МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

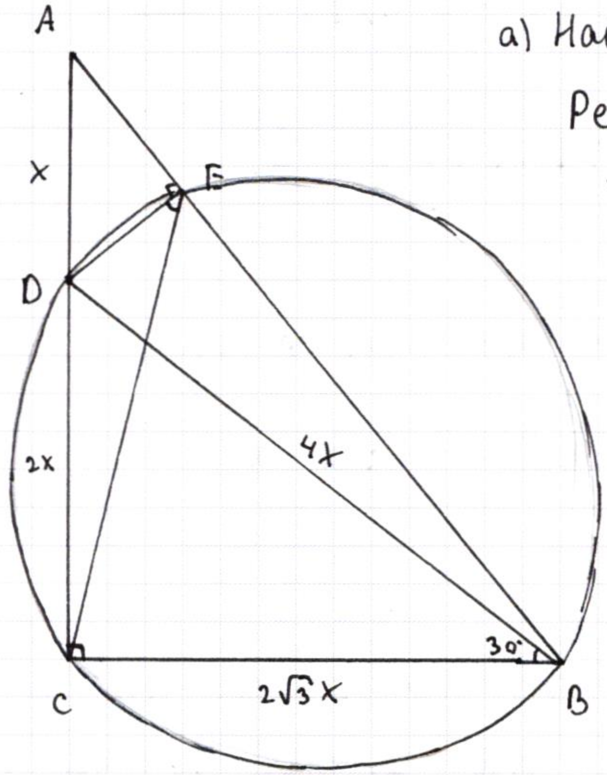
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



а) Найти: $\operatorname{tg}\angle BAC$.

Решение: $\angle DCB = 90°$. $\angle DEB = 180° - \angle AED = 180° - 90° = 90°$.

$\angle DCB + \angle DEB = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Около четырёхугольника CDEB можно описать окружность. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DBC = \angle DEC = 30°$

т.к. опираются на одну дугу CD. Пусть $CD = x$.

Тогда $CD = 2x$ (т.к. $\frac{AD}{AD+CD} = \frac{1}{3}$; $\frac{x}{x+CD} = \frac{1}{3} \Rightarrow CD = 2x$). Рассмотрим прямоугольный треугольник CDB. $\angle CBD = 30°$, а в прямоуг. треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы $\Rightarrow DB = 2CD = 4x$. По т. Пифагора $CB = \sqrt{DB^2 - CD^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12x^2} = 2\sqrt{3}x$. $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $AC = \sqrt{7}$. Тогда $3x = \sqrt{7}$; $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$. $CD = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{9x^2 + 12x^2} = \sqrt{21}x$. $\triangle AED \sim \triangle ACB$ ($\angle AED = \angle ACB = 90°$, $\angle CAB$ - общий). $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$; $\frac{AE}{3x} = \frac{x}{\sqrt{21}x}$; $AE = \frac{3x \cdot x}{\sqrt{21} \cdot x} = \frac{3x}{\sqrt{21}}$.

$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$; $\frac{DE}{2\sqrt{3}x} = \frac{x}{\sqrt{21}x}$; $DE = (2\sqrt{3}x \cdot x) : \sqrt{21}x = \frac{2x}{\sqrt{7}}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$AE = \frac{3x}{\sqrt{21}}$; $DE = \frac{2x}{\sqrt{7}}$. $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x}{\sqrt{21}} \cdot \frac{2x}{\sqrt{7}} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6x^2}{7\sqrt{3}}$. У $\triangle AED$ и $\triangle DEC$ одинаковые высоты, опущ. на $AC \Rightarrow S_{\triangle AED} : S_{\triangle DEC} = AD : CD = 1 : 2 \Rightarrow S_{\triangle DEC} =$

$= 2 S_{\triangle AED} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6x^2}{7\sqrt{3}} = \frac{6x^2}{7\sqrt{3}}$; $x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow S_{\triangle DEC} = \frac{6 \cdot \frac{7}{9}}{7\sqrt{3}} =$

$= \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Ответ: $S_{\triangle DEC} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

№1.

a, $b = a \cdot q$, $c = a \cdot q^2$. (q - знаменатель прогрессии)

$ax^2 - 2bx + c = ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$. $|:a$ $a \neq 0$

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$.

$(x-q)^2 = 0$

$x_1 = q$. Четвёртый член прогрессии равен aq^3 и равен $x_1 = q$. $aq^3 = q$ $|:q$ $aq^2 = 1$. aq^2 - третий член прогрессии и он равен 1. Ответ: $c = 1$.

№7.

$\cancel{f(\tfrac{1}{2}) = f(4 \cdot 2^{-1}) = f(4) + f(2^{-1}) = f(2) + f(2) + f(2^{-1})}$.

$\cancel{1 = 2 + 2 + f(2^{-1})}$. $\cancel{f(2^{-1}) = -2}$.

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(y^{-1})$. Если $f(\frac{x}{y}) < 0$, то $|\overset{f(y^{-2})}{\cancel{f(y^{-1})}}| > |f(x)|$.

