



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .

5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

т.к.  $a, b, c$ , 1, 2 и 3 члены геометрической прогрессии,  $b = a \cdot l$ ,  $c = a \cdot l^2$ , где  $l$  некотор. число. Пусть  $e$  - 4 член этой прогрессии, тогда  $e = a \cdot l^3$

$$ax^2 - 2bx + c = 0 \quad \text{или} \quad ax^2 - 2alx + al^2 = 0$$

$$D = 4a^2l^2 - 4a^2l^2 = 0$$

$$x = e \text{ (по усл.)} = \frac{2al}{2a} = l = al^3$$

$$l(al^2 - 1) = 0 \text{ т.к. } l \text{ не может быть } 0,$$

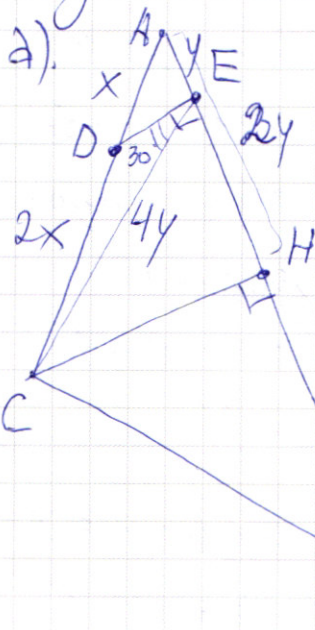
ибо это множит. для геом. прогрессии, то

$$al^2 - 1 = 0 \quad al^2 = 1 \text{ т.к. } c = al^2 \Rightarrow$$

$$c = 1$$

Ответ:  $c = 1$

Задача 4.



Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ ,  $DE \perp AB$ ,  $\angle CED = 30^\circ$   
 $\angle AC = \sqrt{7}$

Найти:  $\tan \angle BAC$  - ?  $\triangle SACED$

Решение: а) проведем высоту  $CH$   
 Рассмотрим  $\triangle CAH$  и  $\triangle ADE$ .

$\angle CAE = \angle AED = \angle AHC = 90^\circ$   $\triangle ADE \sim \triangle ACH$   
 $\angle CAB$  - общий  $\angle$  (по 2 углам)

пусть  $AD = x$ ,  $AE = y$

тогда  $AC = 3x$ ,  $AH = 3y$

2)  $\angle CEH = \angle DEH - \angle CED = 90 - 30 = 60^\circ \Rightarrow$   
 $\angle ECH = 30^\circ \Rightarrow EH = \frac{1}{2} EC$

$EC = 2EH = 4y$ . по ПТ теорема:

$$HC = \sqrt{EC^2 - EH^2} = \sqrt{12}y$$

$$\tan \angle CAB = \frac{CH}{AH} = \frac{\sqrt{12}y}{3y} = \sqrt{\frac{12}{9}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$$



б) Из  $\triangle ACH$  по  $\Delta$  теореме:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} \quad 9x^2 = 21y^2 \quad x = \sqrt{\frac{7}{3}}y$$

$$DE = \frac{CH}{3} = \frac{\sqrt{12}}{3}y = \frac{2}{\sqrt{3}}y$$

$$S_{\triangle ADE} = DE \cdot AE \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}y \cdot y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}y^2$$

$$S_{\triangle AHC} = AH \cdot CH \cdot \frac{1}{2} = 3y \cdot \sqrt{12}y \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{12}y^2$$

$$S_{\triangle CEH} = EH \cdot CH \cdot \frac{1}{2} = 2y \cdot \sqrt{12}y \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{12}y^2$$

$$S_{\triangle CDE} = S_{\triangle AHC} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle CEH} =$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{12}y^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y^2 - \sqrt{12}y^2 = AC = 3x \quad x = \frac{AC}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{3}{9} - \frac{3}{9 \cdot \sqrt{3}} - \sqrt{12} \cdot \frac{3}{9} =$$

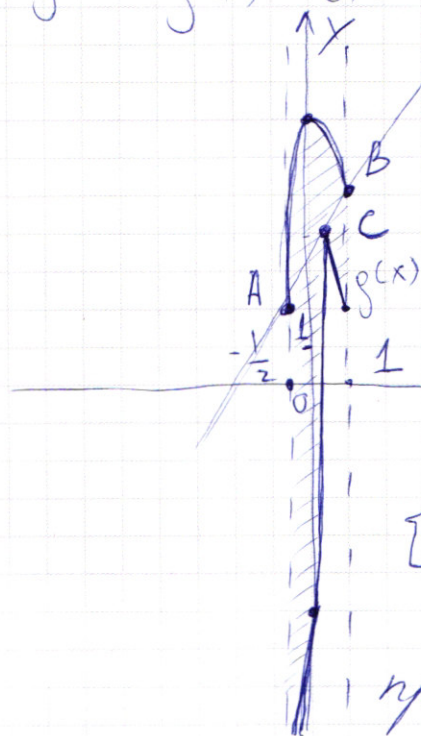
$$= \frac{3}{9} \left( \frac{3}{2}\sqrt{12} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{12} \right) = \frac{3}{9} \left( \frac{1}{2}\sqrt{12} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{3}{9} \left( \frac{\sqrt{36} - 2}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Ответ:  $\angle CAB = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $S_{\triangle CDE} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

6.  $8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$

Пусть  $g(x) = 8x - 6|2x - 1|$ ,  $e(x) = -8x^2 + 6x + 7$



Точки функции  $f(x) = ax + b$  не должны лежать вне заштрихованной плоскости, чтобы выполнялось неравенство. Траектория  $f(x)$  — лев. прямая

Рассм. прямую, проходящую точки A и B.

$$\begin{cases} 5 = a + b \\ 1 + 1/2 = 2 = -1/2 a + b \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}a = 3 \quad a = 2 \quad b = 5 - 2 = 3$$

при  $x = \frac{1}{2}$   $y = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 4$ , точка C.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда  $f(x) = 2x + 3$  единственная функция, удовлетворяющая нашим условиям, т.к. при любых сдвигах и поворотах прямой появятся точки вне заштрихованной области.

Ответ:  $(2; 3)$

Задание 7.

$$f(1) = \left[ \frac{1}{2} \right] = 0 \text{ (т.к. 1 простое число)}$$

$$\text{тогда } f\left(\frac{x}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Рассмотрим  $f(x)$ ,  $2 \leq x \leq 22$ .  $f(x)$  при  $x$ -простое число всегда положительна.

$f(x)$  при  $x$ -составное число будет положительна, т.к. любое составное число - произведение простых чисел, ~~которые~~ а т.к.  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , получится сумма положительных чисел.

$$\text{т.к. } f(p) = \left[ \frac{p}{2} \right], \text{ а } p \text{ чётное } \geq 2$$

Поэтому, т.к.  $f(x)$  всегда положительна,

$$\text{чтобы } f\left(\frac{x}{y}\right) < 0, \text{ } |f\left(\frac{1}{y}\right)| > f(x)$$

$f\left(\frac{1}{y}\right)$  при  $2 \leq y \leq 22$  по аналогии всегда положительна. Т.к. мы доказали



ли, что  $f(m) = -f(\frac{1}{m})$  для любых  $m$ ,  
 $f(\frac{1}{y}) = -f(y)$ , следовательно  $f(\frac{1}{y})$  всегда отрицательна.

Тогда чтобы  $f(\frac{x}{y}) < 0$ ,  $-f(\frac{1}{y}) > f(x)$   
 $f^*(y) > f(x)$

Метод перебора,  $\#$  где каковы  $f(y)$  ищем  
 $f(x) < f(y)$  и ищем всевозможных  $f(x)$

$f(2) = [1] = 1$	(нет удов. $f(x)$ )
$f(3) = [1, 5] = 1$	(нет удов. $f(x)$ )
$f(4) = f(2) + f(2) = 2$	2 удов. $f(x)$
$f(5) = [2, 5] = 2$	2 удов. $f(x)$
$f(6) = f(3) + f(2) = 2$	2 удов. $f(x)$
$f(7) = [3, 5] = 3$	6 удов. $f(x)$
$f(8) = f(4) + f(2) = 3$	6 удов. $f(x)$
$f(9) = f(3) + f(3) = 2$	2 удов. $f(x)$
$f(10) = f(5) + f(2) = 3$	6 удов. $f(x)$
$f(11) = [5, 5] = 5$	16 удов. $f(x)$
$f(12) = f(6) + f(2) = 3$	6 удов. $f(x)$
$f(13) = [6, 5] = 6$	17 удов. $f(x)$
$f(14) = f(7) + f(2) = 4$	12 удов. $f(x)$
$f(15) = f(5) + f(3) = 3$	6 удов. $f(x)$
$f(16) = f(4) + f(4) = 4$	12 удов. $f(x)$
$f(17) = [8, 5] = 8$	19 удов. $f(x)$
$f(18) = f(9) + f(2) = 3$	6 удов. $f(x)$
$f(19) = [9, 5] = 9$	20 удов. $f(x)$
$f(20) = f(10) + f(2) = 4$	12 удов. $f(x)$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(21) = f(7) + f(3) = 4 \quad 12 \text{ удов. } f(x)$$

$$f(22) = f(11) + f(2) = 6 \quad 17 \text{ удов. } f(x)$$

Сложим все удов.  $f(x)$ :

$$4 \cdot 2 + 7 \cdot 6 + 4 \cdot 12 + 16 + 17 \cdot 2 + 19 + 20 = 72 + 42 + 48 + 39 = 187$$

Ответ: 187 пар

Задача 3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$x - 6y = \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y - 16 = 0$$

$$(x-6)^2 = -2y^2 + 4y + 16$$

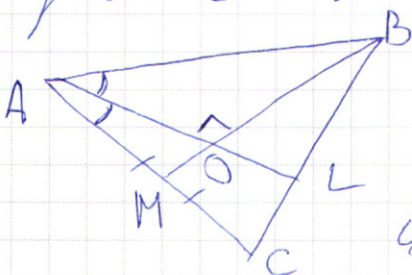
$$-2y^2 + 4y + 16 = 0 \quad D = 16 + 128 = 144$$

$$y = \frac{-4 \pm 12}{-4} = -2$$

$$(x-6)^2 = -2(y-4)(y+2)$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 = -2(y-4)(y+2) \\ \sqrt{x-6)(y-1)} = x-6y \end{cases}$$

Задача 2.



BM - медиана, AL - бисс.  
 $\cos \angle MOA = \frac{AO}{AM}$   $\cos \angle OAB = \frac{AO}{AB}$   
 $\frac{AO}{AM} = \frac{AO}{AB}$   $AB = AM = \frac{1}{2} AC$   
 Четыре медианы ~~биссектрис~~



биссектриса была  $\perp$  медиане, одна из  
 сторон должна быть в 2 раза больше  
 другой той, к которой проведена медиана.  
 [не перпендикулярно биссектрисе.]

~~$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3a+c}{2}$$~~

формула  
Герона

$3x + n = 900$ , где  $x$  - одна из  
 сторон,  $n$  - одна из сторон.

$$3x = 900 - n$$

$$x = \frac{900 - n}{3}$$

$$3x > n$$

$$2x < x + n$$

$$x < 2x + n$$

$$n > x$$

$$x < n < 3x$$

$$\frac{900 - n}{3} < n < 900 - n$$

$$n > 300 - \frac{n}{3}$$

$$\frac{4}{3}n > 300 \quad n > 225$$

$$n < 900 - n$$

$$2n < 900 \quad n < 450$$

все целые  $x = \frac{900 - n}{3}$ , при  
 $225 < n < 450$  будет идти в ответ



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x - 6y \leq \sqrt{xy - 6x - x + 6}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 \leq 0 \quad x - 6y \leq 0$$

~~D = 144~~

$$\frac{x}{y} + 2\frac{y}{x} - 12\frac{1}{y} - 4\frac{1}{x} + \frac{20}{xy} \leq 0$$

