МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 11

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Больший корень уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = 17, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = -10. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 6$, $AN = 12$, а $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{4}{5}$.

   а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

   б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = 3\sqrt{3}$, $BM = \sqrt{6}$.

6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них чётны, но не делятся на 3, остальные же делятся на 3 и при этом нечётны. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно чётное и хотя бы одно кратное 3, можно 25 способами. Сколько было выписано чисел?

7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$-\frac{10x + 10}{5x + 6} \leqslant ax + b \leqslant 5x + 2 + |10x + 6|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-1; -\frac{2}{5}\right]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. ~~a, b, c~~ $b=a+d$ d-разность прогрессии

$c=a+2d$

$c<0<a \Rightarrow a+2d<0<a \Rightarrow a+2d<a \Rightarrow 2d<0 \Rightarrow d<0$

$ax^2-2bx+c=0 \Rightarrow x_1$ и x_2 – корни ур-я

$$x_1=\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \qquad x_2=\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a} > \frac{b}{a}-\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a} \quad (\text{т.к. } \sqrt{b^2-ac}\geq 0,\ \text{и } a>0)$$

x_1-больший $\Rightarrow$ $$x_1=\frac{a+d+\sqrt{a^2+2ad+d^2-a^2-2ad}}{a}=\frac{a+d+\sqrt{d^2}}{a}$$

т.к. $d<0$, то $\sqrt{d^2}=-d \Rightarrow x_1=\frac{a+d-d}{a}=1$

Ответ: 1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\left.\begin{aligned} x-\sqrt[3]{y^2-x^2}&=17 \\ y-\sqrt[3]{y^2-x^2}&=-10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y-x=-27$

$\sqrt[3]{y^2-x^2}=\sqrt[3]{(y-x)(y+x)}=\sqrt[3]{y-x}\cdot\sqrt[3]{y+x}=-3\cdot\sqrt[3]{y+x}$

$\left.\begin{aligned} x+3\sqrt[3]{y+x}&=17 \\ y+3\sqrt[3]{y+x}&=-10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x+y+6\sqrt[3]{y+x}=7 \quad \left(t=\sqrt[3]{y+x}\right):$

$t^3+6t=7 \Rightarrow t^3+6t-7=0 \quad t=1$ - подх.,

тогда: $t^3+0\cdot t^2+6t-7 \;\big|\; t-1$

$-\;t^3-t^2 \qquad\qquad t^2+t+7$

$-\;t^2+6t$

$\;\;t^2-t$

$\;\;7t-7$

$(t-1)(t^2+t+7)=0$

$t=1$ или $t^2+t+7=0$

$D=1-4\cdot7<0$, корней нет

$\cancel{\sqrt[3]{y^2-x^2}}\quad \sqrt[3]{y+x}=1 \Rightarrow y+x=1 \Rightarrow 2y=-27+1=-26 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-13 \Rightarrow x=14$

Ответ: $\cancel{x}$ $(14;-13)$

$\vdots 2,\ \not\vdots 3$ $\underbrace{a_1 \ldots a_n}$ $\vdots 3,\ \not\vdots 2$ $\underbrace{b_1 \ldots b_n}$ $C_n^3 - C_k^3 - C_{n-k}^3 =$

$$= \frac{n!}{3!(n-3)!} - \frac{k!}{3!(k-3)!} - \frac{n-k!}{3!(n-k-3)!} = \frac{1}{6}\Big((n-2)(n-1)\cdot n - (k-2)(k-1)\cdot k -$$

$$-(n-k-1)(n-k-2)(n-k)$$

$\cancel{xyk + (n-x)(n-y)(n-k) = xyk + n^3 - n^2x - n^2k - n^2y +}$

$\cancel{+ xyn + nyk + kxn - xyk = n^3 - n^2}$

$$(n-k-1)(n-k-2)(n-k) = x(x-1)(x-2) = (x^2-x)(x-2) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x =$$

$$= x^3 - 3x^2 + 2x = n^3 - 3n^2k + 3nk^2 - k^3 - 3n^2 + 6nk - 3k^2 + 2n - 2k +$$

