МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. a, b, c — I, II и III члены геом. пр. $\Rightarrow$ если частное — q, то $b = qa$; $c = q^2a$, а IV член $d = q^3a$.

По усл. $ad^2 + 2bd + c = 0$, т.е. $a\cdot(q^3a)^2 + 2\cdot qa\cdot(q^3a) + q^2a = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow q^6a^3 + 2q^4a^2 + q^2a = 0$ $\quad q^2a = c \Rightarrow c^3 + 2c^2 + c = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c(c^2+2c+1) = 0 \Leftrightarrow c(c+1)^2 = 0 \Leftrightarrow c = \left[\begin{array}{l}-1\\0\end{array}\right.$, т.к. c — член геом. прогрессии, то $c \neq 0 \Rightarrow c = -1$. — третий член.

Ответ: -1.

Если считаем, что геом. прогрессия может состоять из одних 0, то в ответ ещё подходит $c = 0$.

2. Ут. ~~...~~ В $\triangle ABC$ медиана $CM \perp$ бисс. $\angle A \Leftrightarrow AB = 2\cdot AC$.

Д-во: Пусть в $\triangle ABC$ медиана $CM \perp$ бисс. $\angle A$, тогда в $\triangle ACM$ эта бисс. является и высотой $\Rightarrow AC = AM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow 2AC = AB$. Если же в $\triangle ABC$ $AB = 2AC$, то ~~...~~ $\triangle ACM$ (M — сер. AB) — р/б $AM = AC$ и тогда бисс. $\angle A$ ~~...~~ — высота $\Rightarrow$ бисс. $\angle A \perp CM$ ч.т.д.

$\Rightarrow$ Нам надо найти кол-во $\triangle ABC$: $AB = 2AC$ и $AB + AC + BC = 1200$ и $AB, AC, BC \in \mathbb{N}$. Пусть $AC = x$, тогда $AB = 2x$, $BC = 1200 - 3x$.

По нер-ву $\triangle$: $BC < AB + AC \Leftrightarrow 1200 - 3x < 3x \Leftrightarrow 200 < x$

$AB < BC + AC \Leftrightarrow 2x < 1200 - 3x + x \Leftrightarrow x < 300$

$AC < BC + AB \Leftrightarrow x < 1200 - 3x + 2x \Leftrightarrow x < 600$

~~...~~ Значит, усл. $200 < x < 300 \Leftrightarrow \exists \triangle ABC$. Таких x — 99 штук: ~~...~~ 201, 202, ..., 299 $(x \in \mathbb{N}) \Rightarrow \exists$ 99 $\triangle$. Могли ли мы какой-то $\triangle$ посчитать дважды? Пусть у нас есть $\triangle_1$ со ст. $x, 2x, 1200-2x$ и $\triangle_2$ со ст. $y, 2y, 1200-2y$, причём это один и тот же $\triangle$:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

1) $\cancel{x=y}$ $y=x$, тогда этот треугольник мы посчитали 1 раз.

2) $y=2x$, тогда $2y=4x>x \Rightarrow$ $\cancel{4x}$ $2y>x \Rightarrow 2y=1200-3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x=1200-3x \Rightarrow 7x=1200$, но $1200 \not\vdots 7$ — противоречие.

3) $y=1200-3x$, тогда

3.1) $2y=x$, тогда $\cancel{1200-3y=2x \Rightarrow}$ $2\cdot(1200-3x)=x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2400-6x=x \Rightarrow 2400=7x$, но $2400 \not\vdots 7$ — противоречие

3.2) $\cancel{1200-3y=x \Rightarrow}$ $2y=2x \Rightarrow x=y$ и этот Δ мы посчитали 1 раз.

Значит,

Ответ: 99

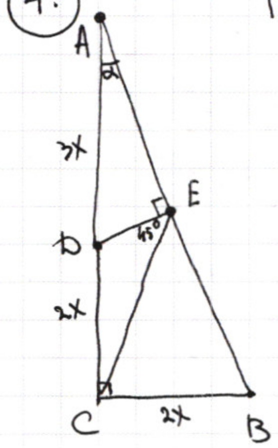
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Т.к. $\angle DEB = 90° = \angle DCB$, то $DEBC$ – вписанный 4-к =>

=> $\angle DEC = \angle DBC$, как вписанные, опир. на одну дугу CD.