Пусть  $t = \frac{x}{y}$

$$t + \frac{2}{t} - 12\frac{1}{y} - 4\frac{1}{x}$$

$$x^2 - 12x + 36 +$$

$$36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 - 2y^2 + 12x + 4y - 20 \leq 0$$

$$34y^2 + 10y - 13xy + 13x - 26 \leq 0$$

$$34y^2 + y(10 - 13x) - 26 \leq 0$$

$$D \leq (10 - 13x)^2 + 26 \cdot 34$$

$$x - 6x \leq -x^2 - 2y^2$$

$$x - 6y \leq -x^2 - 2y^2 - 20 + 11x + 2y \quad b = \sqrt{t + 2x + xy + 6}$$

$$\frac{2x + xy + 6 \leq t \cdot (t - 1)}{2x + xy + 6 \leq}$$

$(x - 6y)$

$$2x + xy + 6 \leq$$

$$t^2 \leq t + 2x + xy + 6$$

$$x - 6y \leq -x^2 - 2y^2 - 13x$$

$$x^2 + 2y^2 + 20 \leq 12x + 4y$$

$$x^2 + 2y^2 + 20 \leq$$

$$\sqrt{x(y-1) - 6(y-1)}$$

$$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y \leq$$

$$-x(x-12)$$



$$x - 6y = \sqrt{(x-6)(x-4)}$$

$$x(x-12) + 2y(y-2) + 20 = 0$$

$$x^2(x-6)^2 + 2y^2 - 4y - 16 = 0$$

$$(x-6)^2 = -2y^2 + 4y + 16$$

$$D = 16 + 128 = 144$$

$$2(y^2 + 2y)$$

$$(x-6y)^2 = (x-6)^2(y-1)$$

$$-2y^2 + 4y + 16 = (x-6)^2$$

$$\frac{-4 \pm 12}{-4} = 4$$

$$\frac{-4 \pm 12}{-4} = -2$$

$$\frac{(x-6y)^2}{x-6} = 2(y-4)(y+2)$$

$$(x-6y) = \sqrt{-2(y-4)(y+2)} \cdot (y-1)$$

$$(x-6y)^4 = -2 \cdot (y-1)^2 (y-4)^2 (y+2)^2$$

$$(x-6)^2 = -2(y-4)(y+2)$$

$$\frac{(x-6y)^2}{y-1} = \sqrt{-2(y-4)(y+2)}$$

$$x-6y = \sqrt{-2 \frac{(y-4)(y+2)}{y-1}} + 6y$$

$$-4 \cdot 2 = -2 \quad 18$$

$$3 \cdot -3$$

$$-9 \cdot -1 \quad 72$$

$$+34$$

$$\underline{+46}$$

$$86$$

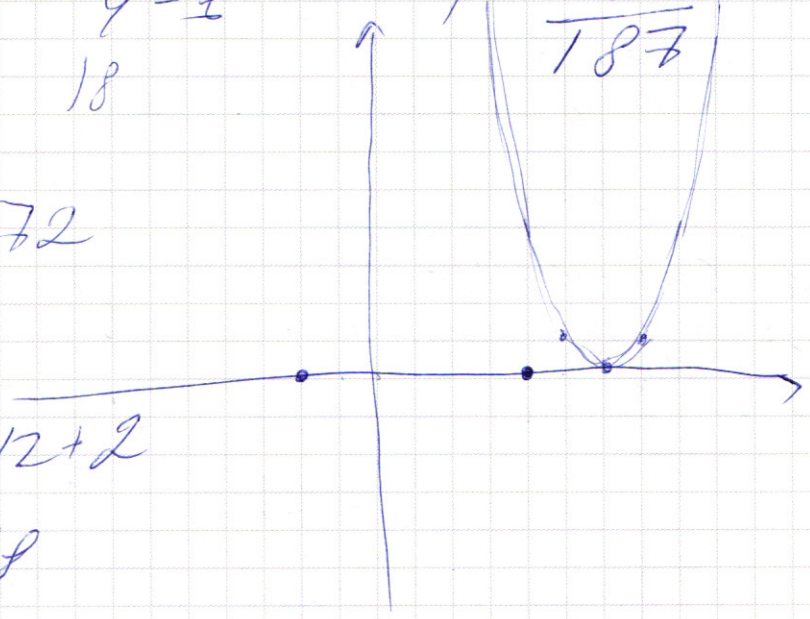
$$+148$$

$$7 \quad 39$$

$$\underline{187}$$

$$4 + 12 + 2$$

$$y \cdot 18$$









$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = \left[ \frac{p}{2} \right]$$

$$2 \leq x \leq 22$$

