МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

дана геометрическая прогрессия

$b_1 = a$ и $\cancel{(b_4 \; ax^2+bx+c=)}$

$b_2 = b = b_1 q$ b_4 это корень уравнения $ax^2+2bx+c=0$

$b_3 = c = b_1 \cdot q^2$

Найти: $b_3 = ?$

Решение: $ax^2+2bx+c=0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b_1 \cdot q)^2 - 4(b_1 \cdot b_1 \cdot q^2) = 4b_1^2 q^2 - 4b_1^2 q^2 =$
$= 0.$

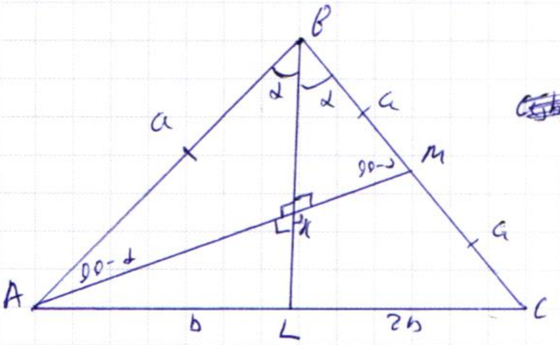
$x_1 = \frac{-2b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{2\cdot(b_1 \cdot q)}{2 \cdot b_1} = -q$

$b_4 = -q = b_1 \cdot q^3$

$b \quad -1 = b_1 \cdot q^2 = b_3$

Ответ: $b_3 = -1$

2



Дано: $P_{ABC} = 1200$ $\cancel{AB=a; BC=b; AC=c}$, одна из бисс. $\perp$ одной из медиан

Найти: количество таких треугольников

Решение: BL = бисс.; AM = медиана

$BM = MC$; $\angle ABL = \angle LBC = \alpha$.

$\angle AKB = \angle BKM = \angle MKL = \angle LKA = 90^\circ$

ΔABK: $\angle BAK = 90^\circ - \alpha$; ΔKBM: $\angle KMB = 90^\circ - \alpha$ $\Rightarrow$ ΔABM равнобед. $AB = BM$

(Th бисс.) ΔABC $\Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AL}{LC} = \frac{a}{2a}$ значит если $AL = b \Rightarrow$
$\Rightarrow LC = 2b$

и из свойств треугольника ΔABC: $AB + BC > AC$; $AC + AB > BC$

$3a > 3b$; $3b > a$ $\Rightarrow$ $P_{ABC} = 3a + 3b = 1200$

$a + b = 400 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b=400 \\ a>b \\ 3b>a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{i) } a=201;\ b=199 \\ \text{ii) } a=202;\ b=198. \\ \text{iii) } a=203;\ b=197 \end{cases}$$

$a, b \in \mathbb{Z}$

i; ii; iii; ... ; $k-1$ — это варианты

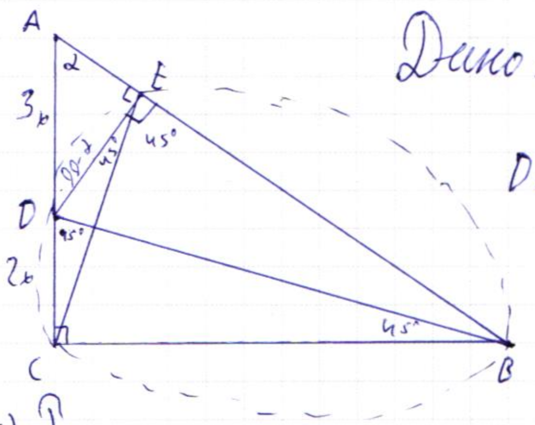
$k=100$

$k-1)$ $a=299$; $b=101$. а дальше не возможно, потому что $3b>a$; а если „a" $=300$ тогда это неравенство не выполняются

Значит всего случаев $k-1$ — а это у нас 99

Ответ: 99 количество вариантов

4



Дано: $\frac{AO}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AO = 3x$; $OC = 2x$

$DE \perp AB$ $\angle DEC = \angle CEB = 45°$

Найти: а) $tg\angle BAC = ?$

б) $AC = \sqrt{29}$; $S_{CEO} = ?$

а) Решение: Пусть $\angle BAC = \alpha$. тогда $\angle ADE = 90 - \alpha$

$BCDE$ — вписанный, потому что противолежащие угла в сумме дают $180°$. $\angle DCB + \angle DEB = 180°$. И BD — диаметр окружности описанной $BCDE$, потому что $\angle DEB = 90°$.

CE и BD диагонали $BCDE$. Так как $BCDE$ вписанный, $\angle CEB = \angle CDB$; $\angle DEC = \angle DBC$ они опираються на одну дугу. Значит $\triangle CDB$ равнобед, потому что углы $\angle CDB = \angle DBC = 45°$. Тогда $DC = CB = 2x$. $\triangle ABC$: $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

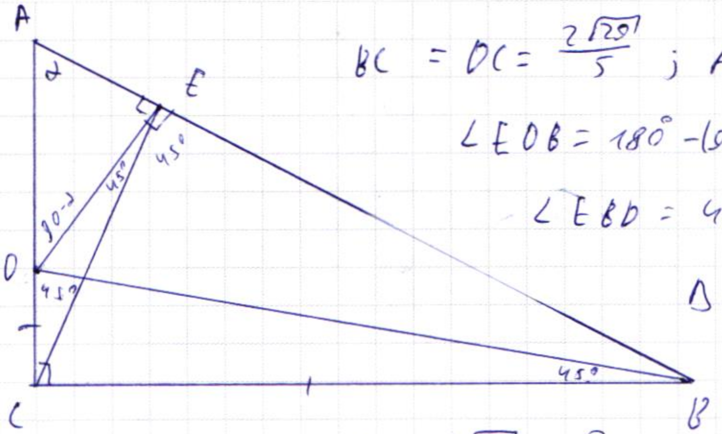
~~Ответ~~ б) $AC = \sqrt{29}$ тогда $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

тогда $tg(90° - \alpha) = \frac{5}{2} = \frac{AE}{DE} = \frac{5y}{2y}$ ($\triangle ADE$) тогда $9x^2 = 25y^2 + 4y^2$

$\Downarrow$

$y = \frac{3}{5}$ $AE = 3$; $DE = \frac{6}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$BC = OC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$; $AO = \frac{3\sqrt{29}}{5}$ $OE = \frac{5}{6}$

$\angle EOB = 180° - (90° - \alpha) - 45° = 45 + \alpha.$

$\angle EBD = 45 - \alpha$

$\triangle OCB: BO^2 = BC^2 + OC^2$

$BO = \sqrt{\frac{4\cdot 29}{25} + \frac{4\cdot 29}{5}} = \frac{2\sqrt{58}}{5}$

$\triangle AOE: \sin\alpha = \frac{6}{5} : \frac{3\sqrt{29}}{5} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\triangle OCE: \angle EOC = 90 + \alpha$ $(\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \sin b\cdot\cos a)$

$\sin(90+\alpha) = \underset{1}{\sin 90°}\cdot\cos\alpha + \underset{0}{\cos 90°}\cdot\sin\alpha = \cos\alpha$

$S_{OCE} = \frac{OC\cdot OE\cdot\sin(90+\alpha)}{2} = \frac{\frac{\cancel{2}\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cos\alpha}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{6}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

Ответ: а) $tg\,\alpha = \frac{2}{5}$; б) $S_{OCE} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

7. $f: R^+ \to R^+$ $f(p) = [\frac{p}{2}]$ p-простое ; a,b- любые

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$1 \le x \le 21$; $1 \le y \le 21$.

$f(\frac{x}{y}) < 0$ $(x;y) = ?$

Решение: Давайте рассмотрим такую вещь.

