}\right) = -2$

$f\left(\frac{1}{12}\right) = -3$

$f\left(\frac{1}{7}\right) = -3$

$f\left(\frac{1}{6}\right) = -2$

$f\left(\frac{1}{10}\right) = -3$

$f\left(\frac{1}{13}\right) = -6$

$f\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

$f\left(\frac{1}{11}\right) = -5$

12345

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \quad (*) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} y-2x\geqslant 0 \\ y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \quad (\Delta) \\ xy-2x-y+2\geqslant 0 \end{cases}$$

(Δ) $y^2-\cancel{5xy}(1-5x)y+4x^2+2x-2=0$

$D=1-10x+25x^2-16x^2-8x+8=$

$=9x^2-18x+9=(3(x-1))^2$

$y_{1,2}=\dfrac{5x-1\pm 3(x-1)}{2}=$ $4x-2$; $x+1$

$$\begin{cases} xy-2x-y+2\geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=4x-2 \\ y=x+1 \end{array}\right. \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \\ y-2x\geqslant 0 \end{cases}$$

① $(y=4x-2)$

$2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0$

$18x^2-36x+15=0$

$6x^2-12x+5=0$

$D=144-4\cdot5\cdot6=24=(2\sqrt6)^2$

$x_{1,2}=\dfrac{12\pm2\sqrt6}{12}=$ $1+\dfrac{\sqrt6}{6}$ $\quad y_1=2+\dfrac{2\sqrt6}{3}$ $+$

$1-\dfrac{\sqrt6}{6}$ $\quad y_2=2-\dfrac{2\sqrt6}{3}$ $-$

не удовл. усл-ию

② $(y=x+1)$

$2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$

$3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$x_1=0 \quad y_1=1$ $+$

$x_2=2 \quad y_2=3$ $-$ неудовл. усл.

Ответ: $(0;1)$, $\left(1+\dfrac{\sqrt6}{6};\ 2+\dfrac{2\sqrt6}{3}\right)$

№ 5

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$
$(*)$ (Δ)

$(*)$ $2x^2-x-1=0$

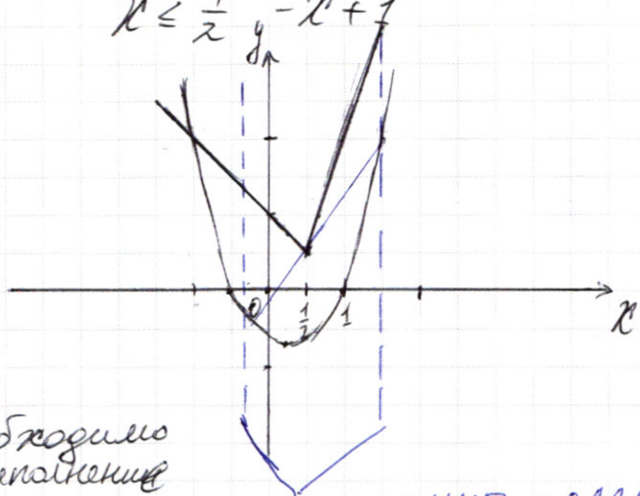
$x_{1,2}=\begin{matrix}1\\-\frac{1}{2}\end{matrix}$

$x_в=\frac{1}{4}$

$y_в=-1\frac{3}{8}$

(Δ) $x\ge\frac{1}{2}$ $3x-1$

$x\le\frac{1}{2}$ $-x+1$



лишь ограничь. рассматриваемую зону $[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$

$y=ax+b$ - прямая

$\left.\begin{aligned}&\frac{3}{2}a+b\ge 2\\&\frac{1}{2}a+b\le\frac{1}{2}\\&-\frac{1}{4}a+b\ge-\frac{5}{8}\end{aligned}\right)$ необходимо выполнение всех 3ёх усл-ий

Заметим, что прямая $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$ проходит через все три точки. Опираясь на первое усл-ие, если мы её в этой точке „поднимем", при этом сохраняя 2ое услие, то будет нарушаться 3ье услие, аналогично для 3его усл-ия, поэтому через эти две точки $(\frac{3}{2};2)$ и $(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8})$ будет проходить любая прямая, удовл. усл-ию, а через 2 точки на плоскости мы можем провести только одну прямую. $\Rightarrow$ пара a и b единственная

Ответ: $a=\frac{3}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА