МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{1}{2}; 1\right]$

$8x - 6(2x-1) \le -8x^2+6x+7$

$8x - 12x + 6 \le -8x^2+6x+7$

$-4x+6$

$8x^2 - 10x - 1 \le 0$

$D = 100 - 32 = 68 = (2\sqrt{17})^2$

$x = \frac{+10 \pm 2\sqrt{17}}{16}$

$x \in \left[\frac{10-2\sqrt{17}}{16}; \frac{10+2\sqrt{17}}{16}\right]$

$8\left(x - \frac{10-2\sqrt{17}}{16}\right)\left(x - \frac{10+2\sqrt{17}}{16}\right) \le 0$

$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$\left[\begin{array}{l} x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \\ x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{array}\right.$

$x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

При любых x выполн. на данном промеж.

$y = ax + b$

68	2
34	2
17	17

$4 < \sqrt{17} < 5$

$8 < 2\sqrt{17} < 10$

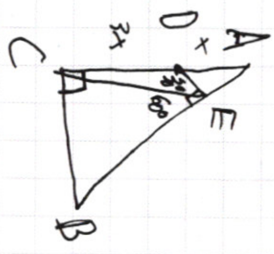
$-10 < -2\sqrt{17} < -8$

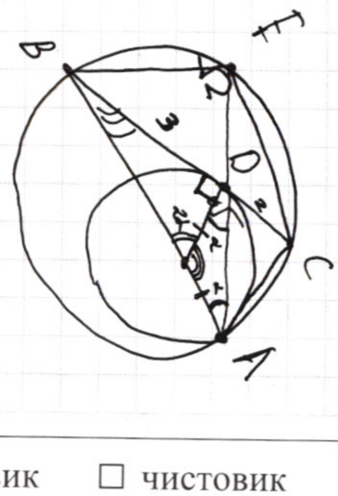
$0 < -2\sqrt{17} + 10 < 2$

$0 < \frac{-2\sqrt{17}+10}{16} \quad \frac{1}{8}$

$18 < 10 + 2\sqrt{17} < 20$

$1 < \frac{18}{16} < 10 + 2\sqrt{17}$





☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$, p – простые число

$2 \le x \le 22$

$2 \le y \le 22$

$f(xy) < 0$

$\cancel{f(xy) = f(x) + f(y)}$

$\cancel{f(xy) = \left[\frac{xy}{2}\right]}$

$f(4) = f(2) + f(2)$

$f(1) = 2f(1)$

$\boxed{f(1) = 0}$ $f(4) = 2f(2)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = \cancel{f(x) + 2f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right)}$

$f(x) = 2f(\sqrt{x})$

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = 2f\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$

$f(3) = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(11) = 5$

$f(22) = f(2) + f(11) =$

$= 1 + 5 = 6$

$f\left(\frac{2}{11}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{11}\right) =$

$= \cancel{5}\ 1 + f\left(\frac{1}{11}\right)$

$f(13) = 6$

$f(17) = 8$

$f(19) = 9$

$\cancel{f}$

$f(9) = 2f(3) = 2$

$0 = f(1)$

$f(10) = 3$

$1 = f(2) = f(3)$

$f(12) = 3$

$2 = f(4) = f(5) = f(6) = f(9)$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1 + 3 = 4$

$3 = f(7) = f(8) = f(10) = f(12) = f(15) = f(18) =$

$=$

$f(15) = 3$

$5 = f(11)$

$f(16) = f(8) + f(2) = 4$

$f(18) = f(9) + f(2) = 2 + 1 = 3$

$6 = f(13) = f(22)$

$f(20) = f(2) + f(10)$

$4 = f(14) = 4 = f(16) = f(20) = f(21)$

$f(21) = f(7) + f(3)$

$8 = f(17)$

$f(22) = f(11) + f(2)$

$9 = f(19)$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

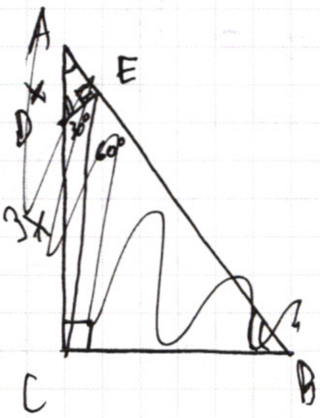
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x-6y+yx-yx=$

$=$

$\cancel{x-6y-xy-6}$

$x-yx+yx-6y=$

$=x(1-y)+y(x-6)=$

$=y(x-6)-x(y-1)$

$=y(x-6)$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x^2-12x+36)+(2y^2-4y+2)=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$(x-6)^2=18-2(y-1)^2$

$(x-6)=\sqrt{18-2(y-1)^2}$

$x=\sqrt{2(9-(y-1)^2}+6=$

$=\sqrt{2(9-y+1)(9+y-1)}+6=$

$=\sqrt{2(10-y)(y+8)}+6$

$$\begin{cases} a^2y-b^2x=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$a^2+2\sqrt{2}ab+2b^2=18+2\sqrt{2}(a^2y-b^2x)$

$a^2+2\sqrt{2}a^2y-2\sqrt{2}b^2x+2b^2=18+2\sqrt{2}ab$

$a^2(1+2\sqrt{2}y)-2b^2(\sqrt{2}x-1)=18+2\sqrt{2}ab$

$\sqrt{2}x-1=\dfrac{18+2\sqrt{2}ab-a^2-2\sqrt{2}ya^2}{-2b^2}$

$x=\dfrac{\left(\left(\dfrac{18+2\sqrt{2}ab-a^2-2\sqrt{2}ya^2}{-2b^2}\right)+1\right)}{\sqrt{2}}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$x = \frac{18\sqrt{2} + 4ab - a^2 - 4a^2y}{-2b^2} + \sqrt{2}$$

$ax + b \le 1 \qquad b \le 1 - a$

$8\cdot(-\frac{1}{2}) - 6|2\cdot(-\frac{1}{2}) - 1| =$

$= -4 - 6\cdot|-2| =$

$= -4 - 12 = -16$

$x - 6y = ab$

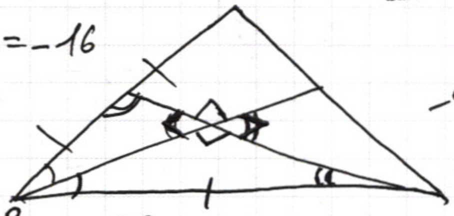
$x = 6y + \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$-8\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot(-\frac{1}{2}) + 7 =$

$= -2 - 3 + 7 =$

$= 2$

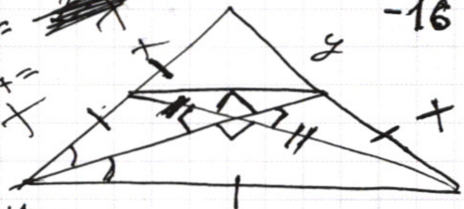
$-16 \quad 2$



$-8\cdot 1 + 6\cdot 1 + 7 =$

$= -8 + 6 + 7 =$

$= 5$



$\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

$-8\cdot\frac{9}{64} + 6\cdot\frac{3}{8} + 7 =$

$= \frac{9}{-8} + \frac{9}{4} + 7 = \frac{18}{8} - \frac{9}{8} + 7 =$

$y = a(-\frac{1}{2}) + b$

$-16 = -\frac{1}{2}a + b$

$2 = -\frac{1}{2}a + b$

$-8\cdot\frac{1}{16} + 6\cdot\frac{1}{4} + 7 =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{6}{4} + 7 =$

$= \frac{6}{4} - \frac{2}{4} + 7 =$

$= 1 + 7 = 8$

$\begin{cases} y + x + x > 2x \\ y + x + x + x > x \\ y + x < 3x \end{cases}$

$= \frac{9}{8} + 7 = 8\frac{1}{8}$

$\begin{cases} 4x + y = 900 \\ 2x + y + x \ge x \\ 3x \ge y + x \\ y + x + x \ge 2x \end{cases}$

$\begin{cases} y > 0 \\ y > -2x \\ y < 2x \end{cases}$

$y = ax + b$

$\begin{cases} y \in [0; 2x] \\ 4x + y = 900 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x + y = 900 \\ 2x + y \ge 0 \\ 2x \ge y \\ y \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 900 - 4x \\ 2x + 900 - 4x \ge 0 \\ 2x \ge 900 - 4x \\ 900 - 4x \ge 0 \end{cases}$

$-8\cdot 4 + 6\cdot 2 + 7 =$

$= -32 + 12 + 7 =$

$= -20 + 7 = -13$

$x = 2$

$20\cdot(-\frac{1}{2}) = -10$

$-8\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot(-\frac{1}{2}) + 7 =$

$= -2 - 3 + 7 =$

$\begin{cases} y = 900 - 4x \\ y = 225 - x \\ y \in [0; 2x] \end{cases}$

$\begin{cases} y = 900 - 4x \\ 900 \ge 2x \\ 900 \ge 6x \\ 900 \ge 4x \end{cases}$

$\begin{cases} y = 900 - 4x \\ 900 \ge 6x \end{cases}$

$\begin{cases} y = 900 - 4x \\ x \le 150 \end{cases}$

$-0{,}5 + 15 + 7 =$

$= 8$

$-\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{}$

$y > 180$

$x = y + 225$

$y \in [0; 2\cdot(y + 225)]$

$\begin{cases} y \ge 0 \\ y < 2x \end{cases}$

$\begin{cases} y > 0 \\ y < 2y + 450 \end{cases}$

$y > -450$

$x = 225 - 0{,}25y$

$y < 2x$

$y > 225 - 0{,}25y$

$y > 0$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6y \geq 0$, $x \geq 6y$

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x^2-\cancel{36x}\ 12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \quad |-xy+6y+x-6$

$\begin{cases} x^2+36y^2-13xy+6y+x-6=0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$\cancel{x^2}+\overset{34y^2}{\cancel{36y^2}}-13xy+6y+x-6=\cancel{x^2}+\cancel{2y^2}-12x-\cancel{4y}+20$

$34y^2-13xy+10y$

$x^2-x^2+36y^2-2y^2-13xy+6y+4y+x+12x-6-20=0$

$34y^2-13xy+10y+13x-26=0$

$\cancel{34y^2-13(xy-x+2)+10y=0}$

$\cancel{34y^2-13x+13x(1-y)}$

$34y^2+10y-13xy+13x-26=0$

$34y^2+y(10-13x)+13(x-2)=0$

$D=100-260x+139x^2+13x-26=139x^2-247x+74=$

$=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$ для таких ~~$|2x-1| = 2x - 1$~~

$ax+b$ – прямая

$[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

$8x + 6|2x-1| \le \cancel{ax+b}\ -8x^2 + 6x + 7$

$8x + 12x - 6 \le -8x^2 + 6x + 7$

$\frac{-38}{16}$

$\cancel{20x - 6 \le -8x^2 + 6x + 7 \mid +8x^2 - 6x - 7}$

$\cancel{8x^2 + 14x - 8 \le 0}$

$\cancel{4x^2 + 7x - 4 \le 0}$

$\cancel{D = 49 - 4^3 = 49 - 64 < 0 \Rightarrow x \notin R}$

$\cancel{[\frac{1}{2}; 1]}$

$\cancel{8x - 6(2x-1) \le -8x^2 + 6x + 7}$

$\cancel{8x - 12x + 6}$

$14 \cdot 14$: 56, 14, 196

$13 \cdot 32$: 26, 39, 416; $416 + 196 = 612$

$8x + 12x - 6 \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 + 14x - 13 \le 0$

$\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

$D = 14^2 + 13 \cdot 8 \cdot 4 = 196 + 416 = 612 = (6\sqrt{17})^2$

612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
0	

$x = \frac{-14 \pm 6\sqrt{17}}{16}$

$4 < \sqrt{17} < 5$

$24 < 6\sqrt{17} < 30$

$-30 < -6\sqrt{17} < -24$

$10 < 6\sqrt{17} - 14 < 16$

~~-216~~

$-44 < -14 - 6\sqrt{17} < -38$

$\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{6\sqrt{17} - 14}{16} < 1$

$-14 - 6\sqrt{17} < \frac{-38}{16} < -1$

$8\left(x - \frac{6\sqrt{17} - 14}{16}\right)\left(x - \frac{-14 - 6\sqrt{17}}{16}\right) \le 0$

$x \in \left[\frac{6\sqrt{17} - 14}{14}; \frac{-14 - 6\sqrt{17}}{16}\right] \Rightarrow x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = b_1$, $b = b_2$, $c = b_3$,

$a = b_1$

$b = b_2 = b_1 q$

$c = b_3 = b_1 q^2$

$b_4 = b_1 q^3$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = (-2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = (2\sqrt{b^2-ac})^2$

$b_4 = x = \dfrac{2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$

$b_4 = \dfrac{b_1 q \pm \sqrt{b_1^2 q^2 - b_1 \cdot b_1 q^2}}{b_1} =$

$= \dfrac{b_1 q \pm \sqrt{b_1^2 q^2 - b_1^2 q^2}}{b_1} =$

$= \dfrac{b_1 q \pm \sqrt{0}}{b_1} = q$

$b_1 q^3 = q \quad / : q$

$b_1 q^2 = 1 = c$

$b_1 q^3 - q = 0$

$q(b_1 q^2 - 1) = 0$

$b_1 x^2 - 2 b_1 q x + b_1 q^2 = 0$

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$D = 4q^2 - 4q^2 = 0$

$x = \dfrac{2q}{2}$

$f(y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ — ?

$f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y-1)$

$y \in (x; 3x)$

$x = \dfrac{900-y}{3}$

$\dfrac{900-y}{3} < y < \dfrac{900-y}{3} \cdot 3$

$y < 900 - y$

$2y < 900$

$y < 450$

$3y > 900 - y$

$4y > 900$

$y > 225$

$\begin{cases} x > 150 \\ x < \end{cases}$

$\begin{cases} 6x > 900 \\ 4x < 900 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 150 \\ x < 225 \end{cases}$

$3x + y = 900$

$2x + x > y$

$2x + y > x$

$y + x > 2x$

$\begin{cases} 3x > 900 - 3x \\ 900 - 3x > x \end{cases}$

$y > x$

$3x > y$

$y > -x$

$3x + y = 900$

$y = 900 - 3x$

$x > 150$

$x \in (150; 225)$

$(150; 225)$

$(225; 450)$

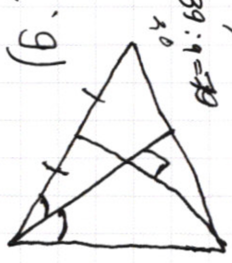
$(5; 3)$ $(0; 10)$ $(0; 9)$ $(0; 20)$ $(40; 80)$

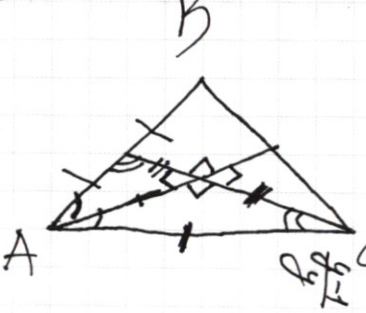
$9 : 3$

$\dfrac{y-1}{y}$

$\dfrac{y-1}{y} \cdot \dfrac{1}{y}$

$1 - \dfrac{1}{y} = \dfrac{y-1}{y}$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2) \end{cases}$$

$a=\sqrt{2}y$

$ab=2y$ $\quad b=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}yb=2y$

$(2):\quad (x^2-12x+36)+(2y^2-4y+2)=18$

$(x-6)^2+(\sqrt{2}y-\sqrt{2})^2=18$

$(x-6)^2+(\sqrt{2}(y-1))^2=18$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$x-6y$

$x-6y+yx-yx=$

$18 \quad 18$

$(1):\quad x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}$

$=x-6y$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \\ \underbrace{(x-6)^2}_{a^2}+2\underbrace{(y-1)^2}_{b} = 18 \end{cases}$$

$x-6y\geq 0$

$x\geq 6y$

$y\leq \frac{x}{6}$

~~$x+y$~~

$x-6y+yx-yx=$

$=x-yx+yx-6y=$

~~$y(x-6)-x(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)}$~~

$(x-6)^2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(y-1)(x-6)}+2(y-1)^2=18+2\sqrt{2}(x-6y)$

$=x(1-y)+y(x-6)=$

$((x-6)+\sqrt{2}(y-1))^2=18+2\sqrt{2}(x-6y)$

$=-x(y-1)+y(x-6)$

$$\begin{cases} y\overbrace{(x-6)}^{=a}-x\overbrace{(y-1)}^{=b}=\sqrt{\underbrace{(x-6)}_{a}\underbrace{(y-1)}_{b}} \\ \underbrace{(x-6)^2}_{a^2}+2\underbrace{(y-1)^2}_{b^2}=18 \end{cases}$$

~~$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a$~~

$$\begin{cases} ya-xb=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2=18 \end{cases}$$

$a^2+2(ya-xb)^2+b^2=18+2ab$

~~y~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

1) $\div\div (b_n)$: $a = b_1$

$b = b_2 = b_1 q$

$c = b_3 = b_1 q^2$

$x = b_4 = b_1 q^3$

2) Решим уравнение ~~относи~~:

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = (-2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = (2\cdot\sqrt{b^2-ac})^2$

$b_4 = x = \dfrac{2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$

3) Подставим вместо a, b и c то, что имеем в п.1

$b_4 = x = \dfrac{b_1 q \pm \sqrt{(b_1 q)^2 - b_1\cdot b_1 \cdot q^2}}{b_1} = q \pm \dfrac{\sqrt{b_1^2 q^2 - b_1^2 q^2}}{b_1} =$

$= q \pm \dfrac{\sqrt{0}}{b_1} = q \pm 0 = q$

$\Longrightarrow$ $b_4 = q$

$b_1 q^3 = q \quad |:q$ (т.к. $q \neq 0$)

$b_1 q^2 = 1 = c$

$\Longrightarrow$ $c = 1$

Ответ: 1.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6.

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

Построим $y = 8x - 6|2x-1|$:

$|2x-1| = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

$x < \frac{1}{2}$:

$y = 8x + 6(2x-1) = 8x + 12x - 6 = 20x - 6$

$x \ge \frac{1}{2}$:

$y = 8x - 12x + 6 = 6 - 4x = -4x + 6$

$\Rightarrow y = \begin{cases} 20x - 6, & y < \frac{1}{2} \\ -4x + 6, & y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ графики прямые, т.к. лин. функции

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	-16	-6	4	2

Построим $y = -8x^2 + 6x + 7$:

Кв. функция, график – парабола, $-8 = a < 0 \Rightarrow$ ветви направ. вниз

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-16} = 0{,}375 = \frac{3}{8}$

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	1
y	7	8	$8\frac{1}{8}$	8	5

Оставим ту часть графика, где $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$8x - 6|2x-1| \le -8x^2 + 6x + 7$ всегда при $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$ (по графику)

~~$\le ax+b$~~

$y = ax + b$ – линейная функция, график – прямая.

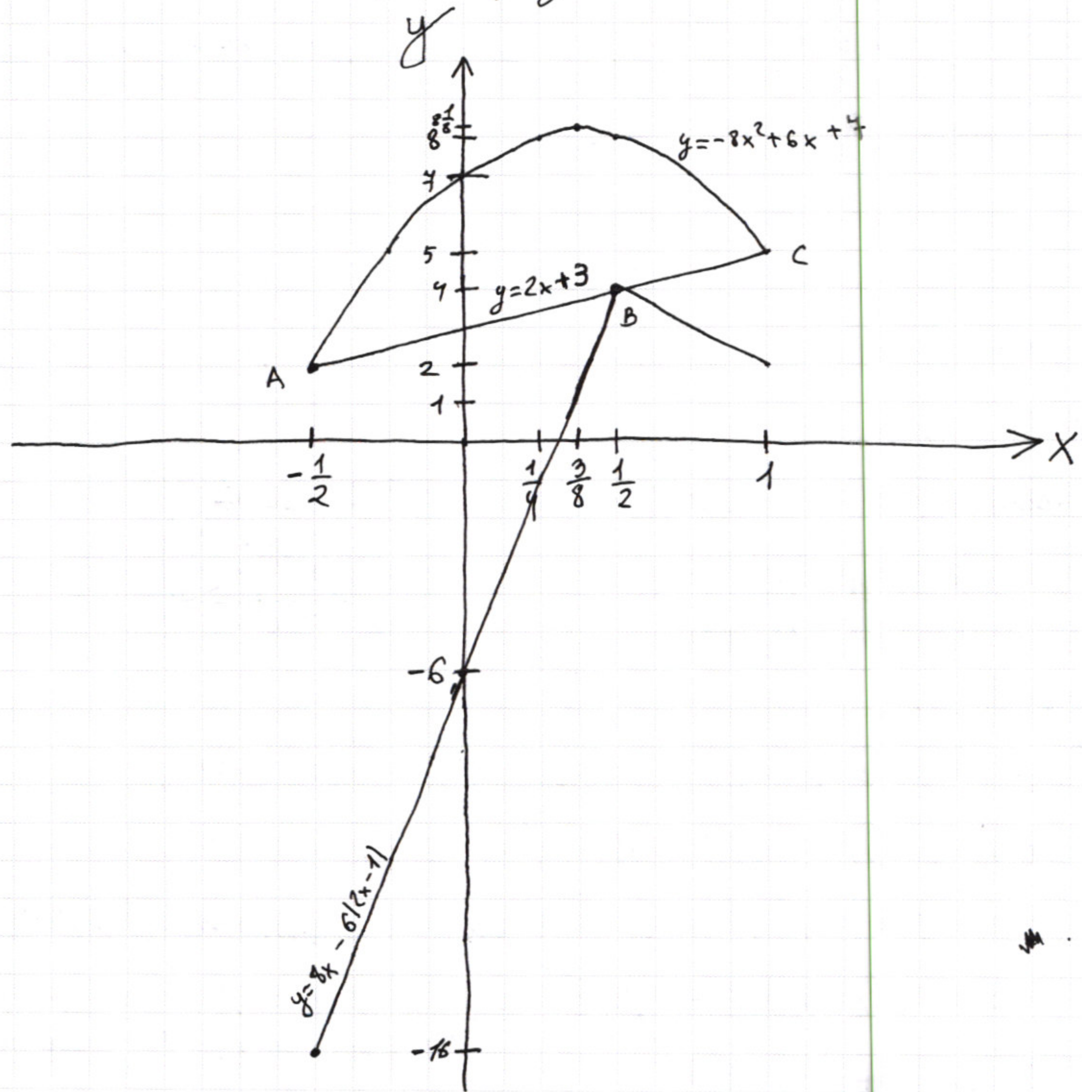
$\Rightarrow$ эта прямая должна при $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$ быть выше или пересек. с $y = 8x - 6|2x-1|$ и ниже или пересек. с $y = -8x^2 + 6x + 7$

☐ черновик ☒ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение).



В данном случае нам подойдёт прямая, проход. через т. A $(-\frac{1}{2};2)$, т. B $(\frac{1}{2};4)$ и т. C $(1;5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = a\cdot(-\frac{1}{2})+b \\ 4 = a\cdot\frac{1}{2}+b \\ 5 = a\cdot 1 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -\frac{1}{2}a+b \\ 4 = \frac{1}{2}a+b \\ 5 = a+b \end{cases} \Leftrightarrow$$

№6 (продолжение).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4=-a+2b \\ 8=a+2b \\ 5=a+b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4=-a+2b \\ 3=b \\ 5=a+3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4=-2+2\cdot 3 \\ b=3 \\ a=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4=4 \\ b=3 \\ a=2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $a=2$; $b=3$ $\Longrightarrow$ прямая $y=2x+3$

Ответ: $a=2$, $b=3$.

№2.

$P=900$

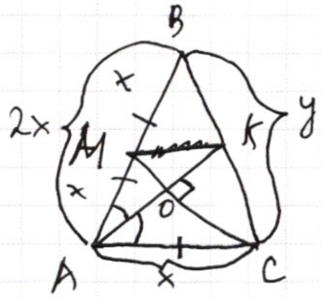
$\triangle ABC$

AK – бис-са $\triangle ABC$

CM – медиана $\triangle ABC$

т. $O = CM \cap AK$, $CM \perp AK$

~~$\angle MAC = $~~



1) $\angle MAO = \angle OAC$ (т.к. AK – бис-са $\triangle ABC$)

$OA \perp OM$, $OA \perp OC$ (т.к. $CM \perp AK$)

$\Longrightarrow$ AO – и бис-са, и высота в $\triangle AMC$

$\Longrightarrow$ $\triangle AMC$ – р/б $\Longrightarrow$ $AC = AM = x$,

$AM = MB$ (т.к. CM – медиана)

2) ~~Проведём MK~~

Пусть $AC = AM = MB = x$, $BC = y$

$\Longrightarrow AB = AM + MB = 2x$, $x, y \in \mathbb{N}$

Составим условие:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} 2x+y > x \\ 2x+x > y \\ x+y > 2x \end{array}\right\} \text{теорема о длинах сторон в треуг.} \Longleftrightarrow \\ 2x+x+y=900 \text{ (периметр)} \end{cases}$$

☐ черновик ☒ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение).

$$\begin{cases} y > -x \\ 3x > y \\ y > x \\ 3x+y=900 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x > y \\ y > x \\ \cancel{y=900} \; x = \frac{900-y}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 900-y > y \\ 3y > 900-y \\ x = \frac{900-y}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y < 450 \\ y > 225 \\ x = \frac{900-y}{3} \end{cases}$$

$y \in (225; 450)$, но также $y \vdots 3$,

ведь $y = 900 - 3x = 3(300-x)$

$(225; 450)$ — 204 числа

$204 : 3 = 68$ числа, кот. дел. на 3

$\Longrightarrow$ 68 треугольников

Ответ: 68 треугольников.

