МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии. -1

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан. 95

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1. т.к. это члены геом прогр, то пусть множитель равен q

тогда $b=aq$; $c=aq^2$ и 4-ый равен aq^3 подставим в $ax^2+2bx+c=0$

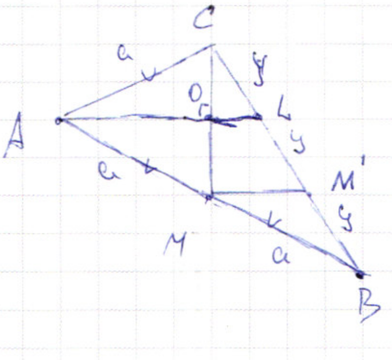
получим: $ax^2+2aqx+aq^2=0$ тогда: $a(x^2+2qx+q^2)=0 \Rightarrow a(x+q)^2=0$

т.к. сказано, что корень есть, то он равен $-q$ (его не могло быть при $a=0$) тогда $-q=aq^3 \Rightarrow aq^2=-1$, а это и есть c, т.е. 3-ий член прогрессии

Ответ: -1

Задача 2.

Пусть из A идёт бисс. AL из C - медиана CM, пересекаются в т. O



$CM \perp AO$, AO - бисс $\Rightarrow \triangle CAM$ р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC=AM$, AO - и медиана. CM - медиана $\Rightarrow$

$\Rightarrow AM=MB$, тогда $\frac{AB}{AC}=\frac{2}{1}$. бисс. AL

делит CB в отношении $2:1$ (AB к AC), т.е. $2CL=LB$. проведём MM', параллельную AL, тогда т.к. $AM=MB$, то в $\triangle ABL$ MM' - ср. линия $\Rightarrow LM'=M'B=\frac{1}{2}LB=CL$. Пусть $CL=y$, $AC=a$ тогда $AM=AC=MB=a$, $CL=LM'=M'B=y$. Из неравенств $\triangle$:

$3a>3y$, $3y+a>2a$, $\underbrace{2a+3y>a}_{\text{выполняется всегда, т.к. } a>0,\ y>0}$ Периметр равен $3a+3y=1200$

$a>y$ $\quad 3y>a$ $\quad$ т.е. $a+y=400$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

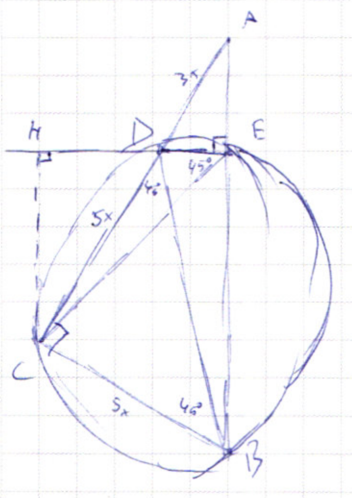
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Имеем: $a+y=400$, $3y>a$, $a>y$ Из $a>y$ имеем: $a>200$, ~~так как~~ $(y=400-a \to a>y \to a>400-a \to 2a>400 \to a>200)$

Из $3y>a$ имеем $(y=400-a \to 3y=1200-3a \to 3y>a \to 1200-3a>a \to$
$\to 1200>4a \to 300>a)$ $300>a$ т.е. $a \in (200; 300)$,
для каждого a y единственный, для каждого a и y единственный Δ тогда Δ с целыми сторонами будет столько же, сколько и a, а a это $201, 202 \ldots 299 \to 99$ чисел

Ответ: 99 треугольников

Задача 4.



$\angle C=90°$, $\angle DEB=90°$ $\}$ => $DEBC$ лежат на одной окр. с диаметром DB

тогда $\angle DEC = \angle DBC$ т.к. опираются на одну дугу DC

$\angle C=90° \Rightarrow$ в ΔCDB $\angle CDB=45°$ $(180°-90°-45°) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta DCB$ р/б $\Rightarrow DC=CB$

Пусть $AD=3x$, тогда $DC=CB=5x \Rightarrow AC=8x$

$\angle A$ – общий, $\angle DEA=\angle C=90° \Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ACB$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{3x}{AB}=\frac{AE}{8x}=\frac{DE}{5x}$. $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}$

(из подобия) $\frac{DE}{AE}=\frac{5x}{8x}=\frac{5}{8} \Rightarrow tg\angle BAC = 5/8 = tg\angle DAE$. $AC=\sqrt{29}$, $x=\frac{\sqrt{29}}{8}$

т.е. $DE = AE\cdot 5/8$, $BC = AC\cdot\frac{5}{8}=\sqrt{29}\cdot\frac{5}{8}$ $S_{\Delta ABC}=BC\cdot AC\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}=$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= 29\cdot\frac{5}{16}$ ~~Вдоль~~ $AB=\sqrt{BC^2+CA^2}=\sqrt{25\cdot\frac{25}{64}+25}=\sqrt{25\cdot\frac{89}{64}}=\sqrt{25}\cdot\frac{\sqrt{89}}{8}$

Проведём высоту CH на прямую DE, $AB \parallel CH$, т.к. $AB\perp DE$ и $CH \perp DE$

$\Rightarrow \angle HCD = \angle DAE$ пусть $HD = 5a$, тогда т.к. $tg\angle DAE = tg\angle HCD = \frac{5}{8}$ ($= tg\angle BAC$) (углы равны)

то $HC = 8a$ притом $(5a)^2+(8a)^2=(5x)^2$, где $x=\frac{\sqrt{25}}{8}$

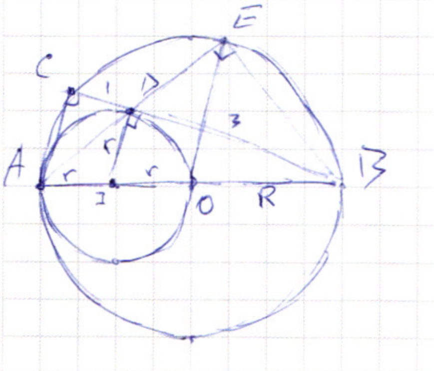
т.к. $tg\angle DAE = \frac{5}{8}$, то пусть $DE = 5y$, тогда $AE = 8y$, притом $(5y)^2+(8y)^2=(3x)^2$

$89a^2 = 25x^2$; $89y^2 = 9x^2 \Rightarrow a=\sqrt{\frac{25x^2}{89}}$; $y=\sqrt{\frac{9x^2}{89}}$, а $S_{CDE} =$

$= \frac{1}{2}\cdot DE\cdot CH = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{\frac{9\cdot x^2}{89}}\cdot 8\sqrt{\frac{25\cdot x^2}{89}} = 20\cdot\sqrt{\frac{25\cdot 9\cdot x^2\cdot x^2}{89^2}} = 20\cdot\frac{15\cdot x^2}{89} = 20\frac{15}{89}\cdot$

$\cdot\frac{25}{64}$

Задача 5.



I - центр ω, O - центр Ω

Пусть радиус ω это r, а Ω - R

т.к. AB - диам. то $\angle ACB = 90°$, т.к. BC - кас, то $\angle IDB = 90°$ ~~тогда~~ тогда $\angle B$ - общий, $\angle D = \angle C = 90°$

$\Rightarrow$ △ подобны ($\triangle CBA \sim \triangle DBI$) $\Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{DI}{CA}=\frac{BI}{BA} = \frac{3}{4}$ и $BI =$ ~~$2R$~~ $AB - AI = 2R - r$; $BA = 2R$ (диаметр = 2радиуса)

тогда $\frac{3}{4}=\frac{2R-r}{2R} \Rightarrow$ ~~$8r=R$~~ $6R = 8R-4r \Rightarrow 2r = R$ т.к. $\triangle BDI$ прям. и BI-гипотенуза, то $3^2+r^2 = (2R-r)^2=(4r-r)^2 = 9r^2 \Rightarrow 8r^2 = 9$

$r^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt2} \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt2}$; $CA = \frac{4}{3}r$. т.к. AB-диам, то $\angle AEB = 90°$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