$f(x\cdot 1) = f(x) + f(1) \Rightarrow f(x) = f(x) + f(1)$

$f(1) = 0.$ $f(2) = [\frac{2}{2}] = 1$

$f(3) = [\frac{3}{2}] = 1$; $f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5)=\left[\frac{5}{2}\right]=2$

$f(6)=f(2)+f(3)=1+1=2$

$f(7)=\left[\frac{7}{2}\right]=3$

$f(8)=f(4)+f(2)=2+1=3$

$f(9)=f(3)+f(3)=1+1=2$

$f(10)=f(5)+f(2)=2+1=3$

$f(11)=\left[\frac{11}{2}\right]=5$

$f(12)=f(3)+f(4)=1+2=3$

$f(13)=\left[\frac{13}{2}\right]=6$

$f(14)=f(7)+f(2)=3+1=4$

$f(15)=f(5)+f(3)=2+1=3$

$f(16)=f(4)+f(4)=2+2=4$

$f(17)=\left[\frac{17}{2}\right]=8$

$f(18)=f(9)+f(2)=2+1=3$

$f(19)=\left[\frac{19}{2}\right]=9$

$f(20)=f(5)+f(4)=2+2=4$

$f(21)=f(7)+f(3)=3+1=4$

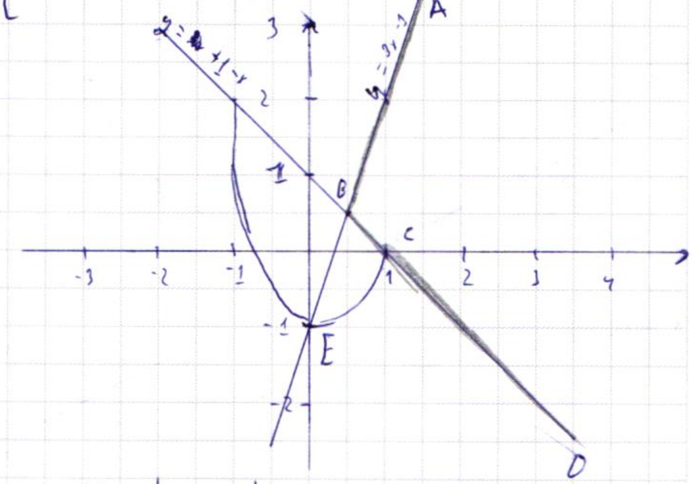
и так далее, не при каких значениях „f" не меньше 0. Давайте $\frac{x}{y}=a$, тогда нам надо найти такой „$f(a)<0$; но при любых значениях $a\in[1;21]$ не может быть меньше 0.

Ответ: таких x,y нету на промежутках $x\in[1;21]$ $y\in[1;21]$

6 Задача

$(a;b)$ $\quad x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$

$$\begin{cases} ax+b \geq 2x^2-x-1 \\ ax+b \leq x+|2x-1| \end{cases}$$



i) $y = x+|2x-1|$

$$\begin{cases} y = x+2x-1 = 3x-1 \ ; \ x \geq \frac{1}{2} \\ y = 1-x \ ; \ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

ii) $y = 2x^2-x-1$ - это парабола.

Значит функция $y=x+|2x-1|$ (График этой функций я обвел карандашом) Значит нам $ax+b=y$ лежит в отрезке BCE. И это работает при $b=\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{4} \ ; \ -\frac{5}{8} \leq -\frac{1}{4}a+\frac{1}{2} \leq \frac{5}{4} \\ x=\frac{3}{2} \ ; \ 2 \leq 1{,}5a+0{,}5 \leq 3{,}5 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $a\in[1;2]$

Ответ: $a\in[1;2]$; $b=\frac{1}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$y \geq 2x$; $xy + 2 \geq 2x + y$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ (y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3 \end{cases}$$

$y - 2 = a$

$x - 1 = b$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 4b^2 = 5ab \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases}$$

$b = \frac{\sqrt{(3-a^2)}}{\sqrt{2}}$ $\quad (a^2 + 2(3 - a^2))^2 = \left(5a\sqrt{\frac{(3-a^2)}{2}}\right)^2$

$a^2 = t$

$$27a^4 - 99a^2 + 72 = 0$$

$$D = 81 \cdot 11 - 81 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 4 = 81(121 - 96) =$$

$$= 3^4 \cdot 5^2 = 45^2$$

$$t_{1,2} = \frac{99 \pm 45}{54} = 1 ; \frac{144}{54}$$

$$a_1^2 = 1 \quad ; \quad a_2^2 = \frac{144}{54}$$

$a \geq 2b$ $\quad a = \pm 1 \quad ; \quad a = \frac{12}{3\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$ $\quad y \geq 2x$

$$b = 1 \quad ; \quad b = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

Ответ: ; $x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} + 1$;

; $y_2 = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$\boxed{a = \pm 1 ; b = 1 \text{ не может быть потому что } a \geq 2b}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3.