=> $\angle DBC = 45°$ => в $\triangle DCB$: $\angle C = 90°$ $\angle B = 45°$ => $BC = CD$.

Пусть $AC = 5x$ => по усл. $AD = 3x$ => $CD = 2x$ => $BC = 2x$ =>

=> $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

а) Ответ: 0,4

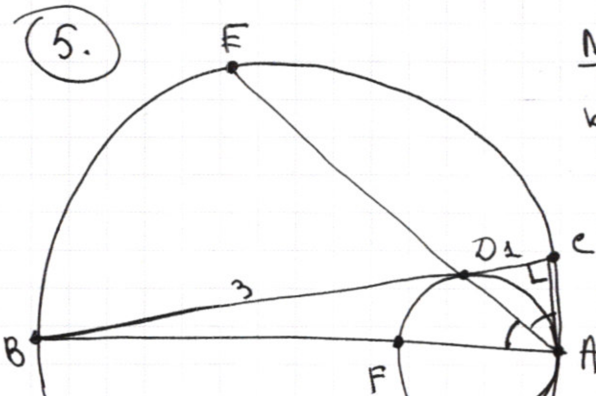
По т. Пифагора тогда $AB = x\sqrt{2^2+5^2} = x\sqrt{29}$ => $\sin\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{29}}$,

$\cos\angle BAC = \frac{5}{\sqrt{29}} = \sin(90° - \angle BAC)$. В $\triangle ADE$: $DE = AD\cdot\sin\angle DAE = \cancel{AD\cdot\sin\angle DAE} = AD\cdot\sin\angle BAC = 3x\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{29}}x$. $\angle ADE = 90° - \angle BAC$ => $\sin\angle EDC = \sin\angle ADE = \sin(90° - \angle BAC) = \frac{5}{\sqrt{29}}$. $S_{CDE} = \frac{1}{2}CD\cdot DE\cdot\sin\angle EDC = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{6}{\sqrt{29}}x\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{30}{29}x^2$. $AC = \sqrt{29} = 5x$ => $S_{CDE} = \frac{30}{29}\cdot\left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)^2 = \frac{6}{5} = 1{,}2$

б) Ответ: 1,2

Ответ: а) 0,4 б) 1,2

5.



Лемма Архимеда: ~~E ср.~~ В такой конфигурации, когда ω кас. внутр. о. Ω в т. A и хорды BC в т. D, то AD – бисс. $\angle BAC$ (что то же самое, что и E – сер. дуги BC).

Д-во: при гомотетии с центром в т. A и коэфф., равному отн. радиусов Ω и ω, окр. $\omega \to \Omega$, $D \to E$, а $BC \to$ в касательную к Ω в т. D, причём она $\parallel BC$ => в т. E кас. $\parallel BC$ => E – сер. $\overset{\frown}{BC}$ ч.т.д.

Тогда, используя лемму, AD – бисс. $\triangle ABC \Rightarrow$ по св-ву бисс.

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = 3 \Rightarrow AB = 3x$, $AC = x$. $\angle ACB = 90^\circ$, т.к. AB – диаметр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $(3x)^2 = x^2 + (1+3)^2 \Rightarrow 8x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{2}$ и $AB = 3\sqrt{2}$ – диаметр $\Omega \Rightarrow R_\Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. – ~~радиус~~ радиус Ω.

По т. о произв. отрезков сек. и кас.: из т. B к окр. ω пров. кас. BD и сек. AB (вт. т. перес. – F) $\Rightarrow BD^2 = BF \cdot BA \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 = BF \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow BF = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{2} \Rightarrow BF = AF \Rightarrow AF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Т.к. ω и Ω кас. в т. A, то A лежит на линии центров ω и $\Omega \Rightarrow$ если AB – диаметр Ω, то AF – диаметр $\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow R_\omega = \frac{AF}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

$\triangle ADC$ – п/у: $DC = 1$, $AC = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$. Пусть $\angle CAD = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. AD – бисс. $\angle BAC \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha$.