$\cancel{f(y^{-1}) = f(y^2 \cdot y^{-1}) = f(y^2) + f(y^{-1}) = f(y) + f(y) + f(y^{-1})}$.

$\cancel{f(y) = f(y^2 \cdot y^{-1}) = f(y^2) + f(y^{-1}) = f(y) + f(y) + f(y^{-1})}$.

$\cancel{f(y^{-1}) = -f(y). \; |-f(y)| > f(x). \Rightarrow}$

$\cancel{f(\text{чёт}) = f(2 \cdot n) = n \cdot f(2) = n. \Rightarrow f(p_i) \leq f(k) \leq f(p_{i+1})}$.

~~В ответе~~ будут подходить все пары чисел x и y, удовлетворяющие условию $f(y) > f(x)$. см. стр. 4.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7.$

1) $2x-1<0.\ x<\frac{1}{2}.$

Пусть $8x-6|2x-1| = F(x)$

$-8x^2+6x+7 = S(x).\ ax+b=P(x)$

при $x<\frac{1}{2}$ $F(x) = 8x+12x-6 =$

$= 20x-6.$

2) $2x-1\ge 0.\ x\ge\frac{1}{2}.$

$F(x)=8x-12x+6 =$

$= -4x+6.$

$$F(x)=\begin{cases}20x-6; & x<\frac{1}{2}\\ -4x+6; & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$$

При $x=-\frac{1}{2}$ $F(x) = -10-6=-16.$

При $x=\frac{1}{2}$ $F(x)=-2+6=4$

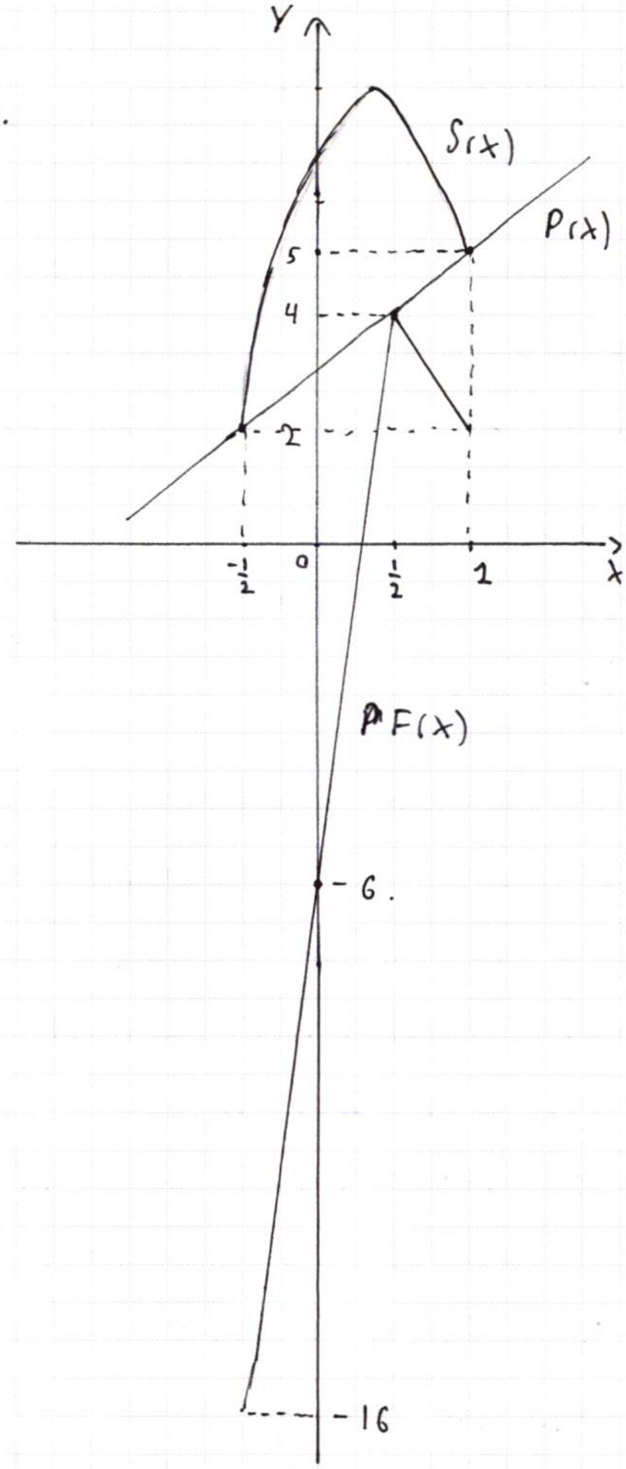
При $x=1$ $F(x)=-4+6=2.$

$S(x)$ - парабола, ветви которой направленны вниз. $x_0 = \frac{-6}{-16} = +\frac{3}{8}.$

$y_0 = -8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7 = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$

При $x=-\frac{1}{2}$ $S(x) = -8\cdot\frac{1}{4}-3+7=2.$

При $x=1$ $S(x)=-8+6+7=5.$



$ax+b$ - прямая. Если она проходит через точки $(-\frac{1}{2};2)$ и $(1;5)$, то $\cancel{-\frac{1}{2}a+b=2;\ a+b=5}$.