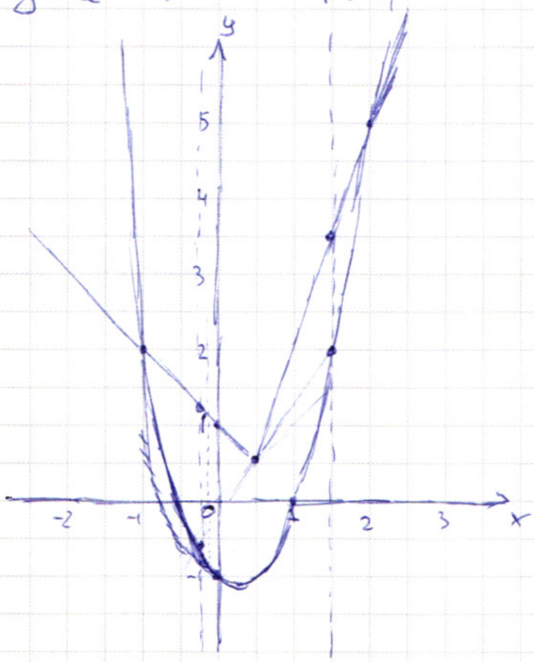
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~17 $\frac{AI}{DI} = \frac{AO}{OE}$ } $\angle A$-общ $\Rightarrow \triangle API \sim \triangle AEQ \Rightarrow IP \parallel EQ$~~

Задача 6. Построим графики: ~~вершина для $2x^2 - x - 1 = (x-1)$~~



$2x^2 - x - 1 = (x-1)(x+0{,}5)$

$A(x) = 2x^2 - x - 1$ $\quad A(1{,}5) = 2$

$A(2) = 5$; $A(-1) = 2$ $\quad A(-0{,}5) = 0$

$A(1) = 0$ $\quad A(0) = -1$, $A(-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{8}$

$B(x) = x + |2x - 1|$ $\quad$ при $x > 0{,}5$ $3x - 1$; при $x < 0{,}5$ $1 - x$

$B(1{,}5) = 3{,}5$ $\quad B(2) = 5$ $\quad B(-\frac{1}{4}) = 1\frac{1}{4}$

$B(0{,}5) = 0{,}5$ $\quad B(0) = 1$

Пусть $C(x) = ax + b$.

Тогда ~~построив на~~ интервале ~~любую прямую~~ $[-\frac{1}{4}; 1{,}5]$ ~~проходящую больше выше~~ ниже точек $(-\frac{1}{4}; 1\frac{1}{4})$

~~и $(1{,}5; 3{,}5)$ эта прямая будет подходить и выше $(-\frac{1}{4};$~~

Построив прямую, выше $A(x)$ и ниже $B(x)$, она подойдёт ~~при $a = 0$: $b \in [-1; 0{,}5]$ ниже $A(x)$ иного выше $B(x)$ b при $b = 0$:~~ ~~для~~ при $b = 0$ это ~~прямые и~~ т.е. нужно выше точки $(1{,}5; 2)$, ~~выше~~ точки $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ при том не пересекая $B(x)$ и $A(x)$ это прямые: от ~~точки~~ прямой проходящей через точку $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ ~~до прямых~~ и $(1{,}5; 2)$ до прямой проходящей через т-и $(0{,}5; 0{,}5)$ и $(1{,}5; 2)$

Продолжение на стр. 7

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7. Пусть $b=\frac{1}{c}$, тогда $f(ab)=f\left(\frac{a}{c}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{c}\right)$

т.е. $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ ~~$f(\frac{1}{y}) = f($~~

Имея число $q=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\ldots$ и, $f(q)=f(p_1)+f(p_1^{\alpha_1-1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots)$

делая так:

пока α_i не станет 0, получим: $f(q)=\underbrace{f(p_1)+f(p_1)+\ldots+f(p_1)}_{\alpha_1 \text{ раз}}+\underbrace{f(p_2)+\ldots+f(p_2)}_{\alpha_2 \text{ раз}}$

α_i - степень вхождения p_i в q

и так далее где p_i - простые числа $f(p)=[p/2]$ при ~~p~~ наименьшем p, т.е. 2 $f(p)$ уже 1, т.о. для больших чисел ~~..~~ тоже (не обязательно простых) не менее 1 ~~..~~