Из $\triangle ADC$ $\sin\alpha = \frac{DC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Из т. sin.: $\frac{EC}{\sin\alpha} = 2R_\Omega \Rightarrow EC = AB \cdot \sin\alpha$

$S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot BC \cdot \sin\angle ECB$; т.к. ABEC – вписс. $\Rightarrow \angle ECB = \angle EAB = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot BC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}$.

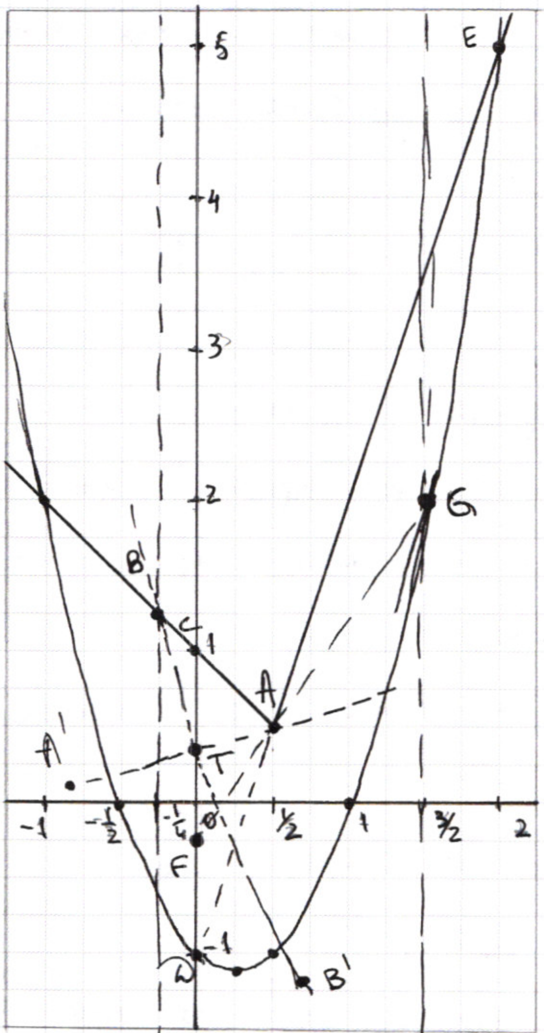
~~Ответ~~ $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$S_{ABEC} = S_{ABC} + S_{BEC} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R_\Omega = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $R_\omega = \frac{3}{4}\sqrt{2}$; $S_{ABEC} = 4\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. Пусть $f(x) = 2x^2 - x - 1$; $g(x) = x + |2x-1|$; $\ell(x) = ax + b$.



Строим графики $f(x)$ – парабола и $g(x)$ – уголок:

$f(x) = 2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$ – корни 1 и $-\frac{1}{2}$.

пересеч. с Oy – $(0;-1)$

$g(x) = x + |2x-1| = \begin{cases} 3x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 1-x, & x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ – верш. – $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

пересеч. g и f – $(2;5)$ и $(-1;2)$.

$g(0) = 1$.

Проводим границы $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

~~Обо~~ Обозначим этот промежуток δ.

$0 \in \delta$. $\Rightarrow$ ~~g(b)~~ $f(0) \leq$ ~~a~~ $b \leq g(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~b~~ $-1 \leq b \leq 1$.

Отметим т. $A - (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $B(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4})$, $C(0;1)$, $D(0;-1)$, $E(2;5)$.

g – луч AB + луч AE. Точки A, E, D лежат на одной прямой очевидно

$\ell(x) = ax + b$ – прямая.

$T(0;b)$ – точка перес. $\ell(x)$ с Oy.

Проведём прямые TA и TB. Т.к. $b \in [-1;1]$, то $T \in [CD]$.

~~Э~~ Эти прямые разбивают п-ть на 4 угла, чтобы их различать отметим на прямой AT, за т. T – точку A' и аналогично B', тогда у нас 4 угла ATB, ATB', $A'TB$ и $A'TB'$.

Рассмотрим случаи, как прямая $\ell(x)$ может располагаться:

1) если она $\in$ углам ATB и $A'TB'$, то очевидно, что она пересечёт отрезок AB => и отрезок AC, но тогда на δ найдётся точка x_1: $l(x)$ будет выше и $g(x)$ и $f(x)$ – противоречие

2) если она $\in$ углам $A'TB$ и ATB', то

внутри угла ATB' ясно, что ~~...~~ у прямой TA наклон больше, чем у DA, т.к. $T \in [CD]$ и значит луч прямой l, нах. внутри ATB' ~~...~~ может пересечь g только в т. A, а ~~...~~ в ост. точках он будет ниже

Отметим F — пересеч AG с Oy – $F(0; -\frac{1}{4})$, где G – точка $(\frac{3}{2}; f(\frac{3}{2}))$ – $(\frac{3}{2}; 2)$

Если $T \in [CF]$, то l либо пересеч. AC, либо пересеч. AF; если AC – то из рис. понятно, что например в $x = \frac{1}{2}$ $l(x)$ будет выше f и g; если AF – то так же из рис. видно, что в $x = \frac{3}{2}$ $l(x)$ будет ниже f и g.

Значит $T \notin [CF]$. (если l – TA, то говорим, что l пересеч. AF.)

Если же $T \in [FD]$, то проводим прямые TB, TA и TG

Рассмотрим 3 угла BTA, ATG и GTB':
если l в BTA, то l пересек. AB ~~...~~ в $x = \frac{1}{2}$ всё плохо. (аналогичное уже разбирали); если l в GTB', то в $x = \frac{3}{2}$ всё плохо; если же l в ATG, то она всегда ниже g и выше f =>
=> ~~угол~~ наклон l (т.е. a) не больше TA и не меньше TG:
для TK, где $K(x_1; y_1)$, наклон будет: $\frac{y_1 - b}{x_1}$.

Значит, $\frac{2 - b}{\frac{3}{2}} \le a \le \frac{\frac{1}{2} - b}{\frac{1}{2}} \iff \frac{4}{3} - \frac{2}{3}b \le a \le 1 - 2b$, а $b \in [-\frac{1}{4}; -1]$

Поэтому <u>ответ</u> такой: $-\frac{1}{4} \le b \le -1 \to \frac{4}{3} - \frac{2}{3}b \le a \le 1 - 2b \to$
$\to$ пара (a, b) – подходит.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Т.к. $f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(p^k) = f(p) + f(p^{k-1}) = f(p) + f(p) + f(p^{k-2}) + \dots =$

$= k f(p) \Rightarrow f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f(p_i)$.

$f(x/y) + f(y) = f(x) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

Найдём $f(n)$, где $1 \le n \le 21$:

$f(1) = 0$, т.к. $f(\frac{2}{2}) = f(2) - f(2) = 0$.

$f(2) = [\frac{2}{2}] = 1$

$f(3) = [\frac{3}{2}] = 1$

$f(4) = 2 \cdot f(2) = 2$

$f(5) = [\frac{5}{2}] = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(7) = [\frac{7}{2}] = 3$

$f(8) = 3 \cdot f(2) = 3$

$f(9) = 2 \cdot f(3) = 2$

$f(10) = f(2) + f(5) = 3$

$f(11) = [\frac{11}{2}] = 5$

$f(12) = 2 \cdot f(2) + f(3) = 3$

$f(13) = [\frac{13}{2}] = 6$

$f(14) = f(2) + f(7) = 4$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = 4 \cdot f(2) = 4$

$f(17) = [\frac{17}{2}] = 8$

$f(18) = f(2) + f(9) = 3$

$f(19) = [\frac{19}{2}] = 9$

$f(20) = 2f(2) + f(5) = 4$

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$.

Итак получилось:

0 — 1 шт.
1 — 2 шт.
2 — 4 шт.
3 — 6 шт.
4 — 4 шт.
5 — 1 шт.
6 — 1 шт.
7 — 0 шт.
8 — 1 шт.
9 — 1 шт.

выбираем сначала $f(x)$, а потом $f(y) > f(x)$:

$f(x) = 0$ — 1 способ, тогда $f(y) > 0$ — 20 способов.

$f(x) = 1$ — 2 способа, $f(y) > 1$ — 18 способов,

2 — 4 способа, > 2 — 14 сп.,

3 — 6 сп., > 3 — 8 сп.,

4 — 4 сп., > 4 — 4 сп.,

5 — 1 сп., > 5 — 3 сп.,

6 – 1 сл.,
>6 – 2 сл.,
7 – 0 сл.,
>7 – 2 сл.,
8 – 1 сл.,
>8 – 1 сл.,
9 – 1 сл.,
>9 – 0 сл.

Таким образом, кол-во пар $(x;y)$: $f(x)<f(y)$

$1\cdot 20+2\cdot 18+4\cdot 14+6\cdot 8+4\cdot 4+1\cdot 3+1\cdot 2+0\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 0=$

$=20+36+56+48+16+\underbrace{3+2+1}_{6}=182$

Ответ: 182.

(3.) $a=x-1$; $b=y-2$; тогда $y-2x=\cancel{b-2a}=y-2-2(x-1)=$
$=b-2a$;

$xy-2x-y+2=(x-1)(y-2)=ab$;

$2x^2+y^2-4x-4y+3=2(x-1)^2+(y-2)^2-3=2a^2+b^2-3$

Система:

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ b^2+2a^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-2a)^2=ab \\ b-2a\geq 0 \\ b^2+2a^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \\ b^2=3-2a^2 \\ b\geq 2a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$5ab\geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2+4a^2=5ab \\ b^2=3-2a^2 \\ b\geq 2a \end{cases} \Rightarrow b^4+8a^2b^2+16a^4=25a^2b^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (3-2a^2)^2+8a^2(3-2a^2)+16a^4=25a^2(3-2a^2)\Rightarrow$

$\Rightarrow t=a^2:\ (3-2t)^2+8t(3-2t)+16t^2=25t(3-2t)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2(4-16+16+50)+t(-12+24-75)+9=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 54t^2-63t+9=0 \Leftrightarrow 6t^2-7t+1=0 \Leftrightarrow 6(t-1)(t-\frac{1}{6})=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\left[\begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{6} \end{array}\right. \Rightarrow a^2=\left[\begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{6} \end{array}\right. \Rightarrow b^2=\left[\begin{array}{l} 3-2 \\ 3-\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a,b)=\left[\begin{array}{l} (1;1) \\ (-1;1) \\ (-1;-1) \\ (1;-1) \\ (\frac{1}{\sqrt{6}};\sqrt{\frac{26}{3}}) \\ (-\frac{1}{\sqrt{6}};\sqrt{\frac{26}{3}}) \\ (-\frac{1}{\sqrt{6}};-\sqrt{\frac{26}{3}}) \\ (\frac{1}{\sqrt{6}};-\sqrt{\frac{26}{3}}) \end{array}\right.$$

$b\geq 2a$ и $5ab\geq 0 \Rightarrow$ пары, где a и b разного знака не подх.:

Ост: $(1;1)$, $(-1;-1)$, $(\frac{1}{\sqrt{6}};\sqrt{\frac{26}{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}};-\sqrt{\frac{26}{3}})$

Проверяем:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1 \geq 2\cdot 1$ — нет $\Rightarrow$ $(1;1)$ — не подх.

$-1 \geq 2\cdot(-1)$ — да $\Rightarrow$ $(-1;-1)$ — подх.

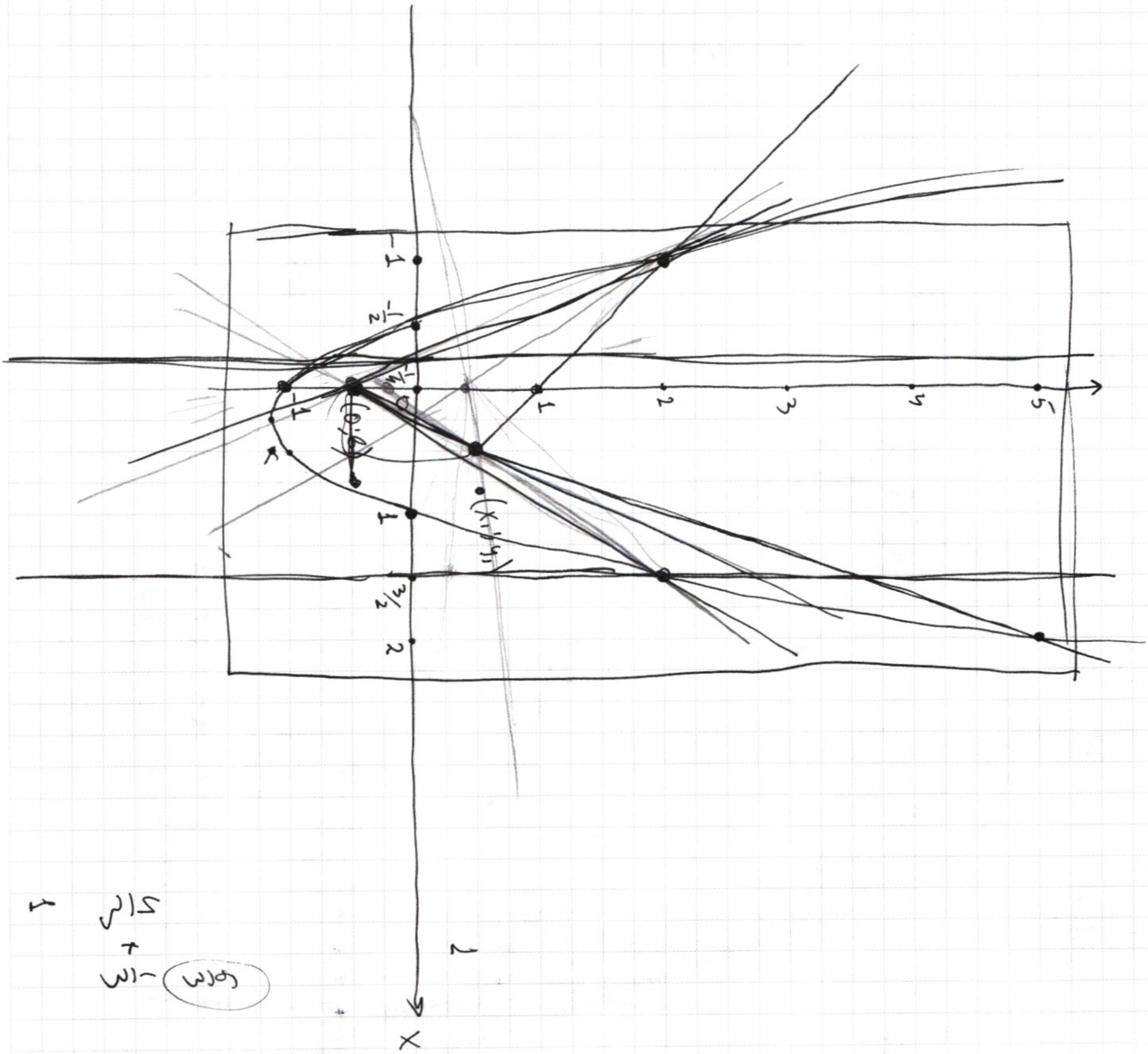
$\sqrt{\frac{26}{3}} \geq 2\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{26}{3} \geq \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ — подх $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\sqrt{\frac{26}{3}}\right)$

$-\sqrt{\frac{26}{3}} \leq 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \Leftrightarrow \frac{26}{3} \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ — не подх.

$(a;b)$: $(-1;-1)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\sqrt{\frac{26}{3}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x;y)$: $(0;1)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+1;\sqrt{\frac{26}{3}}+2\right)$.

Ответ: $(0;1)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+1;\sqrt{\frac{26}{3}}+2\right)$.