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b=2 \\ a+b=5 \end{cases}$

Но тогда при $x=\frac{1}{2}$ $2x+3=2\cdot\frac{1}{2}+3=1+3=4 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ эта прямая проходит через точку $(\frac{1}{2};4)$.

$a+\frac{1}{2}a+b-b=3.$

$\frac{3}{2}a=3.$

$a=2.$ $b=5-a=3.$

$ax+b=2x+3.=P(x)$

$P(x)\geq F(x) \Rightarrow P(\frac{1}{2})\geq F(\frac{1}{2})=4$

$P(x)\leq S(x) \Rightarrow P(-\frac{1}{2})\leq S(-\frac{1}{2})=2$

$P(2)\leq S(2)=5.$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b\leq 2 & (1) \\ a+b\leq 5 & (2) \\ \frac{1}{2}a+b\geq 4 & (3) \end{cases}$

$(3)-(2)=\frac{1}{2}a+b-a-b=-\frac{1}{2}a\geq -1.$

$a\leq 2.$ (можно вычесть, т.к. разные знаки)

$(3)-(1)=\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}a-b=a\geq 2.$

Получаем $a\leq 2$ и $a\geq 2 \Rightarrow a=2.$

$\begin{cases} 2+b\leq 5 \\ \frac{1}{2}\cdot 2+b\geq 4 \end{cases}$ $\begin{cases} b\leq 3 \\ b\geq 3 \end{cases}$ $\Rightarrow b=3 \Rightarrow P(x)=2x+3.$

При других значениях a и b $P(x)$ пересечёт один из графиков и неравенство не будет выполнятся при всех x. Ответ: $(2;3)$.

№7.

$f(2)=1$ $f(3)=1$ $f(5)=2$ $f(7)=3$ $f(11)=5$ $f(13)=6$ $f(17)=8$ $f(19)=9$ $f(23)=11.$

~~$f(p_i)<f(k)<f(p_{i+1})$ если $p_i<k<p_{i+1}$~~

$f(4)=2$ $f(6)=3$ $f(8)=4$ $f(9)=2$ $f(10)=3$ $f(12)=3$ $f(14)=4$ $f(15)=3$ $f(16)=8$ $f(18)=3$ $f(20)=4$ $f(21)=4$

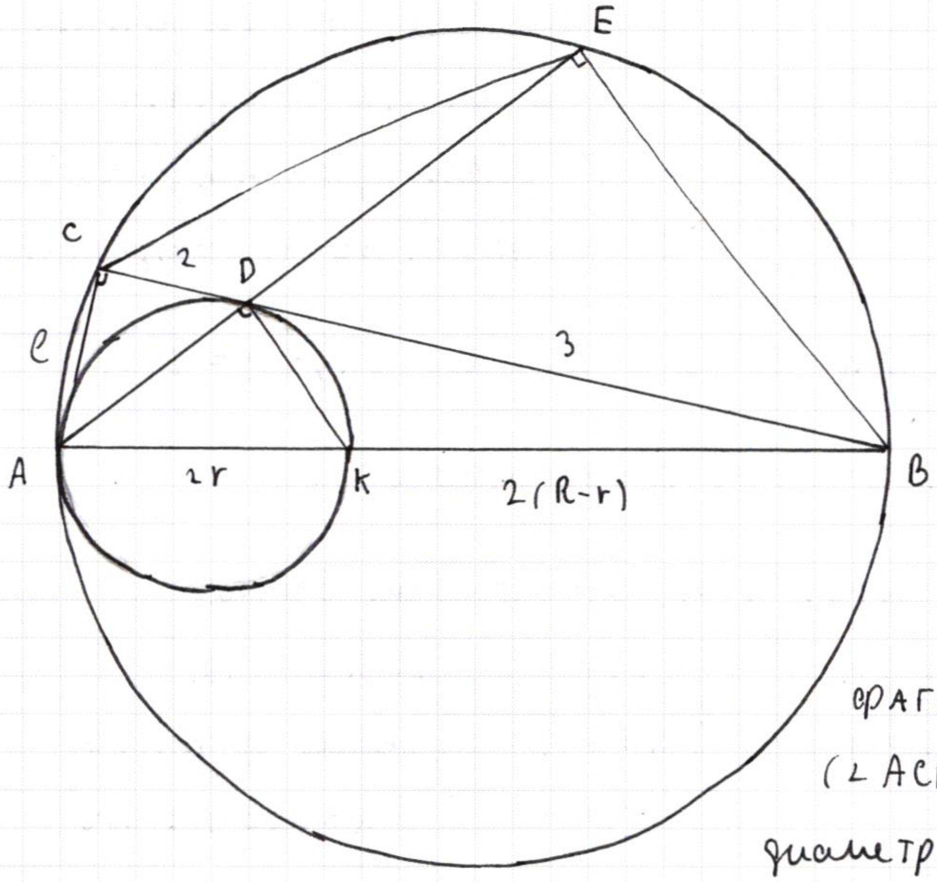
$f(22)=6.$ ~~При ...~~ ~~$y=3\{x=2.$ $y=4\{$~~

~~Если Ответ: (2;3), (2;4), (2;5), (2;8), (2;6), (4;6), (5;6), (3;7), (4;7), (5;7), (~~ ~~...5~~. Ответ: 204.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



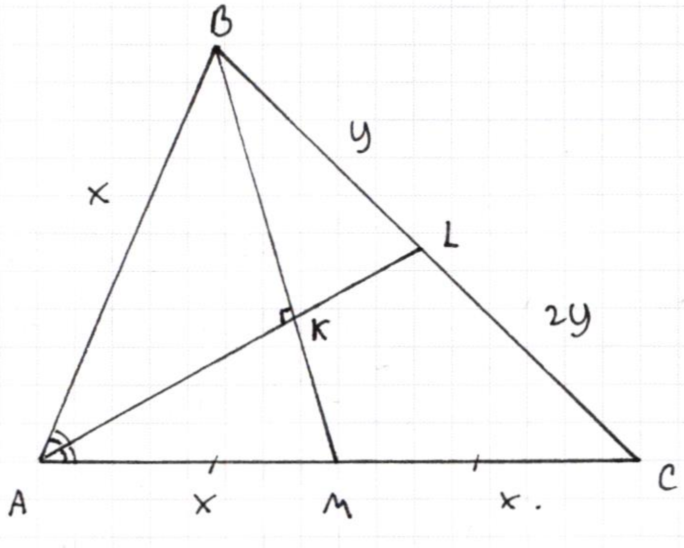
Дано: $CD=2$, $BD=3$.
Найти: r, R, S_{BACE}.
Решение:
Пусть r - радиус ω, R - радиус Ω. $\Rightarrow$ ~~AE~~ $AK=2r$, $KB=2R-2r=2(R-r)$. По т. Пифагора $AB^2=AC^2+CB^2$. ($\angle ACB=90^\circ$ т.к. опир. на диаметр.) Пусть $AC=l$.

$\cancel{l^2+(2+3)^2}=CD\cdot DB=AD\cdot DE$; $6=AD\cdot DE$. $DB^2=AB\cdot KB=9$.

$2R\cdot 2(R-r)=9$. $\angle ADK=90^\circ$ т.к. опир. на диаметр AK.

~~M~~.

№2.



Дано: AL- биссектриса

BM- медиана, $AL \perp BM$.

Пусть $AM = MC = x$.

В $\triangle MAB$ AK- биссектриса и высота $\Rightarrow$ $\triangle MAB$- равнобедренный, $AM =$ $= AB = x$. AL- биссектриса $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Пусть $BL = y \Rightarrow LC = 2y$; $3x + 3y = 900$.

$x + y = 300$. По неравенству треугольника

$$\begin{cases} x < 3y + 2x \\ 2\cancel{y}x < x + 3y \\ 3y < x + 2x \\ x + y = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + x > 0.\ (x>0, y>0) \text{ - выполнено всегда.} \\ 3y > x \\ x > y \end{cases} \quad \begin{cases} 3y > x \\ x > y \\ x + y = 300 \end{cases}$$

$\max y = 149$.

если $y = 150$, то $x = 300 - 150 = 150$

Тогда $x = y$, что неверно. $\min(y) = 76$. если $y = 75$, то $x = 225$, но $3y =$ $= 225 = x$ $\Rightarrow$ условие $3y > x$ не выполнено. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ y может принимать все целые значения от 76 до 149.

$\Rightarrow$ Кол-во вариантов $149 - 76 + 1 = 74$. Ответ: 74.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