рассмотрим ~~число~~ ~~$f(\frac{1}{q})$~~ $f\left(\frac{1}{q}\right)$, ~~это x~~ где $q=p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}$

~~тогда $f(\frac{1}{q})=f\left(\frac{1}{p_1^{\alpha_1-1}\ldots p_n^{\alpha_n}}\right)+f\left(\frac{1}{p_1}\right)$~~ т.к. $f\left(\frac{a}{c}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{c}\right)$, то

$f\left(\frac{1}{c}\right)=f\left(\frac{a}{c}\right)-f(a)$, т.о. $f\left(\frac{1}{q}\right)=f\left(\frac{p_1}{\underbrace{p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}}_{q}}\right)-f(p_1)=f\left(\frac{p_1}{q}\right)-f(p_1)$

тогда $f\left(\frac{1}{q}\right)=f\left(\frac{\cancel{p_1}\ 1}{p_1^{\alpha_1-1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}}\right)-f(p_1)$ проделав операцию ту же пока

α_n не станет 0 ~~для $p_1^{..}\ldots p_n^{..}$~~ получим $f\left(\frac{1}{q}\right)=\underbrace{f(p_1)-}$
(будем брать целое, т.е. в деление и шаге $\frac{1}{p^{\alpha_1-1}\ldots p_n^{\alpha_n}}$)

$\underbrace{-f(p_1)-\ldots-f(p_1)}_{\alpha_1 \text{ раз}}-\underbrace{f(p_2)\ldots-f(p_2)}_{\alpha_2 \text{ раз}}-\ldots-\underbrace{f(p_n)\ldots-f(p_n)}_{\alpha_n \text{ раз}}$. т.е.

~~$f(\frac{x}{y}) = q$ для $f(x)$ будет разложение~~ $f(q)=\alpha_1[p_1]+\alpha_2[p_2]+$

$+\ldots+\alpha_n[p_n]$. $f\left(\frac{1}{q}\right)=(\alpha_1[p_1]+\alpha_2[p_2]+\ldots+\alpha_n[p_n])\cdot(-1)=f(q)\cdot(-1)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right)$ должно быть меньше 0, т.е. $\cancel{f(x) < f(y)}$ $f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

т.е. $f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$ распишем чему равны

$f(x)$ для $x \in N$, $x \leq 21$; $x \geq 1$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f(x)$	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4
				(2+2)		(3+2)		(2+2+2)	(3+3)	(5+2)		(3+2+2)		(7+2)	(3+5)			(2+3+3)			(7+3)

p	2	3	5	7	11	13	17	19
$f(p)$	1	1	2	3	5	6	8	9

заметим, что $f(y)$ будет принимать такие же значения $f(y)$ при y как и $f(x)$ при x. Нам нужны $f(y) > f(x)$ ~~т.е.~~

Посчитаем для каждого значения $f(x)$ количество значений:

знач $f(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0
кол-во	2	4	6	4	1	1	0	1	1	0	1

(для $f(1) = f\left(\frac{p}{p}\right) = f(p) - f(p) = 0$)

Тогда при $f(x) = 0$ подходят все $f(y) > 0$, таких $\underline{\underline{20}}$, для 1 $(21-1-2) = \underline{\underline{18}}$

2: $18 - 4 = \underline{\underline{14}}$, 3: $14 - 6 = \underline{\underline{8}}$; 4: $8 - 4 = \underline{\underline{4}}$; 5: $4 - 1 = \underline{\underline{3}}$; 6: $3 - 1 = \underline{\underline{2}}$;

7 не может быть; 8: $2 - 1 = \underline{\underline{1}}$; 9: $1 - 1 = \underline{\underline{0}}$, т.е. для $f(x) = 9$ нет такого y, чтобы $f(y) > f(x)$. Тогда всех пар будет: $1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 14 + 19 + 20 =$