-1
-1/2
1
3/2
2
1
2
3
4
5
(x, y)
x

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

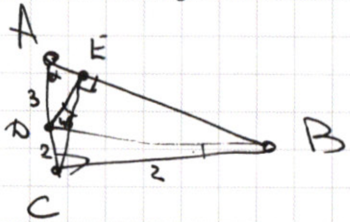
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

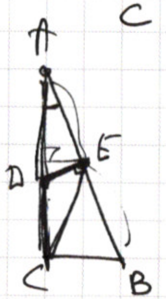
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\alpha = ?$





$1+8=9$

$\frac{1\pm 3}{4}$

$2x^2 - \cancel{x} - 1 = 1 - \cancel{x}$

$2x^2 = 2$

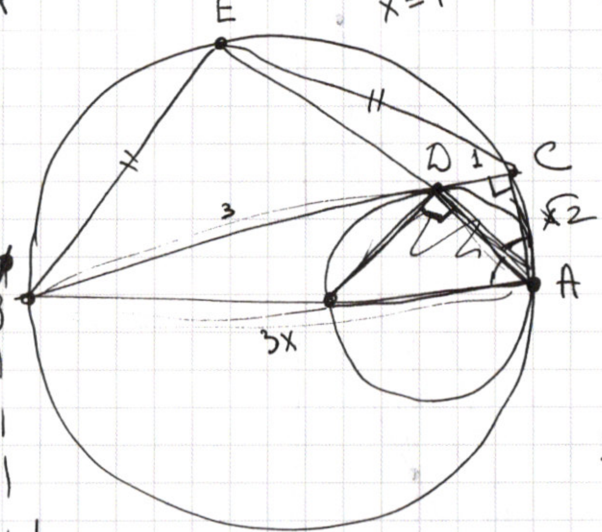
$x = -1$

$9x^2 = x^2 + 16$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$

$R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$



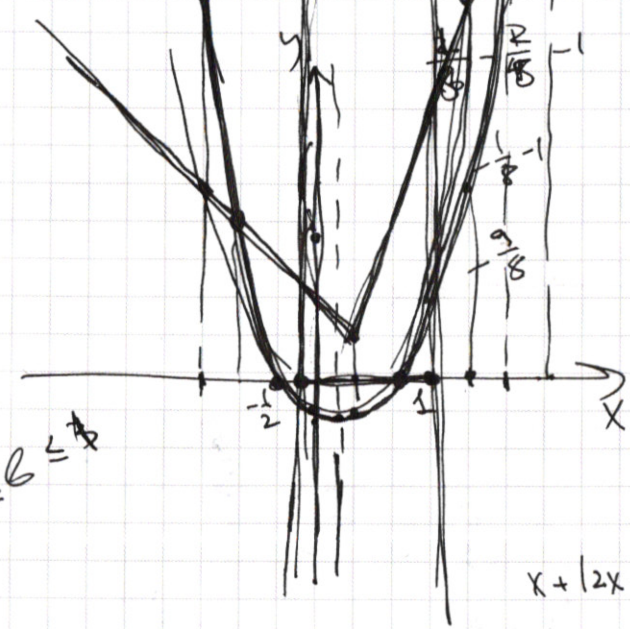
1

$2x^2 - x - \cancel{x} = 3x - \cancel{x}$

$2x = 4$

$x = 2$

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|$



$-1 \leq b \leq$

$AD =$

$18 - 4 = 12$

$28 -$

$\frac{5}{2}$

$\frac{13}{2}$

$2 S_{BEC} = EC^2 \cdot \sin\alpha$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\ldots}$

$\frac{25}{2} - \frac{5}{2} - 1$

$x + |2x-1| = \begin{cases} 3x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 1-x, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c

a, qa, q^2a, q^3a

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$c = ?$

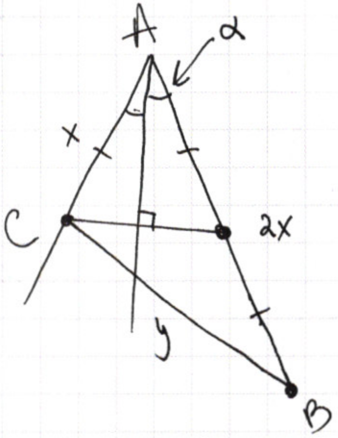
~~$a \cdot q^6 a^2 + 2q^4 a^2 + q^2 a = 0$~~