$$+ k^3 - 3k^2 + 2k = n^3 - 3n^2k + 3nk^2 - 3n^2 + 6nk - 6k^2 + 2n =$$

$$= n^3 - 3nk(n-k) + 6k(n-k) + 2n - 3n^2 =$$

$$= 3nk(n-k) + 6k(n-k) = \frac{3k(n-k)(n+2)}{6} = 25$$

$k(n-k)(n+2) = 50 = 2\cdot5\cdot5$ $n=7$

2 5 5   1 10 5   1 2 25

$n-k=2 \Rightarrow \cancel{k=5}$ $k=1$ $n+2=10$

$n+2=5 \Rightarrow \cancel{n=3}$ $n-k=5/1$

$-10+6=-4<0$

$-\frac{2}{5}$

$$-\frac{10x+10}{5x+6} \le ax+b \le 5x+2+|10x+6|$$

$10x+6=0$

$x=-\frac{3}{5}$

$$-\frac{10x+10}{5x+6} \le ax+b \le 5x+2+10x+6 = 15x+8$$

$5x+2-10x-6=-5x-4$

$-\frac{4}{3} < -1$

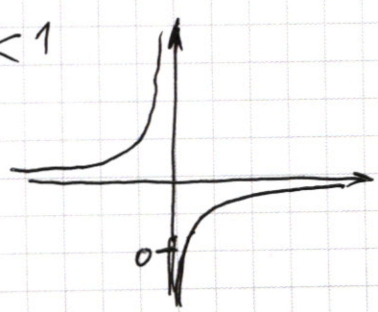
$\cancel{-10}$ $0<1$

$-1{,}5$ 4

$10x+10 \mid 5x+6$

$10x+12 \mid 2$

-2 $2-\frac{2}{5x+6}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. Если младшая степень десяти один или два:

$S \leq 9+99+999 < 12345$ (S – сумма остатков, упомянутая в задаче)

$S \leq 99+999+9999 = 11098 < 12345$

такого быть не может

Если младшая степень десяти хотя бы четыре; то один из остатков – само 6-значное число > 12345 – против-е

То есть степени: $10^3, 10^4, 10^5$

Пусть $\overline{xyzabc}$ – наше число, тогда:

~~abc~~ Наша сумма $\overline{abc} + \overline{zabc} + \overline{yzabc} = 3\overline{abc} + 2z\cdot 10^3 + y\cdot 10^4$

$S = y\cdot 10^4 + 2z\cdot 10^3 + 3\overline{abc} = 12345$

$y=1$, иначе $S > 12345$: или $y=0$

$y=1$: если $z=1$:

$3\overline{abc} = 345$

$\overline{abc} = 115$

Если $z>2$, то $2z\cdot 10^3 + 3\overline{abc} > 2345$

если $z=0$:

$3\overline{abc} = \cancel{1}2345$

~~$\overline{abc} > 999$, против-е~~

2345 не $\vdots$ 3, против-е

$y=0$: $2z\cdot 10^3 + 3\overline{abc} = 12345$

$3\overline{abc} < 3000 \to 12345 - 2z\cdot 10^3 < 3000$

Если $z=4$, то $12345-8000 = 4345 > 3000 \Rightarrow$

$\Rightarrow z \leq 5$ $z=6$ ~~уже рассмотрен~~: $(3\overline{abc} = 345)$

$z=5$: $2345 = 3\overline{abc}$ 2345 не $\vdots$ 3, против-е

Тогда наше число $\overline{x11115}$ или $\overline{x06115}$

x меняется от 1 до 9 $\Rightarrow$ чисел – 18

Ответ: 18

$\cancel{a=}$ $b=a+d$

$c=a+2d$

$x_1=a+3d$

$\cancel{a+3d=a+d}$

$ax^2-2bx+c=0$

$c<0<a$

$\cancel{x_{1,2}=\frac{2}{}}$

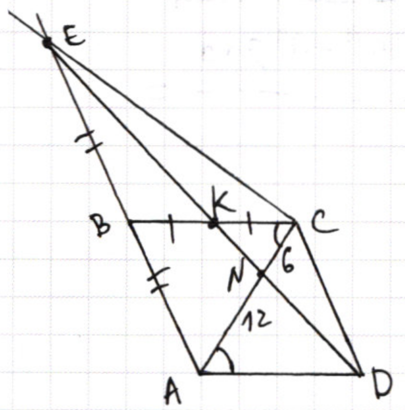
$x_1 = \cancel{a} \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a} =$

$= \frac{a+d+\sqrt{a^2+2ad+d^2-a^2-2ad}}{a}$

$\cancel{4b}$ $\frac{2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Дано: $ABCD$-пар-м, $\angle C > 90^\circ$, ~~AB~~ $CE \perp AC$, $AB \cap CE = E$, $ED \cap AC = N$, $CN = 6$, $AN = 12$, $tg\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{4}{5}$

Найти: $tg\angle BAC$, S_{ENA}

Решение:

Пусть $ED \cap BC = K$, тогда $\triangle KNC \sim \triangle DNA$ ($\angle AND = \angle KNC$, как верт., ~~$\angle NDA$~~ $\angle CAD = \angle ACB$, как накрест. лежащие для $BC \parallel AD$ и сек. AC) по I признаку $\Rightarrow \frac{DN}{KN} = \frac{AD}{KC} = \frac{AN}{NC} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow KC = \frac{AD}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow KC = \frac{BC}{2}$, т.к. $ABCD$-пар-м $\Rightarrow K$-середина $BC \Rightarrow BK = \frac{AD}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow BK$-ср. линия, т.к. $BK \in BC \parallel AD \Rightarrow AB = BE \Rightarrow$ в $\triangle ECA$-прямоуг. BC-медиана из прямого угла $\Rightarrow BC = AB = x$

а) Тогда: $tg\left(\frac{\angle ADC}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\angle ADC}{1+\cos\angle ADC}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{1-\cos\angle ADC}{1+\cos\angle ADC} = \frac{16}{25} \Rightarrow 9 - 25\cos\angle ADC = 16\cos\angle ADC \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle ADC = \frac{9}{41} \Rightarrow$ т.к. $\angle ABC = \angle ADC$, т.к. $ABCD$-пар-м, то $\cos\angle ABC = \frac{9}{41} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме косинусов: $AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC = AC^2 = (AN+NC)^2 = 18^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2\left(1 - \frac{9}{41}\right) = 18^2 \Rightarrow x^2 \cdot \frac{32}{41} = 9 \cdot 18 \Rightarrow \frac{16}{41}x^2 = 9^2 \Rightarrow x = \frac{9}{4}\sqrt{41} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC = BC^2 \Rightarrow AC^2 = 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle BAC = \frac{AC}{2AB} = \frac{18}{\frac{9}{2}\sqrt{41}} = \frac{36}{9\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}} \Rightarrow$ ~~tg~~ $\cos^2\angle BAC = \frac{16}{41} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg^2\angle BAC = \frac{1}{\cos^2\angle BAC} - 1 = \frac{41}{16} - 1 = \frac{41-16}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow$ т.к. это получился ромб, то $\angle BAC = \frac{\angle BAD}{2} < \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, т.е. остр. $\Rightarrow$ $tg\angle BAC = \frac{5}{4}$

б) продолжение на след. стр.

$\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{3}{c} \in \{a_n\}$ $c<0<a$

$ax^2-2bx+c=0$

$\overset{4}{x_1} \in \{a_n\}$ $x_1>x_2$

$$x_1 = \frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{\cancel{2}a} = \frac{a+\cancel{2}d+\sqrt{a^2+\cancel{2}ad+d^2-a^2-\cancel{2}ad}}{\cancel{2}a} =$$

$$= \frac{a+d+\cancel{(}-d)}{a} = 1 = a$$

2. $$\left.\begin{aligned} x-\sqrt[3]{y^2-x^2} &= 17 \\ y-\sqrt[3]{y^2-x^2} &= -10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x-y=27 \Rightarrow y-x=-27$$

$$\left.\begin{aligned} x+3\sqrt[3]{y+x} &= 17 \\ y+3\sqrt[3]{y+x} &= \cancel{17}-10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t^3+6t=7$$

~~$t^3+6t-7 \mid t-1$~~
~~t^3 ... t^2~~

$t^3+0t^2+6t-7 \mid t-1$
$-t^3-t^2 \quad\quad t^2+t+7$
t^2+6t
$-t^2 \cancel{+} -t$
$7t-7$

$t^3+6t-7=0$

$t=1 \Rightarrow 1+6-7=0$:

$(t-1)(t^2+t+7)=0$

$t^2+t+7=0$

$D=1-28<0$

$-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$ ~~$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+7>0$~~

$$t=1 \Rightarrow \sqrt[3]{y+x}=1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} y+x&=1 \\ x-y&=27 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=14 \Rightarrow y=-13$$

3. 12345 x – 6-значное число

~~x~~ $x=10^n+k$

$x=10^{n+1}+a$

$x=10^{n+2}+b$

$k+a+b=12345$

$9+99+999$

$99+999+9999=11098$

$\overline{\alpha\beta\gamma\lambda\delta\varepsilon}$

$\overline{\beta\gamma\lambda\delta\varepsilon}+$
$+\overline{\gamma\lambda\delta\varepsilon}+\overline{\lambda\delta\varepsilon}=$
$=10^4\beta+2\gamma\cdot10^3+$
$+3\lambda\delta\varepsilon=12345$

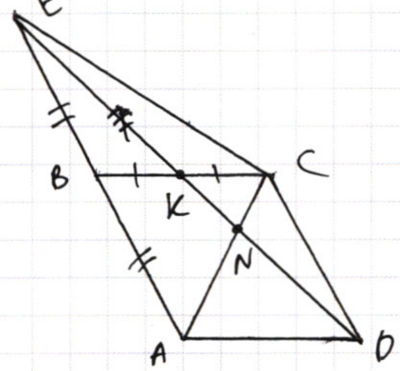
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. (продолжение)

б)



Т.к. $\frac{DN}{KN}=2$, то т.к. у $\triangle CKN$ и $\triangle CND$ – общая высота из т. C, то $\frac{S_{CKN}}{S_{CND}}=\frac{KN}{ND}=\frac{1}{2}$, т.к. BK – ср. линия, то в тр. ECD CK – медиана $\Rightarrow S_{ECK}=S_{CKD}$.

$BK=KC \Rightarrow$ в тр. EBC EK – мед. $\Rightarrow S_{EBK}=S_{EKC}$. Наконец, т.к. BK – ср. л. $\Rightarrow EB=BA \Rightarrow$ в $\triangle ECA$ CB – мед. $\Rightarrow S_{EBC}=S_{CBA}$

$S_{ECK}=S_{CKD}=S_{CKN}+S_{CND}=3S_{CKN} \Rightarrow S_{CKN}=\frac{S_{ECK}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{S_{EBK}=} S_{EBC}=S_{CBA} \Rightarrow S_{EBK}+S_{EKC}=S_{KCN}+S_{BKNA} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2S_{ECK}=\frac{S_{ECK}}{3}+S_{BKNA} \Rightarrow S_{BKNA}=\frac{5}{3}S_{ECK}=5S_{CKN}$

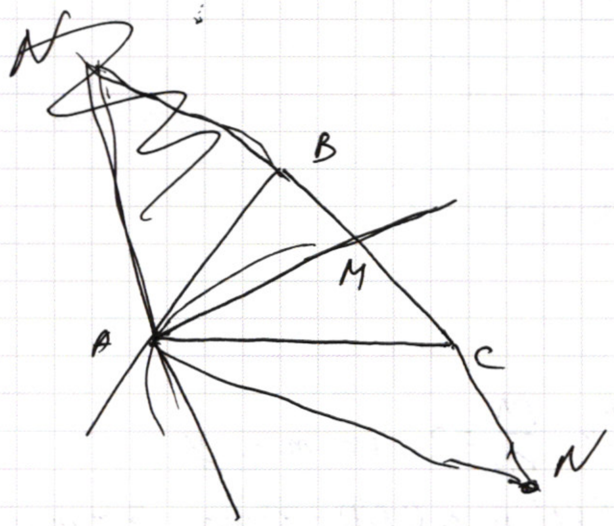
Т.к. ~~ABCD~~ $BC=AB \Rightarrow ABCD$ – ромб $\Rightarrow \angle BCA=\frac{\angle BCD}{2}=\frac{\angle BAD}{2}=\angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\cos\angle BAC=\frac{4}{\sqrt{41}}$, то $\sin\angle BCA=\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\frac{5}{\sqrt{41}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{CKN}=\frac{1}{2}\cdot CK\cdot CN\cdot\sin\angle BCA=\frac{1}{2}\cdot\frac{BC}{2}\cdot 6\cdot\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{9}{16}\cdot 30=\frac{135}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ENA}=S_{EBK}+S_{BKNA}=S_{EKC}+S_{BNNA}=8S_{CKN}=2\cdot 135=270$

Ответ: а) $\operatorname{tg}\angle BAC=\frac{5}{4}$; $S_{ENA}=270$


N
B
M
A
C
N

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. Заметим, что тройка не соотв. усл. тогда и только тогда, когда все три числа взяты из одной группы (есть две группы – 1) $\vdots 2$, не $\vdots 3$; 2) $\vdots 3$, не $\vdots 2$). Тогда пусть k чисел в первой группе, тогда из всех троек нам надо вычесть тройки обр-е числами из одной группы, значит (если в одной группе k, то в другой $n-k$ (n - кол-во чисел на доске)):

$$25 = C_n^3 - C_k^3 - C_{n-k}^3 = \frac{n!}{3!\,n-3!} - \frac{k!}{3!\,k-3!} - \frac{n-k!}{3!\,n-k-3!} =$$

$$= \frac{1}{6}\left((n-2)(n-1)n - k(k-1)(k-2) - (n-k-1)(n-k-2)(n-k-3)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(n^3 - 3n^2 + 2n - (k^3 - 3k^2 + 2k + n^3 - 3n^2k + 3nk^2 - k^3 - 3n^2 + 6nk - \right.$$

$$\left. - 3k^2 + 2n - 2k\right) = \frac{1}{6}\left(3nk(n-k) - 6k(n-k)\right) = \frac{3k(n-k)(n-2)}{6} = 25. \Rightarrow$$