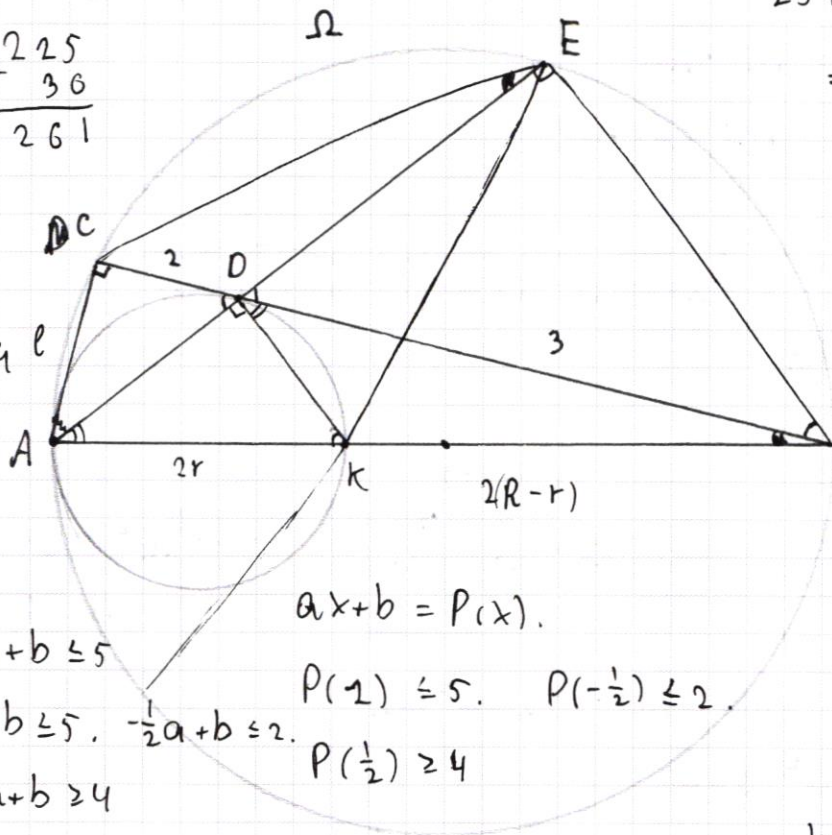
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{2}a \le 1 \quad a \le 2.$

$\frac{1}{2}a + 2b \le 7.$

$-100R^2 - 30R^2 + 10R^2$

$$\begin{array}{r} 225 \\ +\ 36 \\ \hline 261 \end{array}$$



$25 + \ell^2 = 4r^2 - 4R^2 + 8Rr - 4r^2 =$

$= 8Rr - 4R^2 = 4R(r - R)$

$25 + \ell^2 = 4R^2$

$\ell^2 = 4R^2 - 25$

$\triangle ADB \sim \triangle KDB.$

$\frac{KD}{AD} = \frac{DB}{2R} = \frac{3}{2R}$

$AD^2 = 4 + \ell^2$

$AD = \sqrt{4+\ell^2}$

$\frac{KD}{\sqrt{4+\ell^2}} = \frac{3}{2R}$

$KD \cancel{DD} = \frac{3\sqrt{4+\ell^2}}{2R}$

$ax + b = P(x).$

$P(1) \le 5. \quad P(-\frac{1}{2}) \le 2.$

$P(\frac{1}{2}) \ge 4$

$5a + b \le 5$

$a + b \le 5. \quad -\frac{1}{2}a + b \le 2.$

$\frac{1}{2}a + b \ge 4$

$\frac{16R^2 + 416R^4 - 4R^2 \cdot 25 + 36 - 9 \cdot 4R^2 + 25 \cdot 9}{4R^2} = 4r^2$

$4 + \ell^2 + \frac{9(4+\ell^2)}{4R^2} = \cancel{A2}\ 4r^2.$

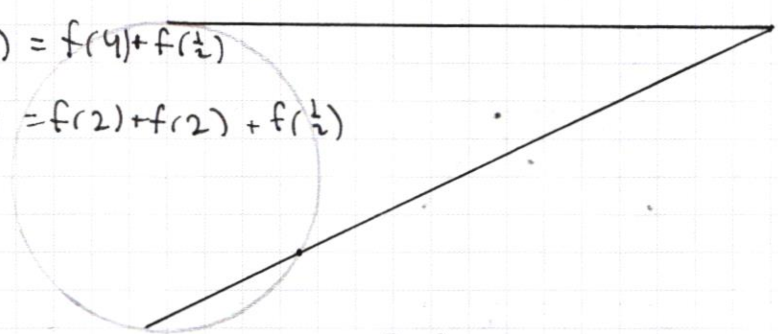
$\frac{16R^2 + 4R^2\ell^2 + 36 + 9\ell^2}{4R^2} = 4r^2.$

$\frac{16R^4 - 120R^2 + 261}{4R^2} = 4r^2$

$f(\frac{1}{2}) = f(4) + f(\frac{1}{2}$

$CD \cdot DB = AD \cdot DE \qquad f(2) = f(4) + f(\frac{1}{2})$

$6 = AD \cdot DE \qquad f(2) = f(2) + f(2) + f(\frac{1}{2})$



$2r$

$2R \cdot 2(R - r) = 9.$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R(R - r) = 9.$

$7 \cdot 9, \cancel{2} = 64.$

$25 + \ell^2 = 9 \qquad 4R(r-R) = \overset{63}{-9}. \qquad \cancel{55}\ 25 + \ell^2 = -9.$

$\ell^2 = 16 \quad \ell = 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(2r^2+2(R-r))^2 = 4r^2+4(R-r)^2+8r(R-r) =$