$y = 2x$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ (y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3 \end{cases}$$

$x - 1 = a$

$y - 2 = b$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - 2a = \sqrt{ab} \\ b^2 + 2a^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 + b^2 - 4ab = ab \\ b^2 + 2a^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 + b^2 = 5ab \\ b^2 + 2a^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a^2 + b^2 = 5ab \\ 5ab - 2a^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 + b^2 = 5ab \\ a(5b - 2a) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{4a^2} \; b^2 = a(b-4) + 3a^2 \end{cases}$$

$b^2 = 6\sqrt{ab} + 2ab$

$2 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot x}$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2$

$(y - 2 + \sqrt{2}(x-1))^2 = 2xy - 2x + 3$

$$\begin{cases} 4a^2 + b^2 = 5ab \\ b^2 + 2a^2 = 3 \end{cases}$$

$(2a - b)^2 = ab$

$k^2 = a$

$2a^2 = -3 + 5ab$

$-a - b = x - 1 - y + 2$

$a(2a + 5b) = a(5b - a)$

$-(x+y) + 3$

$3a = 0$

$$\begin{cases} b^2 - 2a^2 = ab \\ b^4 + 2a^4 = 3 \end{cases}$$

~~$a = 0; b = 0$~~

$3 = a(5b - 2a) = a(5b - a)$

$$\begin{cases} 4a^2 + b^2 = 5ab \\ b^2 + 2a^2 = 3 \end{cases}$$

$3 = 5ab - 2a^2$

$3 = 5(x+1)(y-2) - 2(x-1)^2$

$b^2 = 3 - 5ab$

$(x-1)(5y - 10 - 2x + 2) = 3$

$3 = b(5a + b)$

$(x-1)(5y - 2x - 8) = 3$

$6 = (y-2)(5x + y - 7)$

$x = 1; y = 3$

$3 + 2b^2 = 5ab$

$x = \frac{1}{2}; y = 3$

$1 =$

$6 = 15 - 1 - 8$

$x = 4 \quad y = 8$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

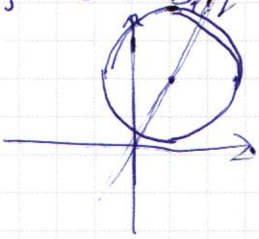
$b_1^2 q^2 - b_1^2 q^2$

$b_1 = a$ $\qquad b_1 q^3 = ax^2 + 2bx + c = 0$

$b_2 = b \Rightarrow b_1 q$ $\qquad D = 4b^2 - 4ac = 0$

$b_3 = c \Rightarrow b_1 q^2$ $\qquad x_{1,2} = \dfrac{-2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$

$2\sqrt{7}(y-2x) = (y+x-3)^2$



$2\sqrt{7}y - 4\sqrt{7}x =$ $\qquad = \dfrac{-2b_1 q}{b_1} = -2q$

$x_1 = -2q$

$2 + 4 - 4 - 8 + 8 = 0$

$b_4 = -2q$ $\qquad ((y-2) + (x-1))^2$

2.