$= 20 + 20 + 20 + 3 + 8 = 71$

Ответ: 71 пара

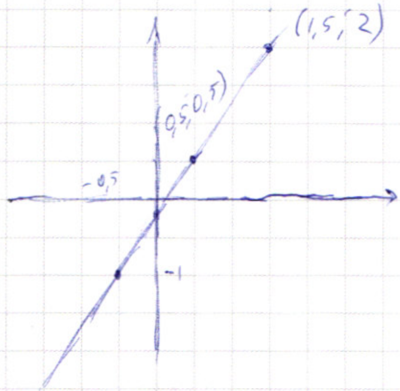
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left.\begin{aligned}0,5a+b&=0,5\\1,5a+b&=2\end{aligned}\right\} \Rightarrow a=1,5 \Rightarrow b=-0,25$$

$$0a+b=-0,25$$

$$a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+b=-\frac{5}{8}$$

Значит такая прямая единственная и её коэф $(a;b)$ равны $(1,5;-0,25)$, больше таких нет, видно графически на стр. 4

Ответ: $(1,5;-0,25)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

q, $a+h$, $a+2h$

$a = a$ 1

$a\cdot q = b$ 2

$a\cdot q^2 = c$ 3

$-q = aq^3$ 4

$-1 = aq^2$

$ax^2+2bx+c$

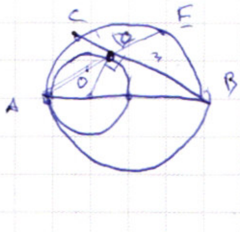
$ax^2+2aqx+aq^2=0$

$D = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-2aq \pm 0}{2a} = -q$

$x^2+2qx+q^2=0$

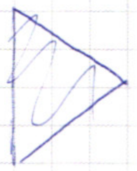
$(x+q)^2=0 \quad x=-q$

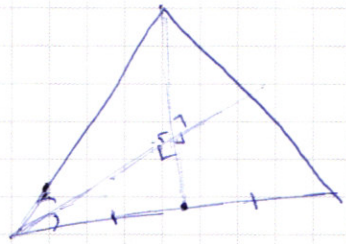


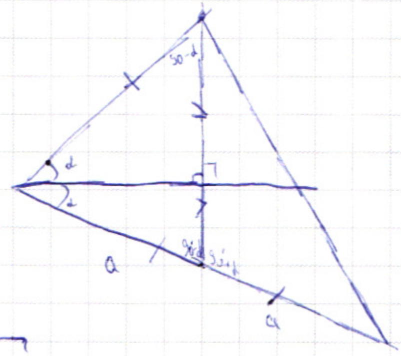
$3a > 3y$

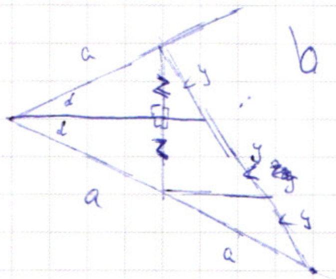
$a > y$

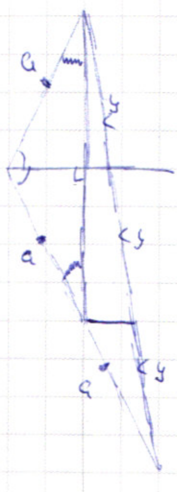
$a+y=400$











$y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$(y-2)^2 - 2$

$xy-2x-y+2 = 3$

$(y-2x)^2 = y^2-4xy+4x^2 = xy-2x-y+2$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$y^2-0xy+2x^2-4x-4y+3=0$

$-5xy+2x^2+6x+5y-5=0$

$2x^2+6x-5xy+5y-5=0$

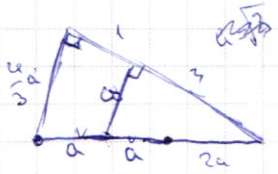
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