№7.

$f(1) = f(1) + f(1) \Longleftrightarrow f(1) = 2f(1) \Longleftrightarrow f(1) = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$, если p - простое число

№7 (продолжение).

Найдём $f(x)$, где $x \in [2;22]$:

~~f(2)~~ $f(2) = [\frac{2}{2}] = 1$

$f(3) = [\frac{3}{2}] = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = [\frac{5}{2}] = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(7) = [\frac{7}{2}] = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(5) + f(2) = 3$

$f(11) = [\frac{11}{2}] = 5$

$f(12) = f(3) \cdot f(4) = 3$

$f(13) = [\frac{13}{2}] = 6$

$f(14) = f(7) + f(2) = 4$

$f(15) = f(5) + f(3) = 3$

$f(16) = f(8) + f(2) = 4$

$f(17) = [\frac{17}{2}] = 8$

$f(18) = f(9) + f(2) = 3$

$f(19) = [\frac{19}{2}] = 9$

$f(20) = f(2) + f(10) = 4$

$f(21) = f(7) + f(3) = 4$

$f(22) = f(2) + f(11) = 6$

Обобщённая таблица

$f(1)=0$
$f(2)=f(3)=1$
$f(4)=f(5)=f(6)=f(9)=2$
$f(7)=f(8)=f(10)=f(12)=f(15)=f(18)=3$
$f(14)=f(16)=f(20)=f(21)=4$
$f(11)=5$
$f(13)=f(22)=6$
$f(17)=8$
$f(19)=9$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$; ~~$f(\frac{1}{y}) = f1$~~

~~f(1)~~ $f(y) + f(\frac{1}{y}) = f(y \cdot \frac{1}{y})$

$f(y) + f(\frac{1}{y}) = f(1)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 (продолжение).

$f(1)=0$

$\Rightarrow f(y)+f(\frac{1}{y})=0 \Leftrightarrow f(y)=-f(\frac{1}{y}) \Leftrightarrow f(\frac{1}{y})=-f(y)$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

Т.к. $2 \le x \le 22$ и $2 \le y \le 22$, то из обобщённой таблицы возьмём данные:

$f(x)=1$ — 2 ~~штуки~~ числа

$f(x)=2$ — 4 числа

$f(x)=3$ — 6 чисел

$f(x)=4$ — 4 числа

$f(x)=5$ — 1 число

$f(x)=6$ — 2 числа

$f(x)=8$ — 1 число

$f(19)=9$ — 1 число

~~Чтобы $f(\frac{x}{y})<0$, нужно чтобы $f(x)>f(y)$ $\Rightarrow$ если $f(x)=1$, то $f(y)>1$ — 19 чисел; если $f(x)=2$, то $f(y)>2$ —~~

Чтобы $f(\frac{x}{y})<0$, нужно чтобы $f(y)>f(x)$.

Посчитаем кол-во способов составить такую разность (пару):

№7 (продолжение).

1) если $f(x) = 1$, – 2 числа то $f(y) > 1$ – 19 чисел

По правилу умножения кол-во способов равно $2 \cdot 19 = 38$ способов

Аналогично в следующих пунктах.

2) $f(x)=2$ – 4 числа, $f(y) > 2$ – 15 чисел

$4 \cdot 15 = 60$ способов

3) $f(x) = 3$ – 6 чисел, $f(y) > 3$ – 9 чисел

$6 \cdot 9 = 54$ способа

4) $f(x) = 4$ – 4 числа, $f(y) > 4$ – 5 чисел

$4 \cdot 5 = 20$ способов

5) $f(x) = 5$ – 1 число, $f(y) > 5$ – 4 числа

$1 \cdot 4 = 4$ способа

6) $f(x) = 6$ – 2 числа, $f(y) > \cancel{4}6$ – 2 числа

$2 \cdot 2 = 4$ способа

7) $f(x) = 8$ – 1 число, $f(y) > 8$ – 1 число

$1 \cdot 1 = 1$ способ

Всего:

$38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 = 181$ способ

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 2 \\ 38 \\ 60 \\ 54 \\ +\ 20 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ \hline 181 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 181 пара чисел

Ответ: 181 пара.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)