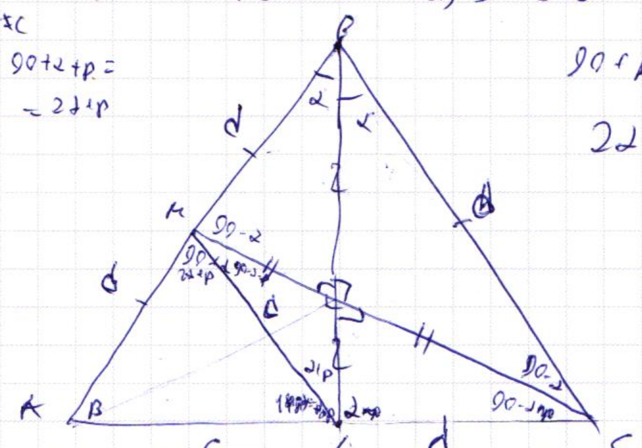
$P = a + b + c = 1200$ $\qquad a, b, c \in \mathbb{Z}$

$a \geq b \geq c$

$90 + 2\alpha - 90 + 2\alpha + \beta =$

$= 2\alpha + \beta$

$4d + c$



$90 + \beta + 90 - 2\alpha$

$2\alpha + 180 - 2\alpha - \beta + \beta = 180°$

$\dfrac{c}{l} = \dfrac{2d}{2d}$

$2d + b + c + l = 1200$

$2d + \frac{2d \cdot l}{c} + \frac{2d \cdot l}{b} + \frac{bc}{2d} = 1200$

$m + 2n + m = x$

$m + n + n = x$

$xy - y - 2x + 2 = 0$

$y(x-1)$

$y(x-1) - 2(x-1) = 0$

$(y-2)(x-1) = 0$

$(y-2)^2 + (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 = 1 + 2$

$(y-2)^2 +$

3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

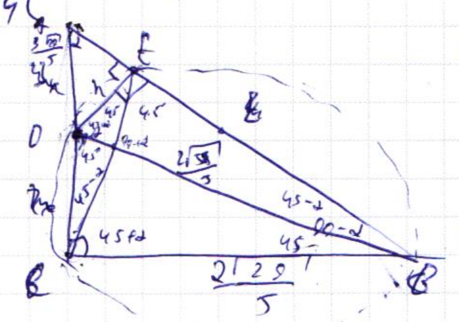
$y^2 + 4x^2 = 5xy - 2x - y + 2$

$xy - 2x - y + 2 \geq 0$

$xy + 2 \geq 2x + y$

$y \geq 2x$

4



a) $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{2x}{5x}$ $\qquad tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{b}$ $\qquad AC = \sqrt{29}$

$b = 2x$ $\qquad tg\,\alpha = \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$

б) $5x = \sqrt{29}$ $\qquad AB = \sqrt{29 + \frac{4 \cdot 29}{25}} = \dfrac{\sqrt{725 + 116}}{25} =$

$x = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$ $\qquad = \dfrac{29}{5}$

841

$29 \cdot 29$: $261 + 58 = 841$

$29 \cdot 25$: $145 + 58 = 725$

$29 \cdot 4 = 116$

$y^2 - 4y + 4 + 2x^2 - 4x + 2 = 3$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

6.

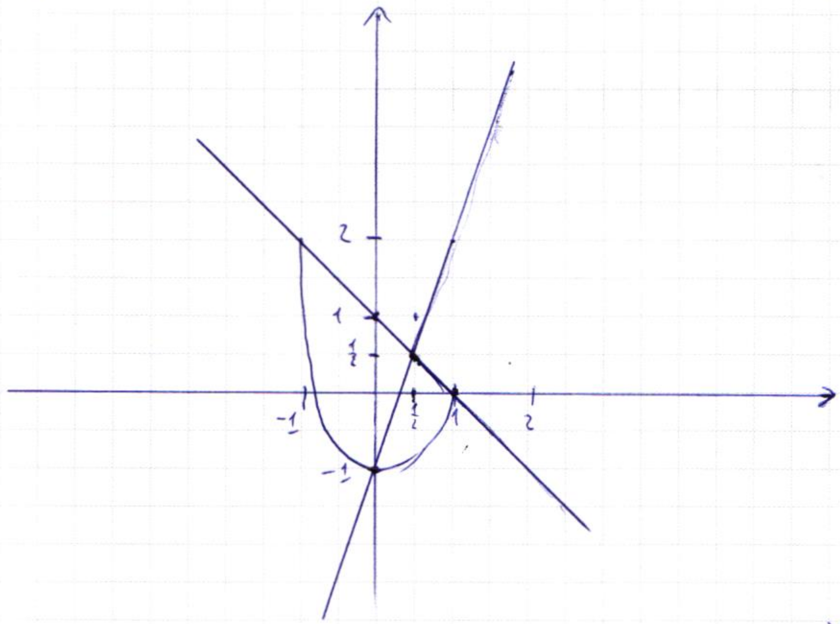
$(a;b)$

$$\begin{cases} ax+b \geq 2x^2-x-1 \\ ax+b \leq x+|2x-1| \end{cases}$$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$x \geq \frac{1}{2}$