$$2 \leq y \leq 22$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{6}{3}\right) = f(2)$$

$$f(2) = 1, f(3) = 1$$

$$f(1) = 0, f\left(\frac{2}{3}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$$

$$f(2) = 1, f(3) = 1, f(5) = 2, f(7) = 3, f(11) = 5,$$

$$f(13) = 6, f(17) = 8, f(19) = 9$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right), \text{ при этом } f(x) \geq 0, \text{ тогда}$$

целое -  $f\left(\frac{1}{y}\right) > f(x)$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{2}{2}\right) = f(1) = 0$$

$$f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$f(4) = 2, f(9) = 3$$

$$f(4) = f\left(\frac{8}{2}\right) = f(8) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1, 3 - 1$$

$$f(1)$$

$f(y) > f(x)$   
удовлетворяет

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 1$$

$$f(4) = 2 \quad 2 \text{ случая}$$

$$f(5) = 2 \quad 2 \text{ случая}$$

$$f(6)$$

$$\frac{5}{5}$$

$$\frac{4}{5} = f(4) + f\left(\frac{1}{5}\right)$$





$$\frac{1}{2}\sqrt{12}$$

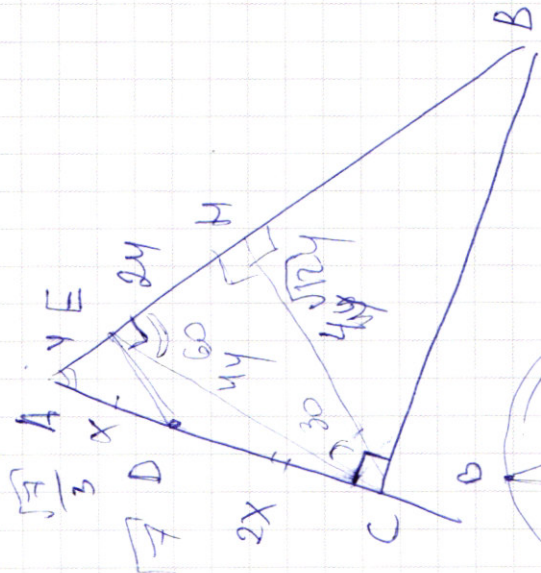
~~12~~

$$9x^2 + 9y^2 = 12y^2$$

$$9x^2 = 3y^2$$

$$x = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{36}$$

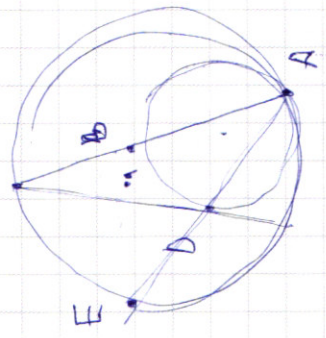


$$\frac{CH}{AH} = \frac{CB}{AB}$$

$$\sqrt{16y} = \frac{44\sqrt{12}y}{24}$$

$$\sqrt{12} = \frac{\sqrt{12}y}{3y}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$



$$8x - 6(2x - 1) \leq ax + b$$

$$-6 \quad -\frac{6}{-16} \quad \frac{6}{16}$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$-4 - 12 = -16$$

$$-8 + 6 + 7 = -5 + 7 = 2$$

$$-2 - 3 + 7 = 2$$

$$-\frac{1}{8} \frac{1}{4}$$









ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)