

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N^o 1.
a, b, c, d.

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

$$D = 4b^2 - 4ac;$$

$$d \cdot q^2 x^2 + 2d \cdot q^2 x + d \cdot q^2 = 0.$$

$$x^2 + 2qx + q^2 = 0.$$

$$(q+x)^2 = 0.$$

$$\frac{LC}{BL} \cdot \frac{BK}{KL} \cdot \frac{AK}{KC} = 1, \quad -q = a, q^2 = c, \quad -1 = a, q^3 = c$$

$$\frac{LC}{BL} = \frac{2}{1}, \quad a, x^2 + 2a, qx + a, q^2 = 0.$$

$$x^2 + 2qx + q^2 = 0.$$

$$(x+q)^2 = 0.$$

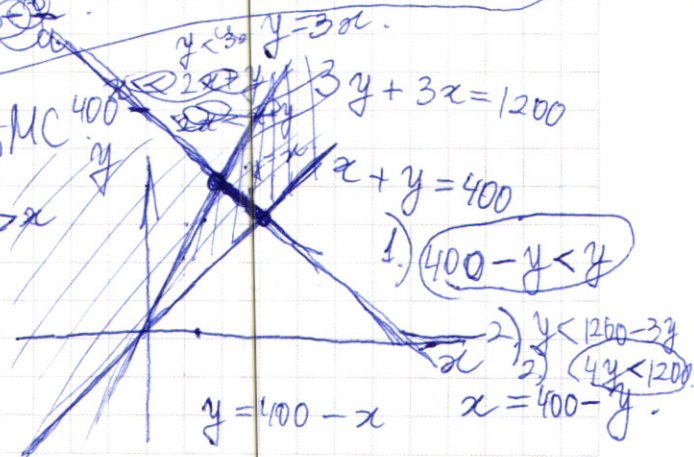
$$x = -q, \quad -q = a, q^3 = c, \quad a, q^2 = -1, \quad c = -1.$$

$$d = -q = a.$$

Если есть симп. $\triangle ABC$, то симп. $\triangle LMC$

$$\begin{cases} 3x \leq 3y \\ 2y < y + 3x \\ y < 2y + 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < y \\ y < 3x \\ y + 3x > 0 \\ x + y = 400 \end{cases}$$



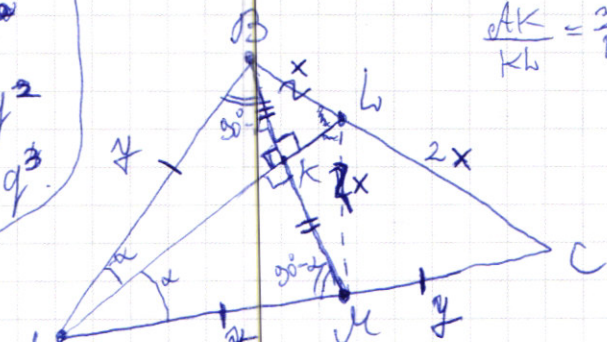
N^o 2.

$$P = 1200.$$

$$\frac{CM}{AM} \cdot \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} = 1.$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{AK}{KB} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{AK}{KB} = \frac{3}{1}$$



1) BK - биссектр. и высота
в $\triangle ABC$, поэтому $BK = KM$

$$\begin{aligned} 10, 20, 3x &= 2 \\ 2y &= 3x \\ 2x + 2y &= 800 \\ 5x &= 800 \\ x &= 160 \end{aligned}$$

$$\frac{BL}{AB} = \frac{LC}{AC} \quad x = 160$$

Из условия
у - безразмерное
целочисленное.
(сторона AB), поэтому три значения
P следует, что a - также целое.

N°1

Пусть q - знаменатель данной геометрической прогрессии.
Тогда: $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$.

Ур-е $ax^2 + 2bx + c = 0$ примет вид $ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$.
Если $a = 0$, то и последующие члены геом. прогрессии равны 0, что не имеет смысла. Поэтому $a \neq 0$, тогда

$$x^2 + 2qx + q^2 = 0.$$

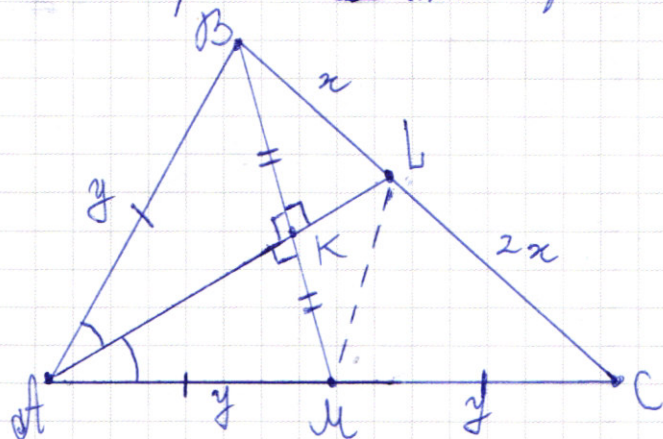
$$(x + q)^2 = 0.$$

$x = -q$ - этот корень является четвертым членом геометрической прогрессии, т.е. $d = aq^3 = -q$, $aq^3 = -q$,
($q \neq 0$, так же по смыслу), $aq^2 = -1$ или $c = -1$.

Ответ: $c = -1$.

N°2

Пусть в $\triangle ABC$ медиана BM перпендикулярна биссектрисе ~~BM~~ и пересекается с ней в точке K .



1) AK - биссектр. и высота в $\triangle ABM$, поэтому $\triangle ABM$ - равнобедренный и AK является медианой, т.е. $|AB| = |AM|$,
 $|BK| = |KM|$.

~~2) По теореме о биссектрисе для $\triangle ABC$:~~ $\frac{|BK|}{|AC|} = \frac{|AL|}{|AB|}$,
 $\frac{|BK|}{|AC|} = \frac{|AL|}{|AB|} = 2$. Пусть $|AB| = y$, тогда $|AC| = 2y$; пусть

$$|BK| = x, \text{ тогда } |LC| = 2x.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

3) $P_{\Delta ABC} = 3y + 3x$ или $P_{\Delta ABC} = 1200$, значит $3x + 3y = 1200$,
 $x + y = 400$.

4) Для того, чтобы ΔABC существовал необходимо, чтобы выполнялось нерав-во треугольника для всех его сторон:
 $y < 2y + 3x$ (для стороны AB); $2y < y + 3x$ (для стороны AC);
 $3x < y + 2y$ (для стороны BC). Составлю систему:

$$\begin{cases} x + y = 400, \\ y < 2y + 3x, \\ 2y < y + 3x, \\ 3x < y + 2y. \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y = 400, \\ y + 3x > 0, \\ y < 3x, \\ 3x < 3y \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y = 400, & (1) \\ y < 3x, & (2) \\ x < y. & (3) \end{cases}$$

*верно всегда
т.к. $x > 0, y > 0$.*

Из (1): $y = 400 - x$, тогда из (2): $400 - x < 3x$, $4x > 400$,
 $x > 100$; и из (3): $x < 400 - x$, $2x < 400$, $x < 200$.

Таким образом, $100 < x < 200$, т.е. всего x может принимать
99 значений и для каждого x из этого диапазона найдётся
свой y . Поэтому будет существовать 99 таких треугольников.

Ответ: 99 треугольников.

№3

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}, \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3. \end{cases}$$

Пусть $u = x-1, v = y-2$; перенесем члены:

$$\begin{cases} v-2u = \sqrt{vu}, & (1) \\ 2u^2+v^2=3. & (2) \end{cases}$$

$$2u^2+v^2=3. \quad (2)$$

$$v-2u = \sqrt{vu}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$v^2-4uv+4u^2=vu$$

$$v^2-5uv+4u^2=0.$$

$$D=25u^2-16u^2=9u^2.$$

$$v_{1,2} = \frac{5u \pm 3u}{2}.$$

$$v_1 = 4u, v_2 = u.$$

~~1) Пусть $v=4u$.~~ 1) Пусть $v=u$.

Тогда из (2): $3u^2=3, u^2=1, u_{1,2}=\pm 1$.

$$1.1) u = -1, v = -1$$

Тогда ^{проверка} из (1): $-1-2(-1) = \sqrt{(-1)(-1)}, 1 = \sqrt{1}$ - верно.

$$1.2) u = 1, v = 1.$$

Проверка: $1-2 \cdot 1 = \sqrt{1 \cdot 1}, -1 = 1$ - не верно.
(подставлено в (1)).

В первом случае получено, что $\{u = -1; v = -1\}$, тогда $x-1 = -1 \Rightarrow x = 0; y-2 = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \{x = 0; y = -1\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.) Пусть $v = 4u$;Тогда из (2): $2u^2 + 16u^2 = 3$, $18u^2 = 3$, $u^2 = \frac{1}{6}$, $u_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$.

2.1) $v = -\frac{4}{\sqrt{6}}$ $u = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $v = -\frac{4}{\sqrt{6}} = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Проверка (подстановка в (1)): $-\frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}$,

$-\frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $-\frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ — не к.д., т.к. правая часть ≥ 0 .

2.2) $u = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $v = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

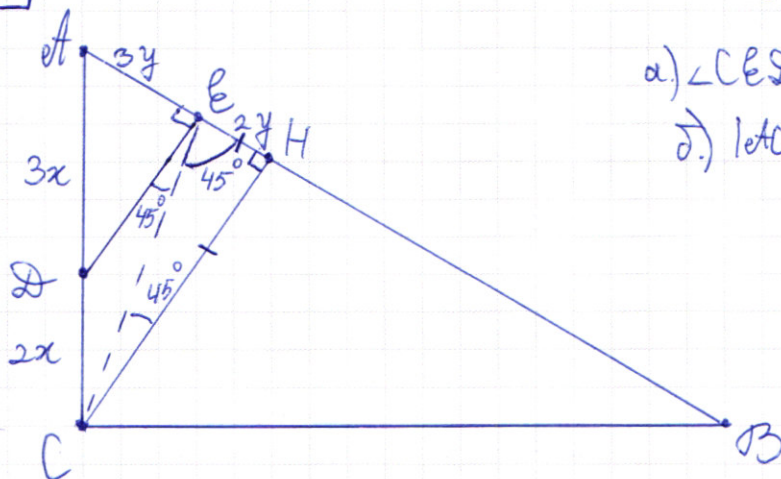
Проверка (подстановка в (1)): $\frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3}}$,

$\frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ — верно.

Во втором случае получаем, что $\left\{u = \frac{1}{\sqrt{6}}; v = \frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$,
тогда $x - 1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}$; $y - 2 = \frac{2\sqrt{6}}{3}$; $y = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$,
 $\left\{x = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}; y = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$.

Ответ: $\left\{x = 0; y = -1\right\}_1$, $\left\{x = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}; y = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}_2$.

N°4



Дано: $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{3}{5}$; $DE \perp AB$.

а) $\angle CED = 45^\circ$, найми $\operatorname{tg}(\angle BDC)$

б) $|AC| = \sqrt{29}$, найми S_{CEH}

1) П.к. $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{3}{5}$, но пусть $|AD| = 3x$, тогда $|AC| = 5x \Rightarrow |DC| = x$

2) Проведем высоту CH к стороне AB. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках: $\frac{|AE|}{|EH|} = \frac{|AD|}{|DC|} = \frac{3}{2}$, пусть

~~$|AE| = 3y$~~ , тогда $|EH| = 2y$. Поскольку в прямоугол. $\triangle ECH$ $\angle CEH = 45^\circ$, то $\angle ECH = 90^\circ - \angle CEH = 45^\circ$, т.е. $\triangle CEH$ - равнобедренный и $|EH| = |CH|$.