$x < \frac{1}{2}$



$2x^2-x-1$

$b = \frac{1}{2}$

$ax + \frac{1}{2} \geq 2x^2-x-1$

$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2x^2-x-1 = -\frac{5}{8}$

$x = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2-x-1 = \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}-1 = 2.$

$x \Rightarrow x+|2x-1| = 1,25 \quad x = -\frac{1}{4}$

$\cancel{x+|2x-1|} = 3,5 \quad x = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} \leq a\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{4} \\ 2 \leq 1,5a + \frac{1}{2} \leq 3,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2;\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

2,25

$a = 1,5 \quad \frac{12}{8}\ \frac{3}{2}$

$-\frac{5}{8} \leq -\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{4}$

$2 \leq$

$\frac{18}{54} = \frac{1}{3}$

$162 - 144$

$144 \quad \sqrt{\frac{54}{2}}$

$\sqrt{\frac{3-1}{2}}$

$\frac{12}{3\sqrt{6}} + 2 =$

$= \frac{12+6\sqrt{6}}{3} =$

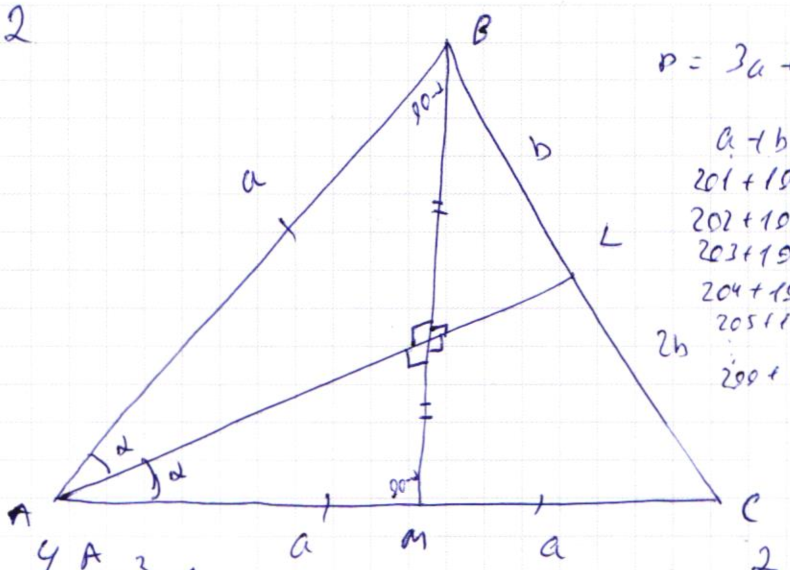
$3 - \frac{144}{54}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2