AD
OB

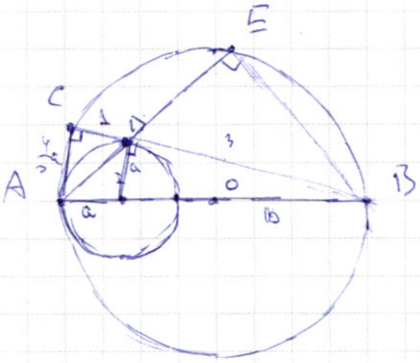


$\frac{2b-a}{2b} = \frac{3}{2}$

$3b = 4b - 2a$

$2a = b$

$4b^2 = 9 + 4ab$



$(2b-a)^2 = a^2 + 3^2$

$4b^2 = \frac{16}{9}a^2 + 4^2$

$\frac{4}{x} = \frac{3}{a}$

$x = \frac{4}{3}a$

$4b^2 - 4ab + \cancel{a^2} = \cancel{a^2} + 9$

$4b^2 = \frac{16}{9}a^2 + 16$

$9 + 4ab = \frac{16}{9}a^2 + 16$

$\frac{16}{9}a^2 - 4ab + 7 = 0$

$16a^2 - 36ab + 63 = 0$

$\left(\frac{4}{3}a\right)^2 + 4^2 = (2b)^2$

$4b^2 = 16 + \frac{16}{9}a^2$

$a^2 + 3^2 = (2b-a)^2$

$\cancel{a^2} + 9 = 4b^2 - 4ba + \cancel{a^2}$

$4ab + 9 = 4b^2$

$16 + \frac{16}{9}a^2 = 4ab - 9$

$\frac{16}{9}a^2 - 4ab + 7 = 0$

$36^2 - 4 \cdot 16 \cdot 63 =$

$= 4^2(9b^2 - 4 \cdot 63)$

$4^2(9b^2 - 4 \cdot 63) \geq 0$

$16a^2 - 36ba + 63 = 0$

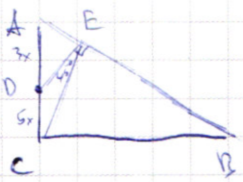
$2 \cdot 36$

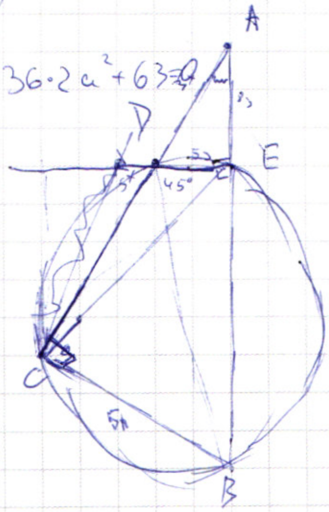
$56a^2 = 63$

$16a^2 - 36 \cdot 2a^2 + 63 = 0$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{\frac{8}{3}AD} = \frac{DE}{BC}$

$\frac{5}{8}$





$AD =$

$AC = \sqrt{25} = 8x$

$AC = \frac{8}{3}AD$

$CB = CD$

$25 \cdot 64$

89

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$

$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{8x} = \frac{DE}{5x}$

$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$

$AB \cdot AE = 3 \cdot 8x^2$

$\frac{DE}{AE} = \frac{5x}{8x}$

$25y^2 + 64y^2 = 9x^2$

$89y^2 = 9x^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

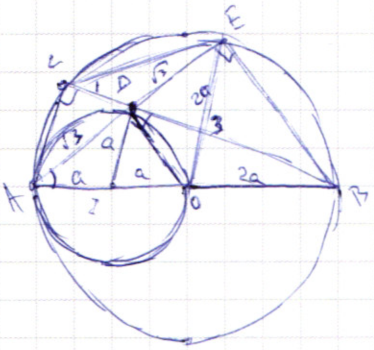
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

