МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

√ 1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

√ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

√ 4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

√ 5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

√ 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

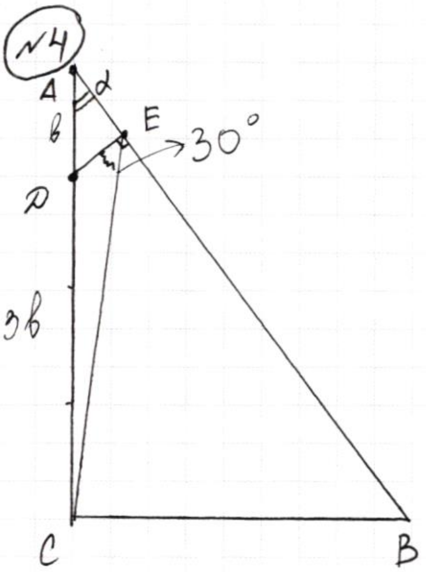
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) $tg\alpha$ - ? $\quad \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{matrix} \sin\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{matrix}$

1. Пусть $AC = 4b$, тогда $AD = b$

2. $\triangle ADE$ - прямоуг. $\Rightarrow AD = b\sin\alpha$

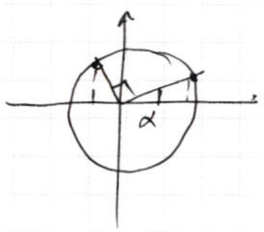
3. $\triangle DEC$:

$\angle EDC$ - внешний для $\triangle ADE$

$\Downarrow$

$\angle EDC = 90° + \alpha$

по Th. cos: $EC^2 = ED^2 + DC^2 - 2 \cdot |CD| \cdot |ED| \cdot \cos(90° + \alpha)$



$$EC^2 = (b\sin\alpha)^2 + (3b)^2 + 2 \cdot b\sin\alpha \cdot 3b \cdot \sin\alpha$$

$$EC^2 = 7b^2\sin^2\alpha + 9b^2 = b^2 \cdot (7\sin^2\alpha + 9)$$

$$EC = b\sqrt{7\sin^2\alpha + 9\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}$$

$$EC = b\sqrt{16\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}$$

по Th. sin: $\frac{DC}{\sin 30°} = \frac{EC}{\sin(90° + \alpha)}$

$b \neq 0$

$$\frac{3b}{1/2} = \frac{b\sqrt{16\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$6 = \frac{\sqrt{16\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$6\cos\alpha = \sqrt{16\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}$$

Т.к. $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\left.\begin{matrix}\cos\alpha > 0\\ \sin\alpha > 0\end{matrix}\right] \Rightarrow tg > 0$

$$36\cos^2\alpha = 16\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha$$

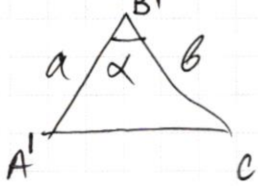
$$27\cos^2\alpha = 16\sin^2\alpha$$

$$\frac{27}{16} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

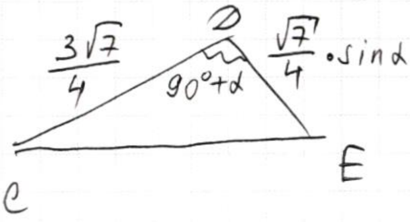
$$\sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4} = tg\alpha}$$

б) S_{CED} – ?



$$S_{A'B'C'} = \frac{ab \cdot \sin\alpha}{2}$$

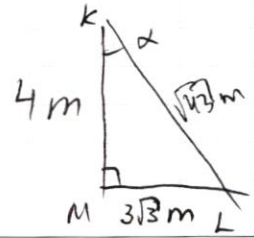


$$S_{CDE} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \sin\alpha \cdot \sin(90°+\alpha)}{2}$$

$$S_{CDE} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2}$$

если $tg\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

то можно составить Δ KML:



$m \neq 0$
$m > 0$, тогда $KL = \sqrt{16m^2 + 27m^2} =$
по Th. Пифагора $= m\sqrt{43} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{43}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{CDE} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \cos\alpha \cdot tg\alpha \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{3 \cdot 7 \cdot \cos^2\alpha \cdot tg\alpha}{4 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$S_{CDE} = \frac{3 \cdot 7 \cdot \frac{4^2}{43} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}}{4 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 43 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{3}}{4 \cdot 2 \cdot 43}$$

$$S_{CDE} = \frac{63\sqrt{3}}{344}$$

Ответ: а) $tg\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

б) $S_{CDE} = \frac{63\sqrt{3}}{344}$

№1

пусть $a_1 = a$, а коэф. геом. посл. q; $a \neq 0, q \neq 0$

тогда $a_2 = b = a \cdot q$; $a_3 = c = a \cdot q^2$; $a_4 = d = a \cdot q^3$

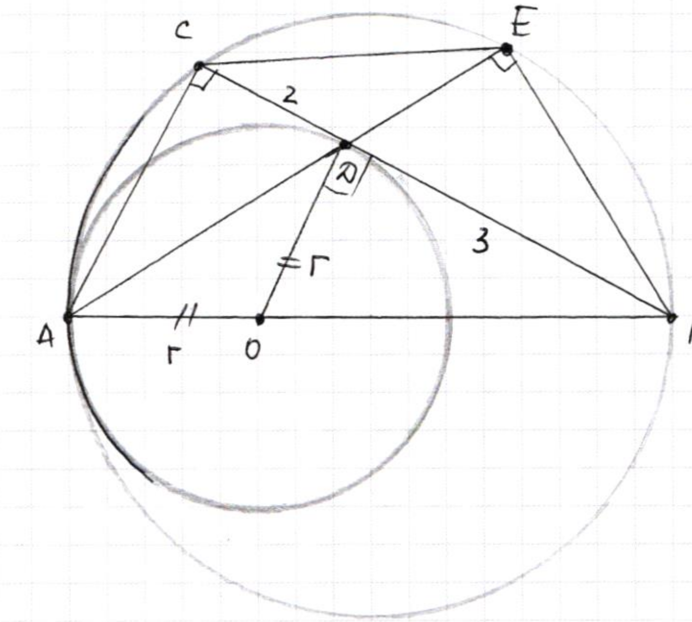
$ax^2 - 2b \cdot x + c = 0$

$\frac{D}{4} = b^2 - a \cdot c = (a \cdot q)^2 - a \cdot aq^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{b \pm 0}{a} = \frac{b}{a} = \frac{a \cdot q}{a} = d = a \cdot q^3$

$\boxed{\text{Ответ: } c = 1}$ $q = a \cdot q^3 \Rightarrow 1 = a \cdot q^2 = c$

№5



1) Пусть O центр ω, O' центр Ω и у ω радиус r, а у Ω радиус R.

2) $\angle ODB = 90^\circ$, т.к. CD - касат. к ω

3) $\angle ACD = 90^\circ = \angle AED$, т.к. они опираются на диаметр AB.

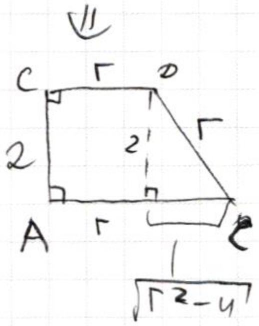
4) $AO = OD = r$ - радиусы

5) $\triangle ODB \sim \triangle ACB$ (по 2м углам) $\Rightarrow$

$$\frac{DB}{CB} = \frac{OD}{AC} \Rightarrow \frac{r}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AC = \frac{5}{3}r$$

$AC \perp CB$, $OD \perp CB$ $\Big| \Rightarrow AC \parallel OD \Big| \Rightarrow ACDO$ - трапеция прямоуг.

$\Downarrow$



$AC = r + \sqrt{r^2-4}$ $\Leftarrow$

$\Downarrow$

$$\frac{5}{3}r = r + \sqrt{r^2-4}$$

$$\frac{2}{3}r = \sqrt{r^2-4} \rightarrow \frac{4}{9}r^2 = r^2 - 4$$

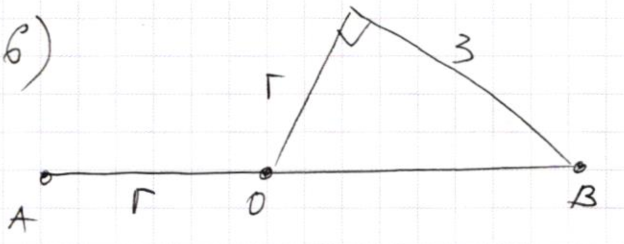
$$4 = \frac{9-4}{9}r^2 \Rightarrow \frac{4\cdot 9}{5} = r^2 \Rightarrow \frac{36}{5} = r^2$$

$$\boxed{\frac{6\sqrt{5}}{5} = r}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 Продолжение

6)



$AB = 2R$

по Th. Пифагора

$OB = \sqrt{3^2 + r^2}$

$$2R = r + \sqrt{9 + r^2} \Rightarrow R = \frac{r + \sqrt{9+r^2}}{2}$$

$$R = \frac{\frac{6\sqrt5}{5} + \sqrt{9 + \frac{36}{5}}}{2} =$$

$$\cancel{R = \frac{6\sqrt{13} + 13\sqrt{17}}{26}}$$

$$R = \frac{6\sqrt5 + \sqrt{45+36}\cdot\sqrt5}{10}$$

$$R = \frac{6\sqrt5 + 9\sqrt5}{10} = \frac{15\sqrt5}{10}$$

$$R = \frac{3\sqrt5}{2}$$

7) ΔACD: по Th. Пифагора

$$AD = \sqrt{2^2 + \frac{25}{9}r^2} = \sqrt{2^2 + \frac{25}{9}\cdot\frac{36}{5}} = \sqrt{4 + 5\cdot 4}$$

$$AD = \sqrt{24}$$

8) $\Delta ACD \sim \Delta BED$ (по 2м углам $90° = 90°$ и вертик.)

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{CD}{DE}$$

$$\frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2}{DE} \quad \Rightarrow \quad DE = \frac{6}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{36}{24}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

9) $\triangle ADB$: по Th. cos:

$$AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \underset{\angle ADB}{\underset{\parallel}{\cos\varphi}} = AB^2$$

$$24 + 9 - 2 \cdot \sqrt{24} \cdot \cancel{3}3 \cdot \cos\varphi = \left(2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$33 - 6\sqrt{24} \cdot \cos\varphi = 9 \cdot 5 = 45$$

$$-6\sqrt{24} \cdot \cos\varphi = 12$$

$$\cos\varphi = -\frac{12}{6\sqrt{24}} \cancel{= -\frac{2\cdot\sqrt{24}}{24} = -\frac{\sqrt{24}}{2}}$$

$$\cos\varphi = -\frac{12}{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

10) $S_{ACEB} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \cancel{B}C \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{24} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cdot \cancel{AB}$

$\cdot (2+3) \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cdot 5\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4+1}{2}\right) \cdot 5 \cdot \sqrt{5}$

$$S_{ACEB} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } r = \frac{6\sqrt{5}}{5};\ R = \frac{3\sqrt{5}}{2};\ S_{ACEB} = \frac{25\sqrt{5}}{4}}$$

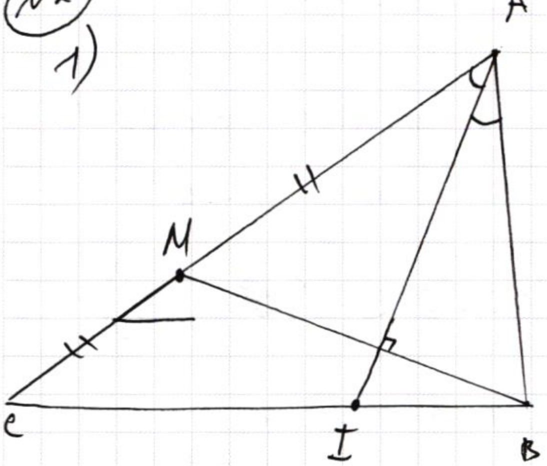
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2) Т.к. сторона Δ не может быть <0, то все стороны нат. числа

1)



Не умаляя общности, предположим, что $AI \perp BM$, тогда в ΔAMB: AI – бис. $\perp MB \Rightarrow AI$ – бис. и выс.

$\Downarrow$

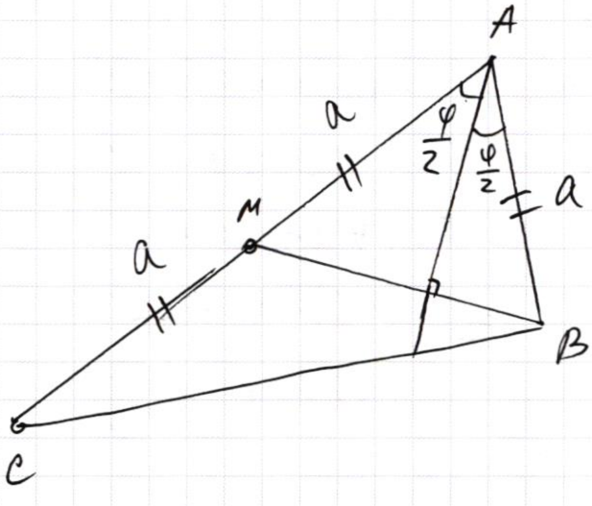
AMB – равнобед.

Тогда пусть $AB = a \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = AB = a = MC$ (из медианы)

$\Downarrow$

$a \in \mathbb{N}$ – по усл.



по Th. cos для ΔABC:

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \cos\varphi$$

$$CB^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \cos\varphi$$

$$CB^2 = 4a^2 + a^2 - 4a^2 \cdot \cos\varphi$$

$$CB = a\sqrt{5 - 4\cos\varphi}$$

Все стороны Δ = целочисл. $\Leftrightarrow |AC|, |AB|, |CB| \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$$a\sqrt{5-4\cos\varphi} \in \mathbb{N}$$

$\sqrt{5-4\cos\varphi} \in \mathbb{N}$, т.к. $a \in \mathbb{N}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\Downarrow$

$5-4\cos\varphi =$ полной квадрат

$\cos\varphi \in [-1;1] \Rightarrow \max(5-4\cos\varphi) = 5+4 = 9$

$\min(5-4\cos\varphi) = 1$

$\Downarrow$

т.к. $\cos\varphi = -1$ достиг. при $\varphi = 180^\circ$

$\cos\varphi = 1$ при $\varphi = 0^\circ$

то $5-4\cos\varphi \in (1;9)$

Нам нужно чтобы $5-4\cos\varphi \in \mathbb{N}$ и было полным квадратом для $a\sqrt{5-4\cos\varphi} \in \mathbb{N}$

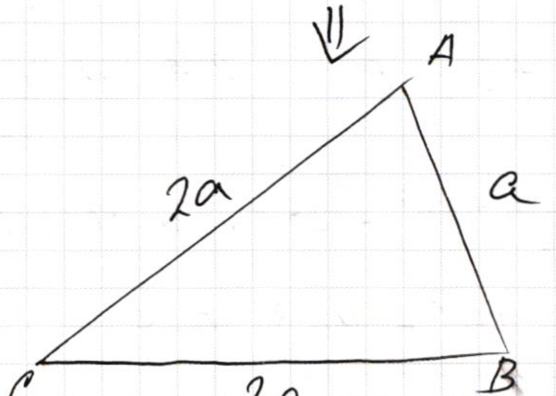
$\Updownarrow$

~~между~~ в $(1;9)$ только 1 полной кв. это $4 \Rightarrow 5-4\cos\varphi = 4$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 4\cos\varphi = 1 \\ \cos\varphi = \frac{1}{4} \\ \cos\varphi \in (-1;1) \end{array}\right.$$

$CB = a\sqrt{5-4\cos\varphi} = a\sqrt{4} = 2a \Leftarrow$

$\Downarrow$



$P_{ABC} = 900$

$2a+2a+a = 900$

$5a = 900$

$\uparrow$

опр. единств. сл.

$\Downarrow$

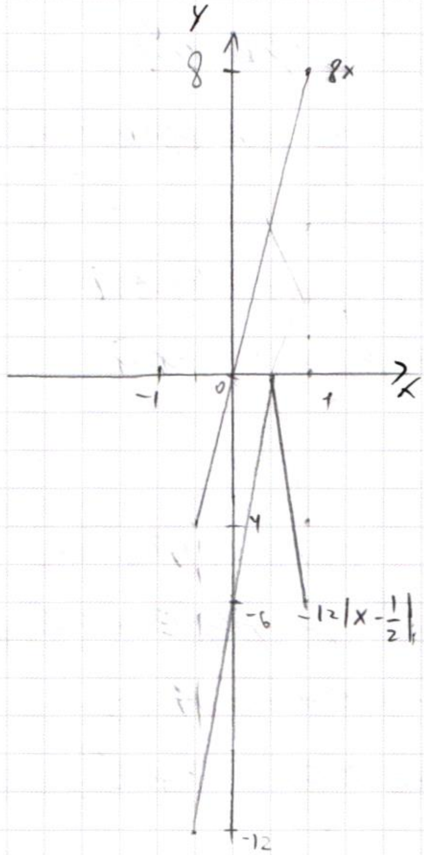
$\boxed{\text{Кол-во } \Delta = 1}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

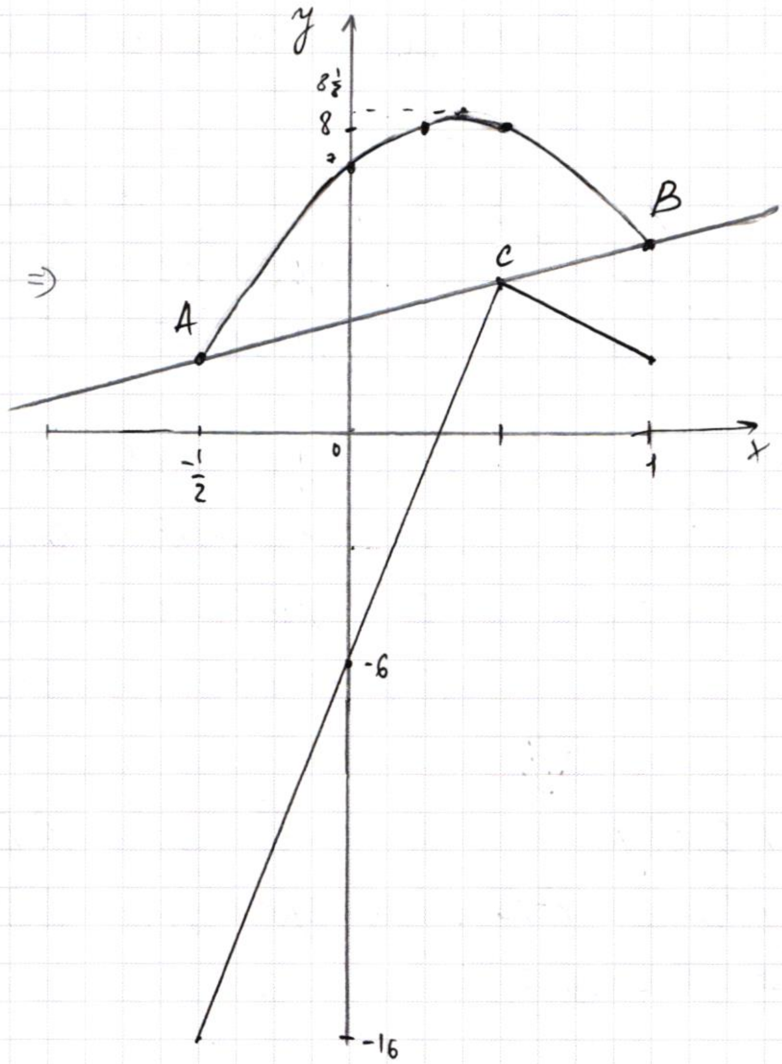
№6 Построим графики $8x - 6|2x-1| = 8x - 12|x-\frac{1}{2}|$

и $-8x^2+6x+7$ ($x_в = -\frac{6}{-8\cdot 2} = \frac{3}{8}$; $y_в = \frac{-8\cdot 9}{64} + \frac{6\cdot 3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7$)

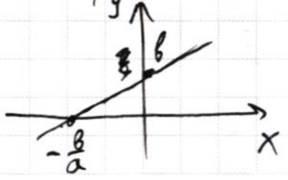
$y_в = 7 + \frac{9}{8} = 8\frac{1}{8}$



=>



$ax+в$ - прямая вида

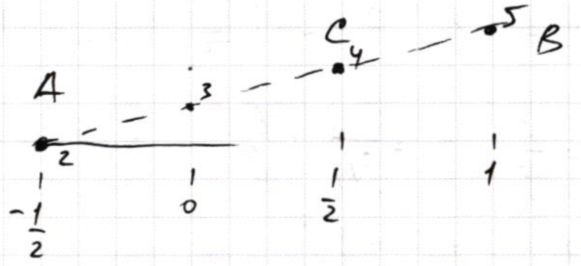


Проведем прямые на графике, которые нам подходят.

1) прямая через точки A и B:

$A = \left(-\frac{1}{2} ; 2\right)$, $B = (1;5)$

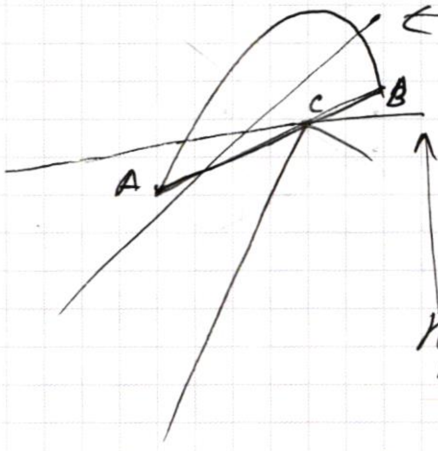
из графика видно, что $\{C\} \in AB$



$\Downarrow$

AB – это единств. подход. прямая

т.к. иначе увеличивая угол наклона



придем к тому, что часть параболы будет под этой прямой

при уменьшении угла наклона так же придем к пересечению с параболой не в точке A $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ часть парабола под $ax+b$.

$\Downarrow$

2) Найдем a и b у AB

прямая AB ~~пересекает~~ пересекает OY в т. $(0;3) \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 3$

$-2\cdot\frac{1}{2}+3=2$

B: $a \cdot 1 + 3 = 5$

$2\cdot\frac{1}{2}+3=4$

$\Downarrow$

$a = 2$ проверим на др. точках

$\boxed{\text{Ответ: } (a;b) = (2;3)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6y)^2=(x-6)(y-1) \\ (x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)-18=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2=(x-6)(y-1) & (1) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 & (2) \end{cases} \rightarrow (x-6)^2+2(x-6)(y-1)+(y-1)^2= =18-(y-1)^2+2(x-6y)^2$$

$(x-6-y+1)^2=2(9-(x-6y)^2)-(y-1)^2$

$(x-y+5)^2=2(3-x+6y)(3+x-6y)-$
$-(y-1)^2$

(2) $(x-6)^2=18-2(y-1)^2$

$$x_{12}=\pm\sqrt{18-2(y-1)^2}+6$$

$$x_{12}=\pm\sqrt{18-2y^2+4y-2}+6=\pm\sqrt{16-2y^2+4y}+6$$

(1) $x^2-12xy+36y^2-xy+6y+x-6=0$

$$x^2-(13y-1)x+36y^2+6y-6=0$$

$$x^2-(13y-1)x+6(6y^2+y-1)=0$$

$$D=(13y-1)^2-24(6y^2+y-1)=169y^2-26y+1-144y^2-24y$$
$$+24=25y^2-50y+25=25(y^2-2y+1)=25(y-1)^2$$

$$x^1_{12}=\frac{13y-1\pm\sqrt{(5(y-1))^2}}{2}$$

$$x^1_1=\frac{13y-1+5y-5}{2}=\frac{18y-6}{2}=9y-3$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$x_2' = \frac{13y - 1 - 5y + 5}{2} = 4y + 2$

1) $\sqrt{18 - 2(y-1)^2} + 6 = 9y - 3$

$\sqrt{18 - 2(y-1)^2} + 6 = 3(3y-1)$

$3y - 1 \geq 6$ $\quad \sqrt{\ } \geq 0$ $\quad \sqrt{\ } + 6 \geq 6$

$y \geq \frac{7}{3}$

~~$18 - 2(y-1)^2 + 12\sqrt{\ } + 36 = 81y^2$~~

$16 - 2y^2 + 4y + 12\sqrt{\ } + 36 = 81y^2 - 54y + 9$

И так нужно перебрать 4 варианта

Приравнивая $x_1 = x_1'$ $\quad x_1 = x_2'$

$x_2 = x_1'$ $\quad x_2 = x_2'$

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ $\quad f(2 \cdot p) = 1 + f(p) = 1 + \left[\frac{p}{2}\right]$ $\quad \left[\frac{2}{2}\right]$

$f(2 \cdot a) = 1 + f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

Рассмотрим $f\left(\frac{2}{y}\right)$ y-чет, тогда $f\left(\frac{2}{y}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{2z}\right)$

$= 1 + f\left(2 \cdot \frac{1}{y/2}\right) = 2 + f\left(\frac{1}{y/2}\right) = f\left(\frac{1}{y/2}\right)$

$f\left(\frac{1}{y/2}\right) = 0$

$y/2$ – число

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}(x-6y)^2=(x-6)(y-1)\\(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0\end{cases}$$

$+24$, 6, 144

$z^2=xy$

$x^2+2y^2-18=0$

$\cancel{(x-6)^2-2(x-6)(y-1)+(y+1)^2=18-(y-1)^2-2(x-6)(y-1)}$

$\cancel{(x-y-5)^2=18-(y-1)^2-2(x-6y)^2}$ $(x-6)^2=-2(y-4)(y+3)$

$x^2+2xy+y^2=18-y^2+2xy$

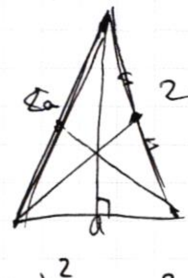
$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$ $(x-6)^2=2(4-y)(y+3)$

$x^2-13xy+x+36y^2-6y-6$

$x^2-(13y-1)x+6(6y^2-y-1)=0$ $(x-6)^2(y-1)$

$D=$

$5a=90°$

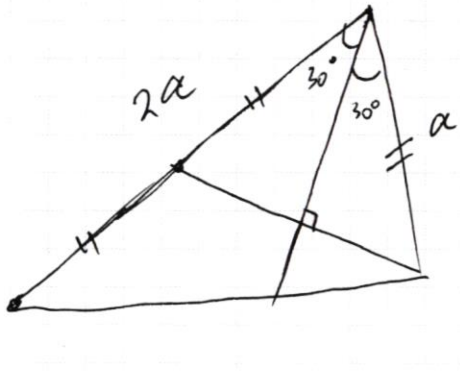


4

$(2a)^2+a^2-2\cdot2a\cdot a\cdot\cos\varphi=$

$=4a^2+a^2-4a^2\cdot\cos\varphi=$

$=a\sqrt{(5-4\cos\varphi)}=2a$



$\sqrt{5+4}=3$

$5-4\cdot\cos\varphi=4$ $\Rightarrow\cos\varphi=\frac{1}{4}$

$5-1=4\cos\varphi$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

Каждо число из $2 \le x \le 22$, $x \in \mathbb{N}$
можно представить как $\frac{x}{1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$
$= f(x)$

каждое ~~x~~ из x либо простое, либо
составное $\Rightarrow$ если ~~x~~ - простое

$f(x) \ge 1$

$f(x)$ - сост - то $f(x)$ предст.
как сумма от простых делителей x
функций

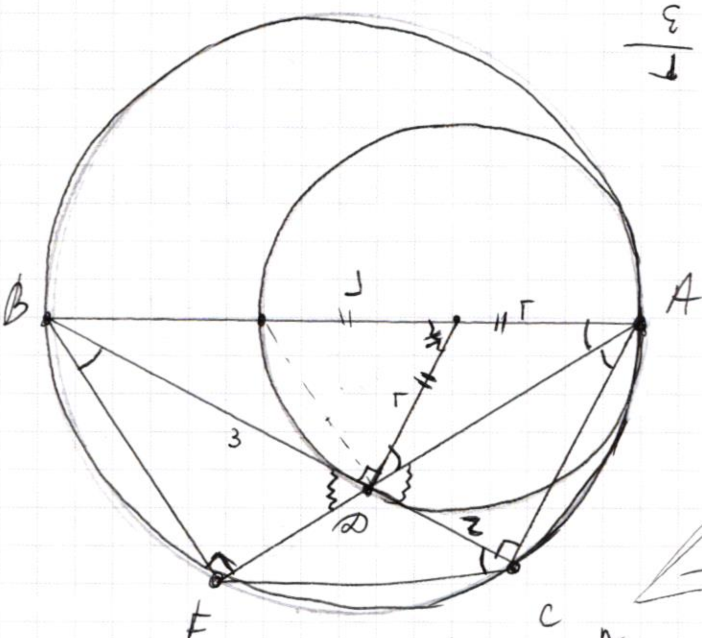
$\Downarrow$

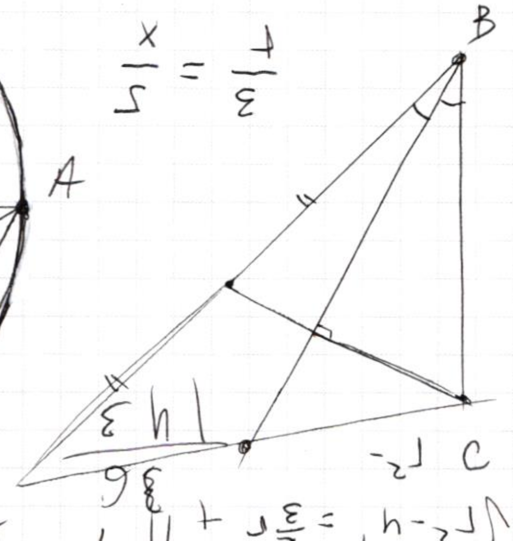
$f(x) > 0$

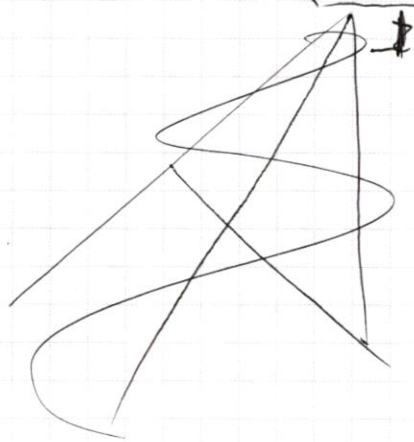
$\Downarrow$

кол-во $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$a \quad a\cdot q \quad a\cdot q^2 \quad a\cdot q^3$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$\begin{array}{r} 45 \\ +36 \\ \hline 81 \end{array}$

- $\frac{D}{4} = b^2 - a\cdot c \geq 0$
- $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a\cdot c}}{a} = \frac{b}{a} = a\cdot q^3$

$(a\cdot q)^2 - a\cdot q^2\cdot a = 0$

$\frac{a\cdot a}{a} = a\cdot q^3$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{(x-6)y-(x-6)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

x^2-12x

$x^2-2\cdot 6x+36$

$(x-6)^2+2y^2-4y-16=0$

$2y^2-4y$

$(x-6)^2+2(y^2-2y-8)=0$

$2y^2-2\cdot\sqrt{2}y\cdot\sqrt{2}+2$

$(x-6)^2+2(y^2-2y+1-9)=0$

$(x-6)^2+2((y-1)^2-9)=0$

$\cancel{(x-6)^2+}$

$\cancel{(x-6)^2+2(y-4)}(y-3)=0$

$\cancel{(x-6)^2=-2(y-4)(y-3)}$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$(x-6y)^2=(x-6)(y-1)$

$\cancel{+36+2}$

$\cancel{(x-6)^2-4(y-1)}+18=0$

$\cancel{x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6}$ $2\cdot\sqrt{2}(y-1)(x-6)$ $+2(y-1)^2$

$\cancel{x^2+x-6=36y^2+6y}$ $\cancel{(x-6)^2-12}$

$\cancel{((x-6)-\sqrt{2}(y-1))^2=18}-2\sqrt{2}(y-1)(x+6)$

$18-2\sqrt{2}(x-6y)^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

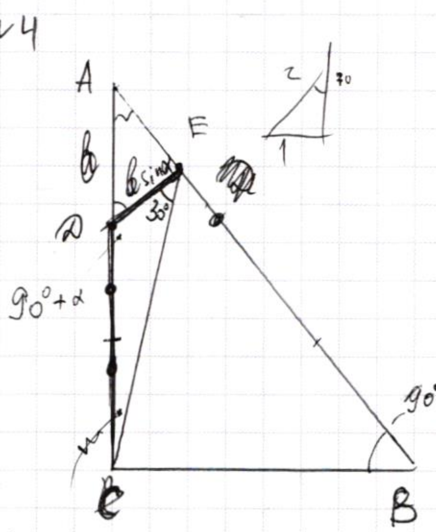
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

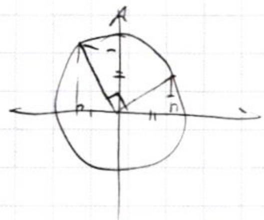
ШИФР

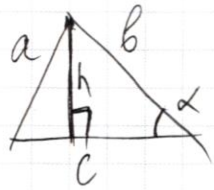
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4







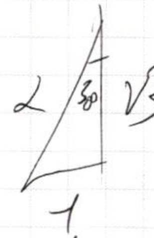
$(bsin\alpha)^2+(2b)^2-2\cdot 2b\cdot bsin\alpha\cdot cos(90°+\alpha)=$

$=b^2sin^2\alpha+4b^2-4b^2sin\alpha\cdot(-sin\alpha)=$

$=5b^2sin^2\alpha+4b^2=\frac{\cancel{b}}{cos\alpha}$

~~$(180°-(90°+\alpha)-30°)=90°-\alpha-30°=60°-\alpha$~~

$\frac{3b}{sin30°}=\frac{3bsin\alpha}{sin(90°+\alpha)}=btg\alpha$



$\frac{3}{\quad}$

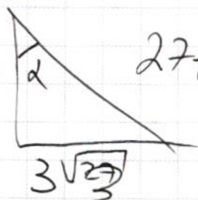
$sin\alpha\cdot cos\alpha=cos^2\alpha\cdot tg\alpha$