$p = 3a + 3b \qquad 3a > 3b \qquad 3b > a$

$a > b$

$a + b = 400$

$201 + 199$

$202 + 198$

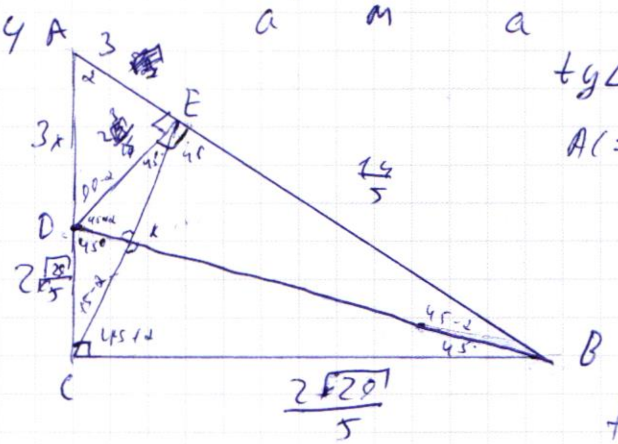
$203 + 197$

$204 + 196$

$205 + 195$

$299 + 101$

4



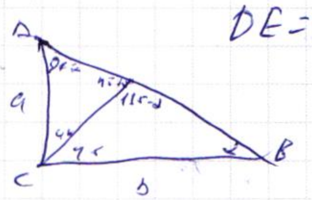
$\frac{14}{5}$

$tg\angle A = \frac{2}{5}$

$AC = \sqrt{29}$

$\frac{DE}{EB} = \frac{DK}{KB}$

$DE = \frac{6}{5}; \; AE = 3$



$DB = \frac{2\sqrt{58}}{5}$

$tg\alpha = \frac{2}{5}$

$tg(90-\alpha) = \frac{5}{2} = \frac{AE}{ED}$

$\frac{DK}{\sin 45^\circ - \alpha} = \frac{CK}{\sin 45^\circ}$

$25b^2 + 4b^2 = \frac{3 \cdot 29}{25} \qquad AB = \frac{29}{5}$

$\sin\alpha = \frac{\cancel{8}}{8} \cdot \frac{\cancel{8}}{3 \cdot 2\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$y^2 = \frac{3}{25} = \frac{3\sqrt{29}}{5} \qquad EB = \frac{29}{5} - 3 = \frac{14}{5}$

$\sin 45 - \alpha = \frac{6}{8} \cdot \frac{\cancel{8}}{2\sqrt{58}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$\sin(90+\alpha) = \sin 90 \cdot \cos\alpha + \cancel{\cos 90 \cdot \sin\alpha}$

$\cos\alpha$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{29}} = \sqrt{\frac{25}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$S_{DCE} = \frac{\frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \sin(90+\alpha)}{2} = \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = 1{,}2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

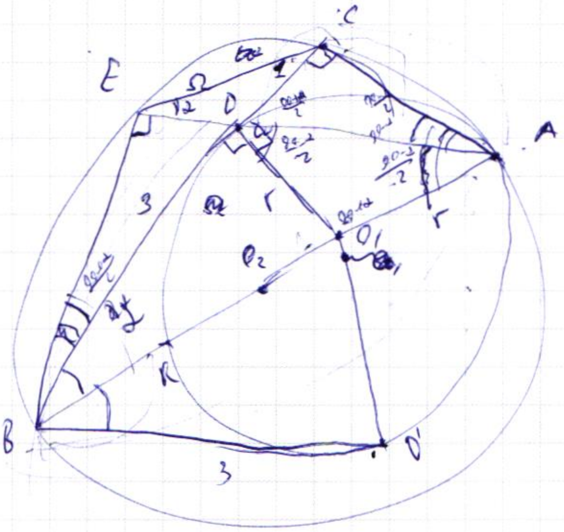
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



~~ABC~~ = трапеция

$AB = 2R$

$AK = 2r$

$180-90-\alpha = \frac{90-\alpha}{2}$

$90 - \frac{90-\alpha}{2} = \frac{180-90+\alpha}{2} = \frac{90+\alpha}{2}$?

$\frac{180-90+2}{2} = \frac{90+2}{2}$

$2R = 2r + BK$

$9 = 2R \cdot BK$

$9 = 2r \cdot BK + BK^2$

$\frac{3}{2}^2 - \frac{1}{4} = \frac{6-1}{4} = \frac{5}{4}$

6

$(a;b)$ $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$ $2x^2 - 4 - 1 \le 3 - 4$ $x \le 2$

$\begin{cases} ax+b \le x+|2x-1| \\ ax+b \ge 2x^2-x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{i)}\ ax+b \le 3x-1 & x \ge \frac{1}{2} \\ \text{ii)}\ ax+b \le -x+1 & x \le \frac{1}{2} \\ ax+b \ge 2x^2-x-1 \end{cases}$

$0 \le x(3-a) - (b+1)$?