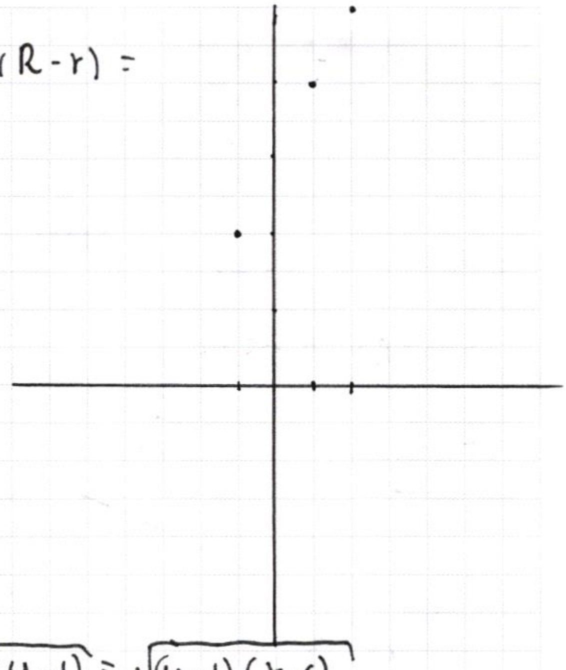
$= 4r^2+4R^2-8Rr+4r^2+8Rr-8r^2 =$

$\frac{AD}{DE} = \frac{AK}{KB}$ $\quad AD\cdot KB = DE\cdot AK$

$6KB = DE^2\cdot AK$

$36 = \cancel{DE\cdot AK}$

$36 = DE^2\cdot AK\cdot AB$



$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$ $=\sqrt{x(y-1)-6(y-1)}=\sqrt{(y-1)(x-6)}$

$(x-6y)^2=(y-1)(x-6)$ $\quad -8x^2+6x+7$

x^2- $\quad x_0=\frac{-6}{-16}=\frac{3}{8}.$ $\quad y_0=-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7=$

$x^2-12xy+36y^2$ $\quad =-\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+\frac{56}{8}=$

$x^2-12x+36+y^2-4y+16-32+y^2=0.$ $\quad =\frac{65}{8}=8\frac{1}{8}.$

$(x-6)^2+(y-4)^2+y^2-32=0.$

x $\quad 8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

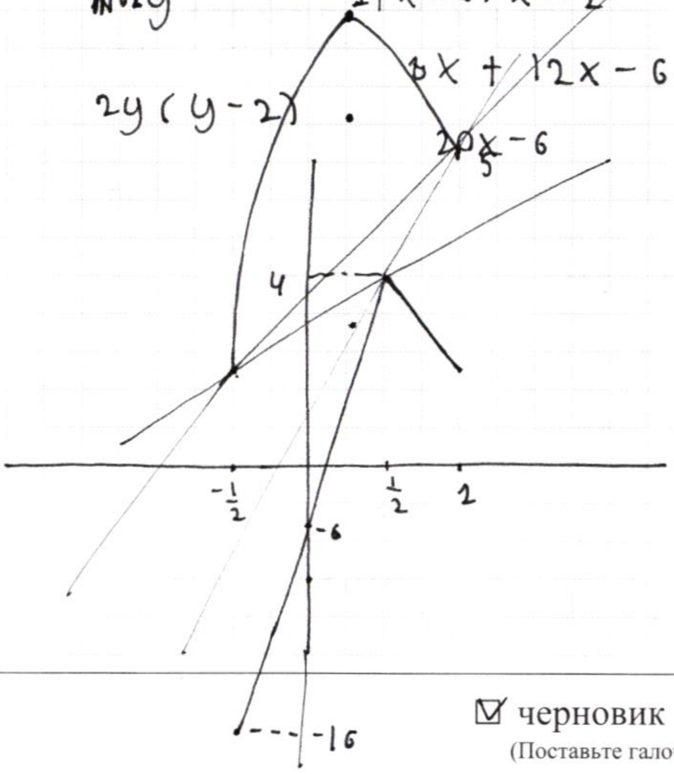
$\sqrt{2}y^2$ $\quad$ 1) $\cancel{x\ge 0}$. $x<\frac{1}{2}$

$8x+12x-6\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

$2y(y-2)$ $\quad 20x-6$ $\quad 8x-12x+6=-4x+6$

$-8\cdot\frac{1}{4}-3+7=-2-3+7=2.$

$-8+6+7=5.$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_{max} =$

$f(18) = f(3)+f(3)+f(2) = 3$ $f(17) = 8$.

a, b, c

a, aq, aq^2

$f(16) = 8$.

$f(15) = f(5)+f(3) = 1+2 = 3$.

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$.

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$.

$(x-q)^2 = 0$.

$x_1 = q$.

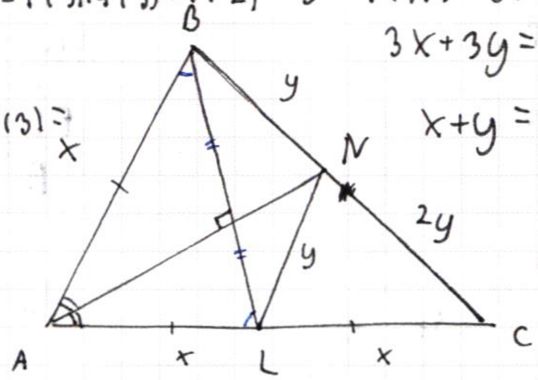
$aq^3 = q$

$aq^2 = 1$

$149 \cdot 3 = 447$.