3) По теореме Пифагора из $\triangle ACH$: $|CH| = \sqrt{(5x)^2 - (5y)^2}$.

Тогда $2y = \sqrt{(5x)^2 - (5y)^2}$, $4y^2 = 25x^2 - 25y^2$, $29y^2 = 25x^2$,

~~$\frac{y^2}{x^2} = \frac{25}{29}$~~ , $\frac{y}{x} = \frac{5}{\sqrt{29}}$, т.е. $\cos(\angle BDC) = \frac{3y}{3x} = \frac{y}{x} = \frac{5}{\sqrt{29}} > 0$,

т.к. угол $\angle BDC$ - острый.

4) $\sin(\angle BDC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BDC)} = \sqrt{1 - \frac{25}{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$, тогда

$\operatorname{tg}(\angle BDC) = \frac{\sin(\angle BDC)}{\cos(\angle BDC)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{29}}}{\frac{5}{\sqrt{29}}} = \frac{2}{5}$.

5) П.к. $|AC| = \sqrt{29}$, то $5x = \sqrt{29}$, $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$; тогда $y = \frac{5}{\sqrt{29}}x = 1$.

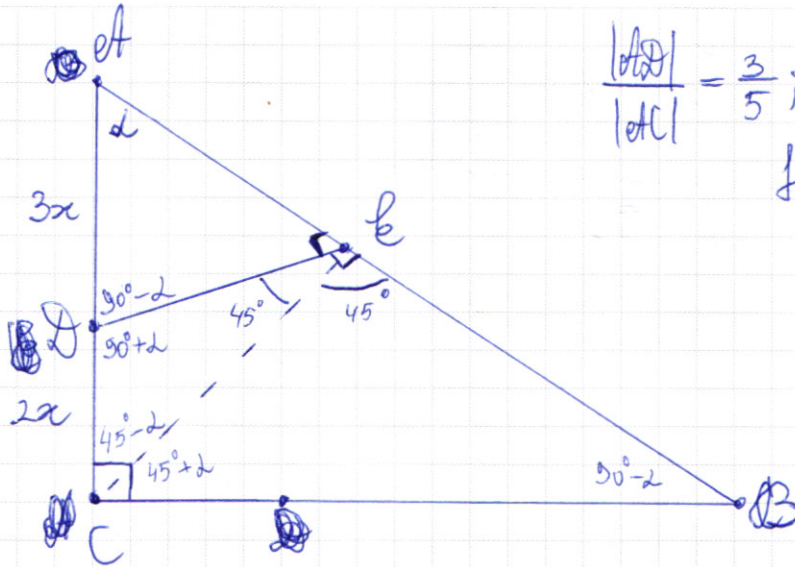
$|DE| = \operatorname{tg}(\angle BDC) \cdot 3y = \frac{2}{5} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{6}{5}$;

6) Из $\triangle CEH$: $|CE| = 2\sqrt{2}y$ (как диагональ квадрата со стороной $2y$).

~~$|CE| = 2\sqrt{2} \cdot 1 = 2\sqrt{2}$~~ . Тогда $S_{CEH} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |CE| \cdot \sin(\angle DEC)$; ~~$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{5}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