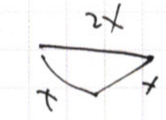
$q^6 a^3 + 2q^4 a^2 + q^2 a = 0$

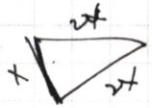
$c^3 + 2c^2 + c = 0$

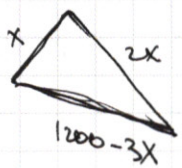
$c^2 + 2c + 1 = 0$

$\boxed{c = -1}$ 0

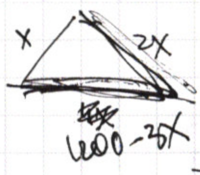








иксов 99 штук



~~1) y = 2x~~

$7x = 1200$

$2) 2(1200 - 3x) = 2x$

$x = 300$

~~3) 2(1200-x)~~

$y^2 = x^2 + (2x)^2 - 2x \cdot (2x) \cdot \cos\alpha$

$y^2 = 5x^2 - 4x^2 \cdot \cos\alpha = x^2(5 - 4\cos\alpha)$

~~$y, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow 5 - 4\cos\alpha = k^2, k \in \mathbb{Z}$~~

$3x + y = 1200$

$y \vdots 3$

$1200 - 3x < 3x$

$200 < x$

$201 \leq x \leq 299$

$1200 - 2x > 2x$

$1200 > 4x$

$300 > x$

$299 \geq x$

$1200 - x > x$

$600 > x$

$2(1200 - 3x) = x$

$2 \cdot 1200 = 7x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\boxed{y-2x \geq 0}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$\boxed{xy-2x-y+2 \geq 0}$

$y^2+4x^2-4xy = xy-2x-y+2$ $\quad \frac{1}{4}$

$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0$

$(y-2)^2 = y^2-4y+4$

$2(x-1)^2 = 2x^2-4x+2$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3$

$xy-2x-y+2$

$(x-1)(y-2) \geq 0$

$5x^2+\frac{1}{2}y^2-5xy=$

$x-1=a$

$y-2=b$

$b \geq 2a$

$b \geq 2a \geq 0$

либо

$0 \geq b \geq 2a$

$|y-2| \leq \sqrt{3}$

$|x-1| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$

$1-\sqrt{\frac{3}{2}} \quad 0 \quad 1 \quad \sqrt{\frac{3}{2}}+1 \quad x$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ b^2+2a^2=3 \end{cases}$$

$y-2 \quad -2(x-1)$

$0 \quad 2-\sqrt{3} \quad 2 \quad \sqrt{3}+2 \quad y$

$$\begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \\ b^2+2a^2=3 \end{cases}$$

$5ab \geq 10a^2$

$-1; 1$

$2a^2+3-5ab \leq 3-8a^2$

$(a-1)^2+(b-1)^2 =$

$= a^2-2a+b^2-2b+2$

$4b^2-20ab+16a^2$

$$\begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0 \\ b^2+2a^2=3 \end{cases}$$

25

$49-24=25$

$k+1 \quad -5 \quad 2k+4$

$2(2k+4)\cdot(k+1)=-5$

$4(k+2)(k+1)=-5$

$4k^2+12k+13=0$

$$\begin{cases} 2b^2-10ab+8a^2=0 \\ \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$
$f(2)=1$
$f(3)=1$
$f(4)=2$
$f(5)=2$
$f(6)=2$
$f(7)=3$
$f(8)=3$
$f(9)=2$
$f(10)=3$
$f(11)=5$
$f(12)=3$
$f(13)=6$
$f(14)=4$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]=\frac{p-1}{2}$, $p\geq 3$

$p=2$

$f(2)=1$

$\mathbb{N}\ (x;y)$

$1\leq x\leq 21$

$1\leq y\leq 21$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)=f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

$$f(p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k})=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot f(p_i)$$

$$f(p^k)=k\cdot\frac{p-1}{2},\ p\geqslant 3$$

$$f(2^k)=k.$$

$b - 2a = \sqrt{ab}$

$b^2 + 2a^2 - 3 = 0$

$-1 \quad -1$

$-1 \quad -1$

$b^2 - 5ab + 4a^2 = 0$

$b^2 + 2a^2 - 3 = 0$

$b \geqslant 2a$

$b^2 + 4a^2 = 5ab$

$b^2 + 2a^2 = 3$

$b^2 = 3 - 2a^2$

$b^4 + 8a^2b^2 + 16a^4 = 25a^2 \cdot b^2$