$900 - 447 = 453$.

$453 : 3 = 151$.



$x = 300 - y$

$3x + 3y = 900$.

$x + y = 300$.

$300 - y > y$, $y < 150$.

$\begin{cases} x+y = 300 \\ x > y \\ 3y > x \end{cases}$ $3y > 300 - y$, $4y > 300$, $y > 75$.

$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{2}$

y от 76 до 149

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12yx + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$.

$\begin{cases} x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$.

$x^2 + \cancel{3y}\,36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0$.

$34y^2 - 13xy + 10y + 13x - 26 = 0$.

$34y^2 - 13xy + 13x + 10y - 26 = 0$.

$x^2 + 12x + 6$

$(x - \sqrt{6}$ $f(15) = f(5) + f(3) =$

$x^2 - 12x + 36$ 151

$=$

$3x + 3y = 900$

$x < 2x + 3y$

$2x < x + 3y$

$3y < 3x$.

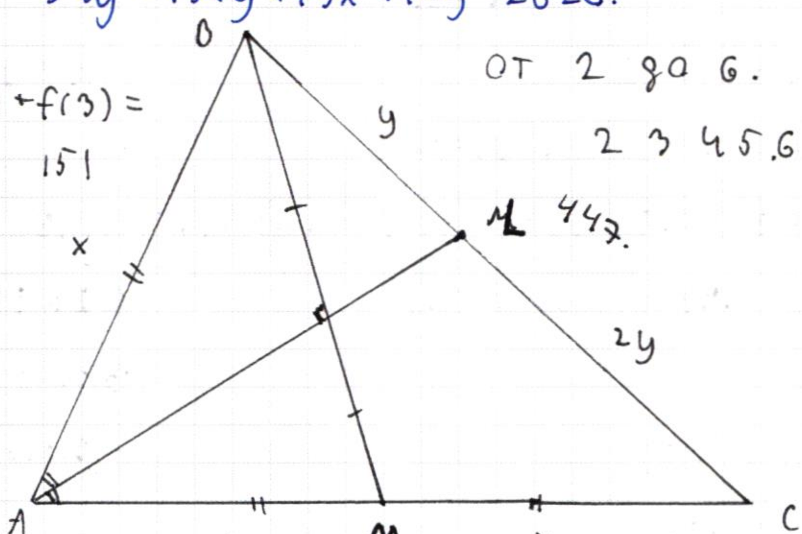
$x + 3y > 0$.

$\boxed{3y - x > 0.}$ $\boxed{x > y.}$

от 2 до 6.

2 3 4 5 6

447.

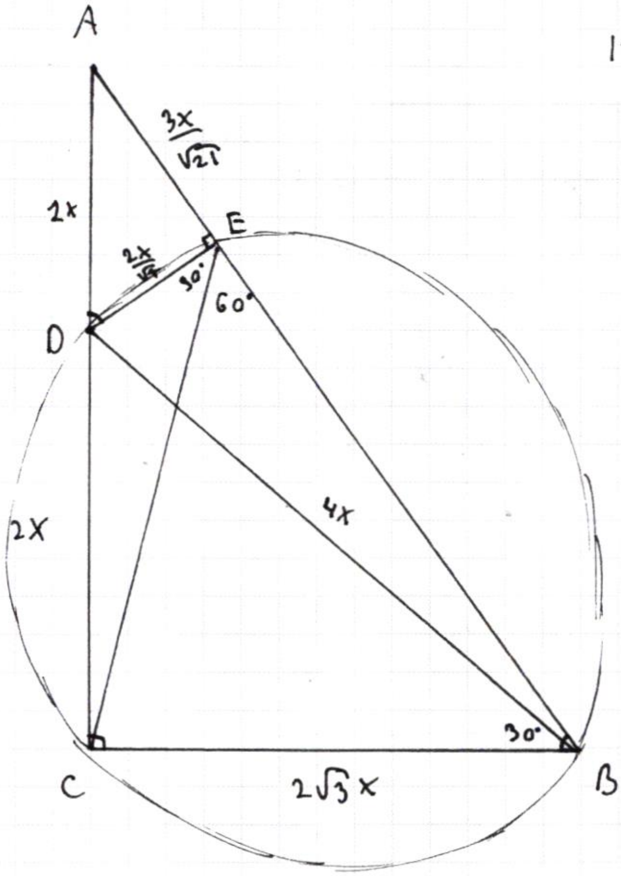


302

$3y > x$.