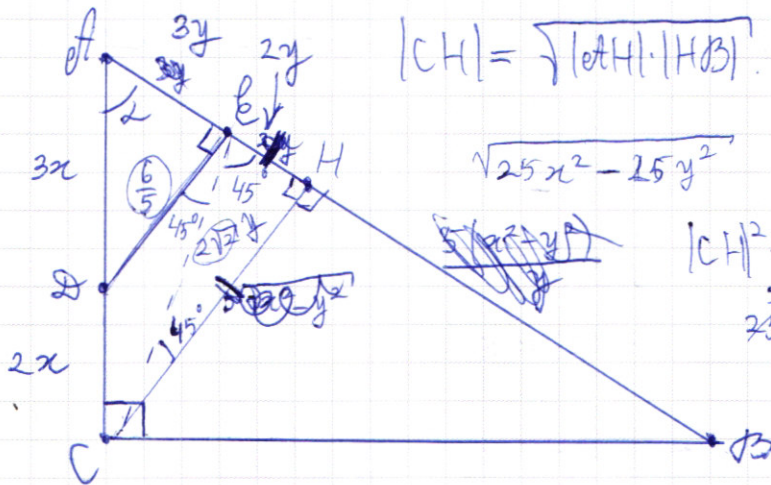


$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{3}{5}; DE \perp AB.$$

Найти: $\operatorname{tg}(\angle BDC) = ?$

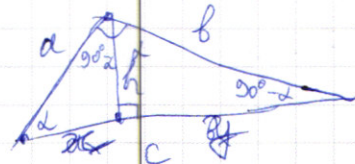
$$\angle CED = 45^\circ.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ) = \frac{6}{5} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{5}.$$



$$|CH| = \sqrt{|AH| \cdot |HB|}$$

$$\sqrt{25x^2 - 25y^2}$$



$$|CH|^2 = |AH| \cdot |HB| \quad \frac{h}{x} = \frac{y}{h}$$

$$25x^2 - 25y^2 = 5y \cdot |HB|$$

$$|HB| = \frac{5(x^2 - y^2)}{y}$$

$$|AB| = 5y + \frac{5(x^2 - y^2)}{y} = \frac{5y^2 + 5(x^2 - y^2)}{y} = 5 \frac{x^2}{y}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{5x}{5 \frac{x^2}{y}} = \frac{y}{x}$$

$$|AD| = \sqrt{25y}$$

$$(3y)^2 = 25x^2 - 25y^2$$

$$x = \frac{\sqrt{25y}}{5}$$

$$y = \frac{5}{\sqrt{25}}$$

$$25y^2 = 25x^2$$

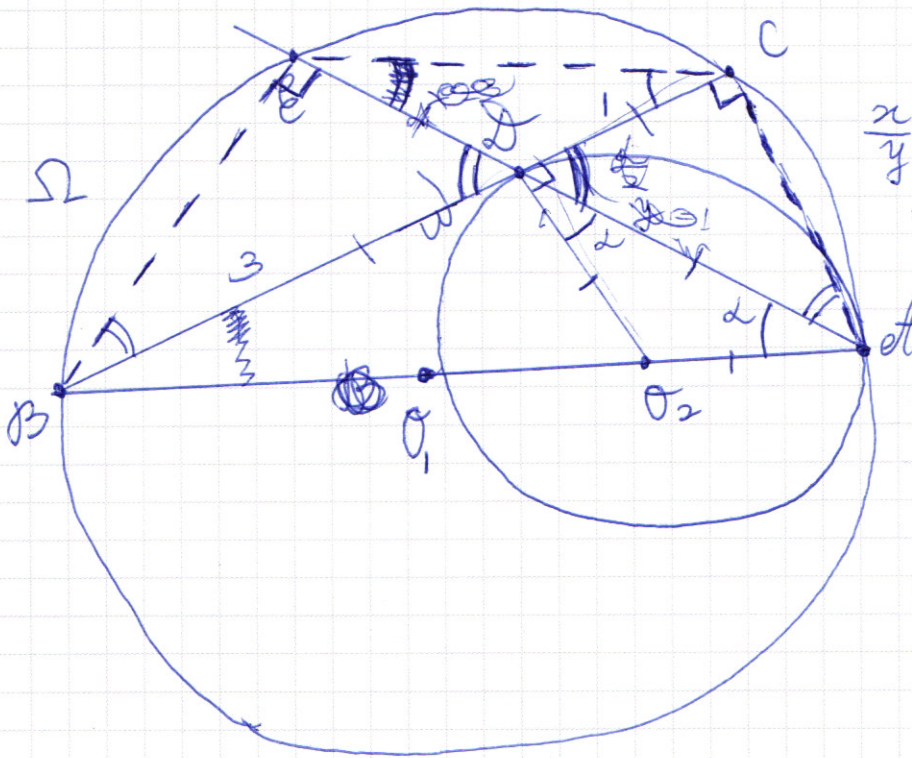
$$y = \frac{5}{\sqrt{25}} x = 1$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{25}{25}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2}{5} \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2}{5} \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2}{5}$$

$$|DE| = \frac{6}{5} \quad \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot 3x = \frac{6}{5}$$