$0 \ge x(a+1) + (b-1)$

$0 \ge 2x^2 - x(a+1) - (b+1)$

$D = a^2 + 2a + 1 + 8b - 8 \ge 0$

$a^2 + 2(a+4b) \ge 1$

$0 \ge 2x^2 - 2$

$1 \ge x^2$ $1 \ge x$

7

$f: R^+ \to R^+$

$x, y \in N$ $(x; y)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = [p/2]$

$1 \le x \le 21$; $1 \le y \le 21$ $f(x/y) < 0$

$f(p \cdot 1) = f(p) + f(1)$ $f(1) = f(0) + f(p)$

$f(p) = 0$

$f(1) = 0$; $f(2p) = f(p) + f(2)$

$p = [p/2] + f(2)$

$2 = 1 + f(2)$; $3 = 1 + f(2)$

$f(2) = 1$

$f(p) \ge 0$

$f(x) \ge f(p)$

$f(5) > 0$ $f(2) > 0$

$f(4) > 0$ $f(3) > 0$ $f(3) > 0$

$f(6) > 0$ $f(11) > 0$

$f(9) > 0$ $f(12) > 0$

$f(8) > 0$ $f(13) > 0$

$f(7) > 0$ $f(14) > 0$

$f(10) >$ $f(15) > 0$

$f(20) > 0$ $f(16) > 0$

$f(21) > 0$ $f(17) > 0$

$f(18) > 0$

$f(18) > 0$

$f(8) = f(2) + f(2) = f(4) + f(1)$

$f(p) = f(p) + f(1)$

$f(2p) = f(p) + f(2)$

$p = [p/2] + f(2)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(6) = f(2) + f(3)$ $f(4) < 0$

$f(9) = 2f(3)$

$f(25) = 2f(5)$

$f(p) = \frac{f(4)}{2} + \frac{f(9)}{2}$

$f(4) + f(9) = 2f(6)$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} - 1 =$

$= \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$

$g = 1$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = \frac{4}{2}$

$b - \frac{1}{4}a$

$\frac{3}{2}a + b$ $1{,}5$

$-\frac{5}{8}$ 2 $\le x + 1{,}5 \le x + |2x-1|$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$9 \cdot 8$

$99^2 -$

$33^2 \cdot 9 - 9 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3^3$

$11^2 \cdot 87$

$81(11^2 - 8 \cdot 4 \cdot 3) = 3^4 \cdot 5^2 \quad 4 \cdot 18$

$\frac{\cdot 32}{96}$

$121 - 96 =$
$= 25$

$b^2 = \frac{(\sqrt{3} - a)(\sqrt{3} + a)}{2}$

$36 - 12a^2 + a^4 = \frac{25a^2(3 - a^2)}{2}$

$2(3 - a^2) + a^2 = 5a\left(\sqrt{\frac{3 - a^2}{2}}\right)$

$6 - 2a^2 + a^2 = 5a\sqrt{\frac{3 - a^2}{2}}$

$(6 - a^2)^2 = \frac{25a^2(3 - a^2)}{2}$

$72 - 24a^2 + 2a^4 = 75a^2 - 25a^4$

$27a^4 - 99a^2 + 72 = 0$

$D = 9801 - 7776 =$

$\frac{72}{27} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

$72 - 24a^2 + 2a^4 = 75a^2 - 25a^4$

$25a^4 - 99a^2 + 72 = 0$

$\frac{16}{6} + \frac{1}{3} = 3$

$t = a^2$

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 72 \\ \hline 216 \\ +\ 756 \\ \hline 7776 \end{array}$$

10000

$$\begin{array}{r} 99 \\ \times\ 99 \\ \hline 891 \\ +\ 891 \\ \hline 9801 \end{array}$$

8

$25t^2 - 99t + 72 = 0$

$(t - 1)(25t + 1) = 76$

$D = 9801 - 7200 = 2601$

$$\begin{array}{r} 224 \\ 1001 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$9000 \quad 7200$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times\ 51 \\ \hline 2500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9801 \\ -\ 7200 \\ \hline 2501 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline \cancel{10625} \\ 1225 \end{array}$$

200

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)