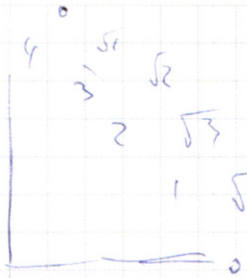


$3^2 + a^2 = 9a^2$

$9 = 8a^2$

$a^2 = \frac{9}{8}$

$a = \frac{3}{2\sqrt{2}}$



$-\frac{1}{4} \to \frac{5}{8}$

$\frac{3}{2} \to 2$

$3\sqrt{2}$

$2x^2 - x - 1$

$x + |2x-1|$

$\frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)}$

$+ \quad - \quad +$

$-0{,}5 \quad 1 \quad \frac{3}{2}$

$(2x+1)$

$\frac{1}{8} \quad \frac{7}{8} - \frac{8}{8} \quad \frac{5}{8}$

$-\frac{1}{4}$

$-0{,}5$

1

2

$[-\frac{1}{4};\ 1]$

$\frac{+1}{4}$

$\frac{6}{2} - 1$

$ax + b$

$\frac{1}{8} \quad -\frac{2}{8} - \frac{8}{8}$

$[-\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}]$

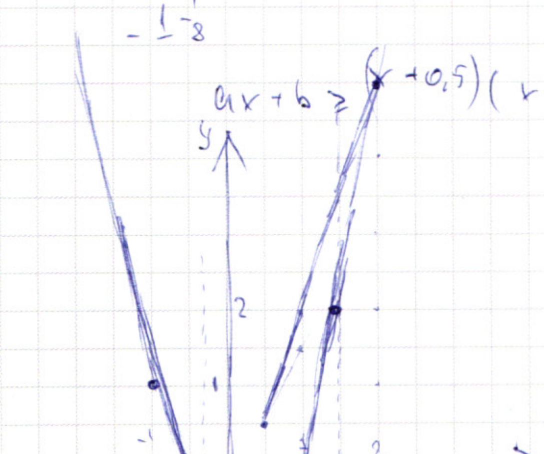
$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 11 + |2x-1|$

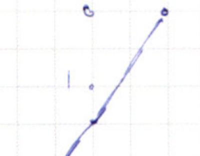
$-1 - \frac{1}{8}$

$ax + b \geq (x+0{,}5)(x-1)$

$x \geq 0{,}5 \qquad 3x - 1$

$x < 0{,}5 \qquad 1 - x$





$ax + b =$

$0{,}5a + b = 0{,}5$

$1{,}5a + b = 2$

$a = 1{,}5$

$-\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \qquad -\frac{3}{8} - \frac{2}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$(y-2x)^2=y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$$\begin{cases} y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0 \\ y^2+2x^2-0xy-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$xy-2x-y+2>0$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$5xy-10x-5y+8=0$

$2(x^2-2x+1)-2$

(y^2-4y+4)

$2(x+1)^2+(y-2)^2$

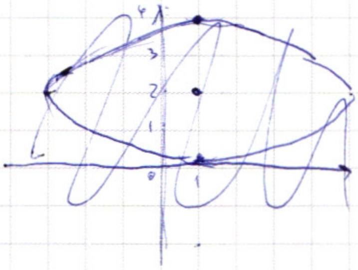
$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

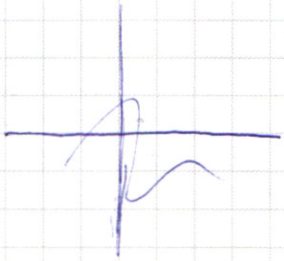
$2((x-1)x)+(y-3)(y-1)=0$

$2(x-1)x+(y-3)(y-1)=0$

$0<x<1 \Rightarrow \begin{cases} y<1 \\ y>3 \end{cases}$

$\begin{cases} x>1 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow 1<y<3$





x	y
$\cancel{0}$	3
1	$\cancel{1}$

$y-2x\geq 0$

$2\left((x-1)^2\right)+(y-2)^2=0$

$1=\sqrt{3-2-3+2}$

$2((x-2)x)+(y-2)^2=0$

$2x^2-x-1\leq ax+b\leq x+|2x-1|$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$

$b=\frac{1}{c}$

$f\left(\frac{a}{c}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{c}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)$	$f(a)+f(b)$	$f(p)$
1	1	0
2	2	1
3	3	1
4	2+2	2
5	5	2
6	2+3	2
7	7	3
8	2+2+2	3
9	3+3	2
10	2+5	3
11	11	5
12	2+2+3	3
13	13	6
14	7+2	4
15	3+5	3
16	2+2+2+2	4
17	17	8
18	2+3+3	3
19	19	9
20	2+2+5	4
21	7+3	4

$f\left(\frac{1}{c}\right) = -1$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) - f(x)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)