N=5.



r_1, r_2

$|CD|=1, |BD|=3.$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{1}$

$xy = 3$

$3y^2 = 3$
 $y = 1.$

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|.$ $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}].$

1) Если $x < \frac{1}{2}$, $2x^2 - x - 1 \leq -x + 1.$

$x^2 \leq 1.$
 $-1 \leq x \leq 1.$

Пусть $2x - 1 > 0, x > \frac{1}{2}. -1 \leq x < \frac{1}{2}$

$2x - 1 < 0, x < \frac{1}{2}.$

$D = 4 + 8 = 9, x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$

$x_1 = 2; x_2 = -1.$

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq 3x - 1.$ $2(x-2)(x+1).$

$b = \frac{1}{2}.$

$2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{3}{16} - 1$

~~$(x - \frac{1}{2})^2 - 1$~~

$2x^2 - x - 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x - 1) =$

$\frac{6}{16} - 1 =$

$= -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8} = 2(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} - \frac{17}{16}) =$

$= 2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{8}.$

~~BCOC~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) 2y > 400, y > 200. \quad \begin{matrix} 250 \\ 199 \end{matrix} \Rightarrow 200 < y < 300, x = 400 - y.$$

$$2) 4y < 1200, y < 300.$$

(201) $\Rightarrow x = 199.$

$x = 150.$

~~200 < 300~~

$250 < 450.$

$y = 299.$

$x = 101.$

$299 < 300.$

$y = 3x.$
 $4x = 400, x = 100.$

N°3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ (2x - 1)^2 + (y - 2)^2 \\ 4x^2 - 4x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

$x(y-2) - (y-2)$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}, \\ \end{cases}$$

$$(\sqrt{2}x + \sqrt{2})^2 + (y-2)^2 = 3.$$

$$y^2 - 4y + 2x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$D = 16 - 8x^2 + 16x - 4 = -8x^2 + 16x + 12$$

$$= -8x^2 + 16x + 4 = -4(2x^2 - 4x + 1).$$

$$y^2 - 4y + 2x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$D = 16 - 8 = 8.$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$2 \left(x - \frac{2}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2.$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0.$$

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 5 = 0.$$

$$x^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

$$2(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 4y + 4 - 3 = 0.$$

$$\begin{cases} 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3, \\ y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}. \end{cases}$$

$$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}.$$

Пусть ~~$x < 0, y < 2$~~

$$2u^2 + 3uv + v^2 = 3 + 3(y - 2x).$$

$$D = 9 - 8 = 1V^2.$$

$$u_{1,2} = \frac{-3v \pm V}{4}, -v, -\frac{1}{2}v$$

$$(u+v)(2u+v) = 3(y-2x+1).$$

~~$2u^2 + 3uv + v^2 = 3$~~

$$u = \sqrt{x-1}, v = \sqrt{y-2}.$$

$$v^2 - 2u^2.$$

$$2u^2 + 3uv + v^2 = 3v^2 - 6u^2.$$

$$8u^2 + 3uv - 2v^2 = 0.$$

$$D = 9 + 64 = 73.$$

$$\begin{aligned} uv \quad u &= x-1; \\ v &= y-2. \\ v &= 2u. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2u^2 + v^2 = 3, \\ v - 2u = \sqrt{uv}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2u^2 + v^2 = 3. \\ v^2 - 4uv + 4u^2 = uv \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 + 2u^2 = 3. \\ v^2 - 5uv + 4u^2 = 0. \end{cases}$$