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$4x^2 + .. = 16x^2$

$12x^2 = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x$

$AB^2 = 9x^2 + 12x^2 = 21x^2.$

$AB = \sqrt{21}x.$

$\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{x}{\sqrt{21}x} = \frac{1}{\sqrt{21}}.$

$S_\triangle AED = \frac{1}{2}\,\frac{3x}{\sqrt{21}}\cdot\frac{2x}{\sqrt{7}} =$

$= \frac{1}{2}\,\frac{6x^2}{7\sqrt{3}}.\quad \frac{6x^2}{\sqrt{7}\,7\sqrt{3}} =$

$= \frac{6\cdot\frac{7}{9}}{7\sqrt{3}} = \frac{\frac{6}{9}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$

$P(x)\quad P(-\frac{1}{2}) \le 2\quad P(\frac{1}{2}) \ge 4\quad P(2) \le 5.$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + b \le 2 \\ \frac{1}{2}a + b \ge 4 \\ a + b \le 5 \end{cases}$

$-\frac{1}{2}a \ge -1$

$\frac{1}{2}a \le 1$

$a \le 2.$

$\cancel{a+2b}\quad a \ge 2.$

$\frac{1}{2}a + b - a - b \ge -1$

$-\frac{1}{2}a \ge -1$

$a \le 2.$

$$\begin{array}{r} +109 \\ 95 \\ \hline 204 \end{array}$$

$+\ 68 + 41$

$80\quad 95$

$f(2) = 1\quad f(3) = 2$

$f(4) = 2\quad f(5) = 2\quad f(9) = 2$

$f(7) = 3\quad \cancel{f(13)}\quad f(6)\quad f(10)\quad f(12)\quad f(15)\quad f(18)$

$f(8)\quad f(14)\quad f(20)\quad f(21)$

5 $f(11)$

6 $f(13)\quad f(22)$

8) $f(17)\quad f(16)$

$f(19) = 9\qquad f(23) = 11.$

$6 + 30 + 44 + \cancel{...} 15 + 32$

$+ 36 + 20 + 21$

$\cancel{22 + 18} +$

$3\cdot 2 + 6\cdot 5 + 4\cdot 11 + 15 + 2\cdot 16$

$+ 2\cdot 18 + 20 + 21$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$$

$$x-6y=\sqrt{(y-1)\cdot x-6(y-1)}=\sqrt{(y-1)(x-6)}$$

$$2y^2-4y+x^2-2x-10x+20=0.$$

$$2y(y-2)+x(x-2)-10(x-2)=0.$$

$$(x-2)(x-10)+2y(y-2)=0.$$

$$(x-6y)^2=(y-1)(x-6)$$

$$x^2-12x+2y^2-4y+20=0. \qquad D=144-4\cdot(2y^2-4y+20)=$$

$$x_1+x_2=12 \qquad =144-8y^2+16y-80=$$

$$x_1\cdot x_2=2y^2-4y+20.=2(y^2-2y+10) \qquad =64-8y^2+16y=8(8+2y-y^2)$$

$$x_1(12-x_1)=2(y^2-2y+10)$$

$$12x_1-x_1^2=2$$

$$4+\ell^2=AD^2$$

$$\frac{Dk}{AD}=$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$CD \cdot DB = AD \cdot DE = 6.$

$DB^2 = AB \cdot KB = 9.$

$f(p) = [p/2] \quad f(2)=1 \quad f(3)=1 \quad f(5)=2 \quad f(7)=3$

$f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(11)=5 \quad f(13)=6 \quad f(17)=8 \quad f(19)=9.$

$f(2\cdot(-1)) = 1 + f(-1) \quad f(-2) = 1 + f(2)$

$f(-3) = 1 + f(-1) \qquad f(-2) = f((-1)\cdot 2) = f(-1) + f(2).$

$f(-3) + f(-1) = f(3) \qquad f(-2) + f(-1) = f(2)$

$1 + f(-1) + f(-1) = 1$

$f(-1) = 0.$

$f(-10) = f(+10\cdot(-1)) = f(10) + 0.$

$f(-10) = f((-2)\cdot 5) = f(-2) + f(5)$

$f(20) = f(-2) + f(-10) = f(-2)$

$\left(f(\tfrac{1}{5}) = f(2) + f(5^{-1}) \qquad f(\tfrac{1}{5}) = f(1) + f(\tfrac{1}{5})\right)$

$\frac{1}{25} = \qquad f(\tfrac{2}{5}) = \underset{\substack{\parallel \\ 1.}}{f(2)} + f(5^{-1}) = 1 + f(\tfrac{1}{5})$

$f(1) = f(5 \cdot 5^{-1}) = f(5) + f(5^{-1})$

$f(2) = f(10 \cdot 5^{-1}) = f(10) + f(5^{-1}) = f(2) + f(5) + f(5^{-1})$

$1 = 1 + 2 + f(5^{-1}) \quad f(5^{-1}) = -2.$

$f(2) = f(4 \cdot 2^{-1}) = f(4) + f(2^{-1}) = f(2) + f(2) + f(2^{-1})$

$1 = 1 + 1 + f(2^{-1}) \quad f(2^{-1}) = -2.$

$f(\tfrac{1}{2}) = -1 \qquad |f(y^{-1})| \geq |f(x)|.$

$f(\tfrac{x}{y}) = f(x) + f(y^{-1})$