$(bsin\alpha)^2+(3b)^2-2\cdot 3b\cdot b\cdot cos(90°+\alpha)=$

$=b^2sin^2\alpha+9b^2+6b^2sin^2\alpha=7b^2sin^2\alpha+9b^2=$

$=b\sqrt{7sin^2\alpha+9}$

$4\cdot$



$27+16=\frac{4}{3}$

36 cos

$\frac{3b}{sin30°}=\frac{3b}{\frac{1}{2}}=6b=\frac{b\sqrt{7sin^2\alpha+9}}{cos\alpha}$

$\times\begin{array}{r}43\\8\\\hline 344\end{array}$

$6cos\alpha=\sqrt{7sin^2\alpha+9}$

$36cos^2\alpha=7sin^2\alpha+9$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

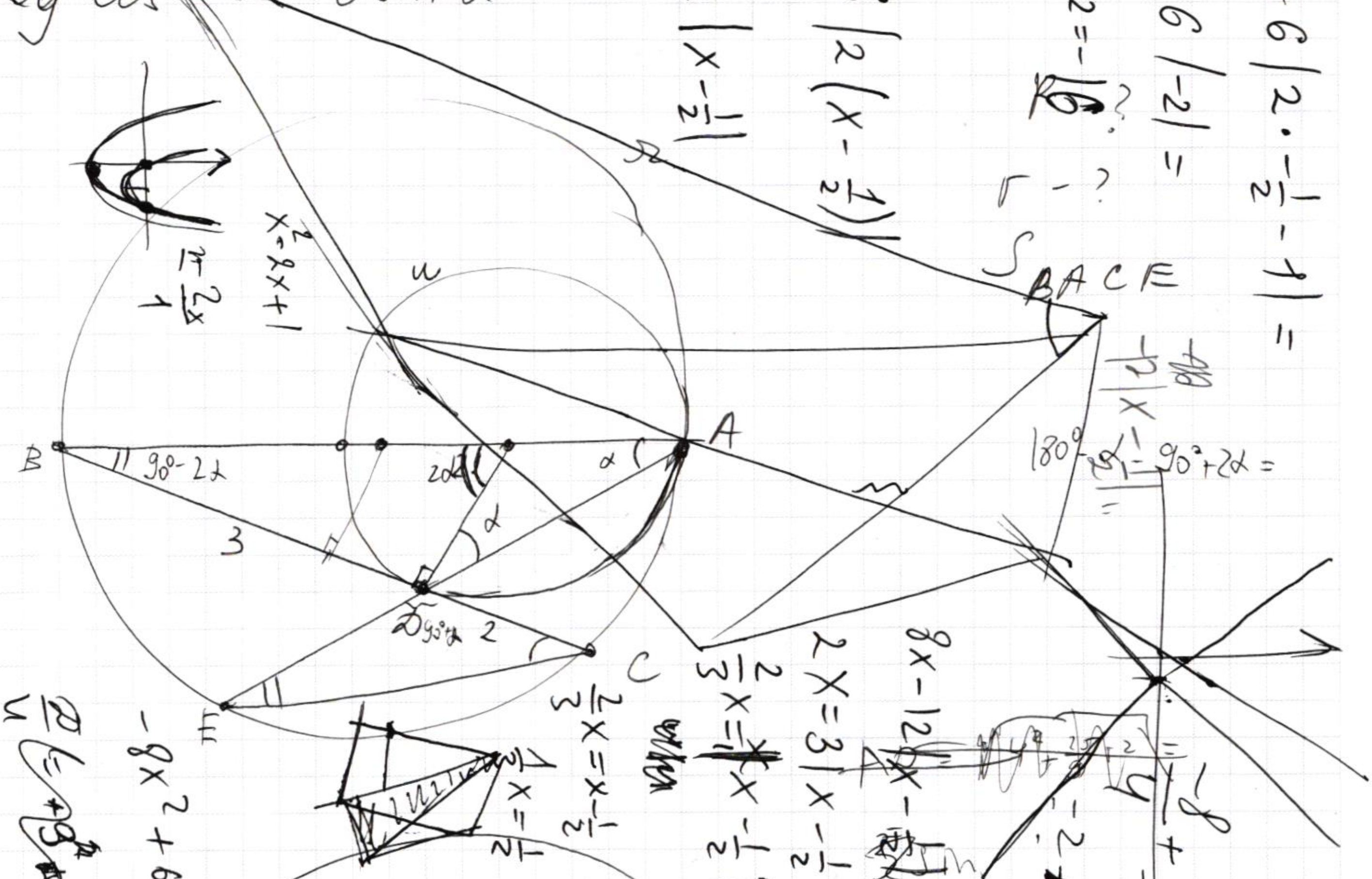
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$36\cos^2\alpha = 7\sin^2\alpha + 9$

$36\cos^2\alpha = 7\sin^2\alpha + 9\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha$