$$v^2 - 5uv + 4u^2 = 0.$$

$$D = 25 - 16 = 9.$$

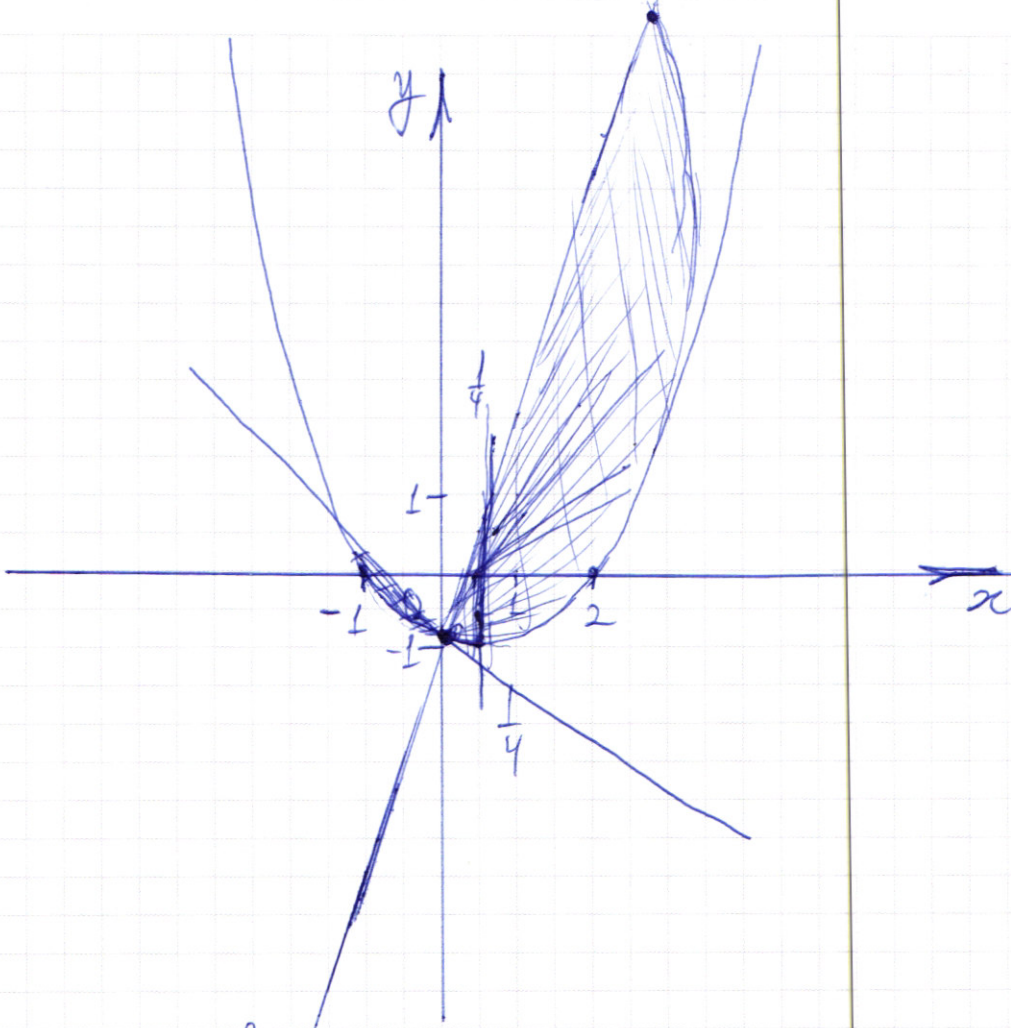
$$u_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

$$v = 4; v = 1.$$

$$(v-u)(v-4u) = 0.$$

Если $v = u$, то $3v^2 = 3, v^2 = 3, v = \pm\sqrt{3}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

$$2x^2 - x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{17}{16} =$$

N°4 (высота)

$$S_{\text{сез}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{5}$$

Ответ: а) $\text{tg}(\angle BDC) = \frac{2}{5}$;

б) $S_{\text{сез}} = \frac{6}{5}$.