$\Rightarrow k(n-k)(n-2) = 50$, т.к. k и $n \in N$:

1) $k, (n-k), (n-2)$ – 2, 5, 5 2) $k, n-k, n-2$ – 1, 5, 10

3) $k, (n-k), (n-2)$ – 1, 2, 25 4) $k, n-k, n-2$ – 1, 1, 50

$\cancel{n=}(n-2) = k + (n-k) - 2$. Заметим, что только в первой тройке есть подходящие числа $(5 = 2+5-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow n-2 = 5 \Rightarrow n = 7$

Ответ: 7.

$X \cdot 10^4 + 2y \cdot 10^3 + \overset{3}{\cancel{2}}z = 12345$

$X = 1$ $\quad 2y \cdot 10^3 + \overset{3}{\cancel{2}}z = 2345$ $\quad X=0$

$y=1$ $\quad \cancel{y=0}$ $y=0$ $\quad 2y \cdot 10^3 + 3z = 12345$

$\overset{3}{\cancel{2}}z = 345$ $\quad 3z = 2345$ $\quad y=1 : 10345 = 3z \quad z > 999$

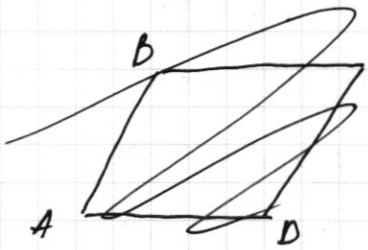
$z = 115$ $\quad$ нет $\quad y=2 : 8345 = 3z \quad z > 999$

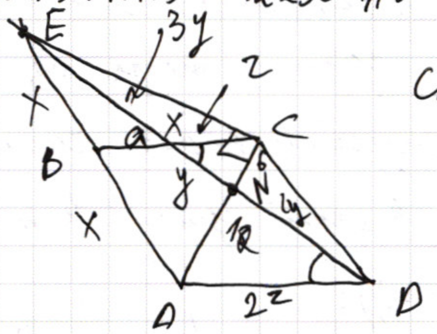
$y = 3 : 6345 = 3z \quad z > 999$

1 11 115

211115

~~1115115 + 11115 = 12230 + 115~~





$CN = 6$

$AN = 12$

$tg\left(\frac{1}{2} \angle ADC\right) = \frac{4}{5}$

~~tg√~~ $\quad tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{4}{5} \quad \frac{1-x}{1+x} = \frac{16}{25}$

$25 - 25x = 16 + 16x \Rightarrow 9 = 41x \Rightarrow x = \frac{9}{41}$ $\quad x = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{41}$

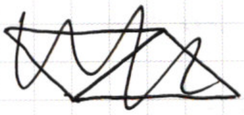
$X^2 + X^2 - 2X^2 \cdot \frac{9}{41} = 18^2$

$2X^2 \, \frac{41-9}{41} = 18^2 \Rightarrow X^2 \, \frac{32}{41} = 9 \cdot 18 \Rightarrow X^2 \cdot \frac{16}{41} = 81 \Rightarrow$

$\Rightarrow X^2 = \frac{81 \cdot 41}{16} = \frac{(80+1)(40+1)}{16} = \frac{3200 + 40 + 80 + 1}{16} = \frac{3321}{16} \quad < 3924$

$X^2 + 18^2 - 2X \cos\beta = X^2 \Rightarrow 18^2 = 2X\cos\beta$

$18 = X \cdot \cos\beta = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{41} \cdot \cos\beta$



$\cos\beta = \frac{8}{\sqrt{41}} \Rightarrow tg\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} - 1 =$

4.

$X^2 + a^2 - 2Xa \cdot \frac{9}{41} = 18^2$

~~12~~ ~~18^2~~

$X^2 + 18^2 - 36X \cdot \cos\beta = a^2$ $\quad 4X^2 - 18^2 = \cancel{4y^2}\, 16y^2 - 6^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)