$39\cos^2\alpha = 16\sin^2\alpha$

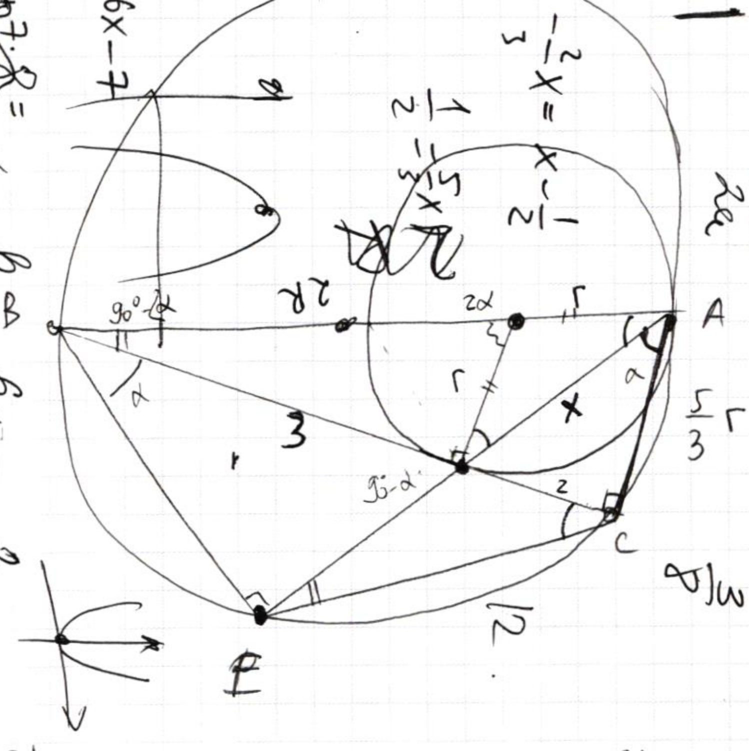


$8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 6\left|2\cdot -\frac{1}{2} - 1\right| =$

$= -4 - 6|-2| =$

$= -4 - 12 = -16$

S_{BACE}



$\frac{4}{9}r^2 + \frac{25}{9}r^2 = \frac{36+25}{9}r^2 = \frac{61}{9}r^2$

$\frac{\sqrt{61}}{3}r$

$r^2 + r^2 - 2r^2\cos\beta = \frac{61}{9}r^2$

$2 - 2\cos\beta = \frac{61}{9}$

$-2\cos\beta = \frac{43}{9}$

$\cos\beta = -\frac{43}{18}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

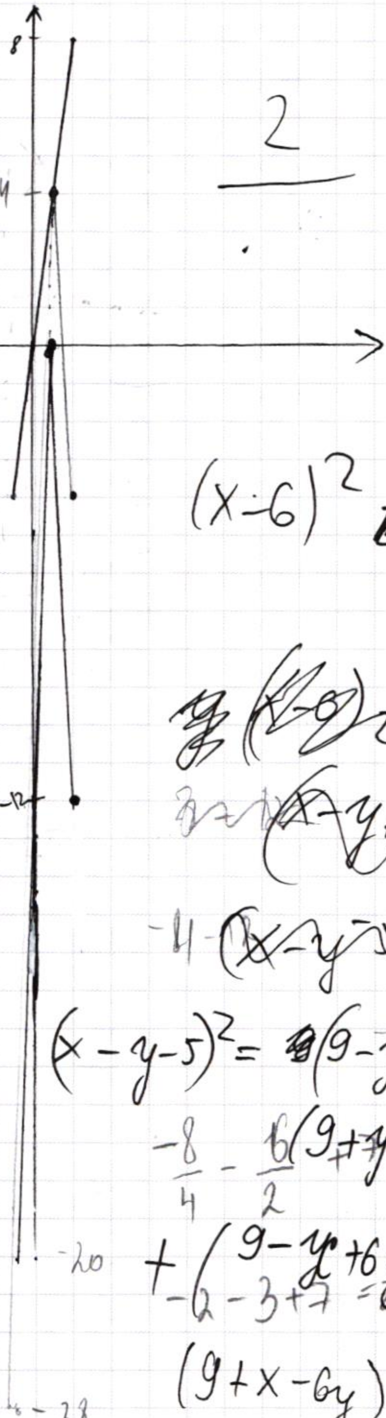
ШИФР

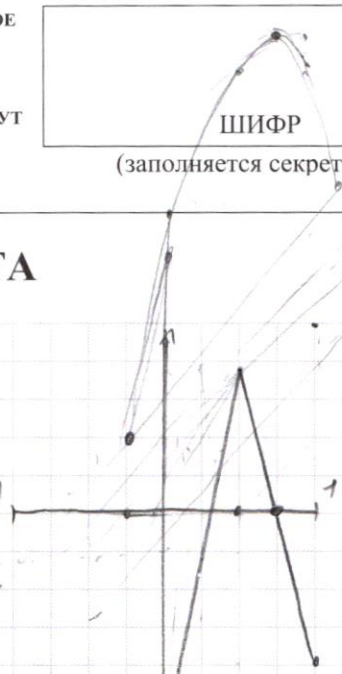
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-8x^2+6x+7$

2





$-\frac{8\cdot 9}{16}+\frac{6\cdot 3}{4}+7$

$-\frac{9}{2}+9+7$

$16-4{,}5=12{,}5$

$-8+6+7=5$

$-\frac{8}{4}+3+7$

$-2+3+7$

$(x-6)^2+2(x-6)(y-1)+(y-1)^2=$

$=18-(y-1)^2+2(x-6)(y-1)$

$(x-y-5)^2=18-(y-1)^2+(x-6y)^2$

$\left[\frac{ab}{2}\right]=\left[\frac{a}{2}\right]+\left[\frac{b}{2}\right]$

$4-(x-y-5)^2=1$

$(x-y-5)^2=9(9-y+1)$

$-\frac{8}{4}-\frac{6}{2}(9+y-1)+$

$+(9-x+6y)$

$-2-3+7=2$

$(9+x-6y)$ $\quad f(2b)=1+\left[\frac{b}{2}\right]$

$(x-y-5)^2=(10-y)(8+y)+(9-x+6y)(9+x-6y)+f(b)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$ $\qquad f(2p) = 1 + f(p) = 1 + \left[\frac{p}{2}\right]$

$f(2a) = 1 + f(a)$

Проще.

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $\qquad f\left(\frac{1}{22}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{22}\right) = 2 + f\left(\frac{1}{11}\right)$

$f(2) - f(22)$

$f\left(\frac{2}{22}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{22}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{22}\right)$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\cancel{((x-6) - (y-1))^2 = 18 - (y-1)^2 - 2(x-6y)^2}$

$\cancel{(9 - (y-1)^2) + 9}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)