МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{S}{S+\frac{5S}{3}} = \frac{3\cdot 1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}$

$2S = \frac{S}{3} + S_2$ $\quad S_2 = \frac{5S}{3}$

a

$b = qa$

$c = q^2 a$

$cx^2 - 2bx + c = 0$

$ax^2 - 2qax + q^2 a = 0$

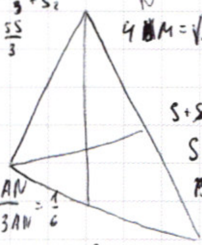
$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$x = q = q^3 a$

$AN^2 = a^2 + 16MN^2 - 2a \cdot 4MN \cdot \frac{3MN}{a}$ $\quad c = q^2 a = 1$

$= ~~8AN~~ a^2 - 8MN^2$

$\frac{S+\frac{1}{3}S}{CAD} = \frac{1 \cdot AN}{2 \cdot 3AN} = \frac{1}{6}$



$= \sqrt{2a^2 - 2AN^2}$ $\quad 8BM^2 = c^2 - AN^2$

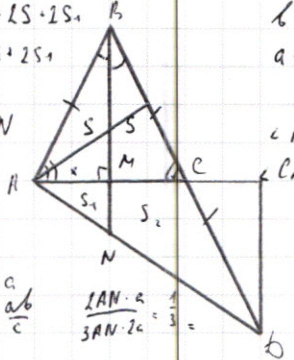
$4BM = \sqrt{2a^2 - AN \cdot ND}$ $\quad 2S = S_1 + S_2$

$S + S_2 = 2S + 2S_1$

$S + S_2 = S_1 + S_2 + 2S_1$

$S = 3S_1$

$BM = 3MN$



$a < 225$

$a,\ 2a,\ b$ $\quad a < b = 900 - 3c$

$b < 3a$ $\quad 3a + b = 900$

$a < b$ $\quad b < 3a \Leftarrow 900 - b$

$b < 450$

$\angle ACB = \angle BAC = \angle CAD = \angle CDA$

$\angle CDA = 180^\circ - \angle CAD - \angle BAC$

$\frac{x}{a} = \frac{b-x}{2c}$

$b - x = 3x$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$x - 6y > 0$

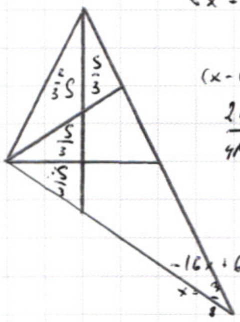
$a^2 = x^2 + 9MN^2$

$AN^2 = x^2 + MN^2$

$a^2 = AN^2 + 8MN^2$ $\quad DC = \frac{2}{3}a$

$ED = \frac{1}{3} \frac{ab}{c}$

$\frac{2AN \cdot a}{3AN \cdot 2c} = \frac{1}{3}$



$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

$\frac{2MN \cdot \frac{1}{2}a}{4MN \cdot 2a} = \frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{3}S}{S+S_2}$

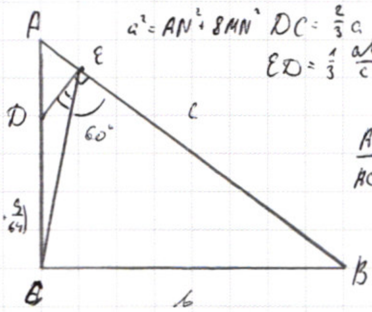
$S + S_2 = \frac{8}{3}S$

$8x^2 - 6x - 1 = 8(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{8}x \cdot \frac{9}{64})$

$\frac{11}{3}S =$ $\quad -\frac{65}{8}$

$-16x + 6$

$x = \frac{3}{8}$



$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{c} = \frac{\frac{1}{3}c}{c} = \frac{AE}{a} \Rightarrow AE = \frac{a^2}{3c}$

$EB = c - \frac{a^2}{3c} = \frac{3c^2 - a^2}{3c}$

$\frac{4}{9}a^2 = \frac{1}{9}\frac{a^2 b^2}{c^2} + EC^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{ab}{c} \cdot EC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b^2 = \frac{(3c^2 - a^2)^2}{9c^2} + EC^2 - 2 \cdot \frac{(3c^2 - a^2)}{3c} \cdot EC \cdot \frac{1}{2}$

E

$8x - 6|2x - 1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$EC^2 = a^2 + \frac{a^4}{9c^2} - 2a \cdot \frac{a^2}{3c} \cos BAC$

$EC^2 = b^2 + \frac{(3c^2 - a^2)^2}{9c^2} - 2b \cdot \frac{(3c^2 - a^2)}{3c} \sin BAC$

$g = (2R - r)^2 - r^2 = 4R^2 - 4Rr$

Если $x \ge \frac{1}{2}$ $\quad -4x + 6$

Если $x < \frac{1}{2}$ $\quad 20x - 6$

$a^2 + \frac{a^4}{9c^2} - \frac{2a^3}{3c} \cos BAC = b^2 + \frac{9c^4 - 6c^2 a^2 + a^4}{9c^2} - 2b \left(\frac{3c^2 - a^2}{3c}\right) \sin BAC$

$2 \le ax + b \le$

$-6 \le b \le 7$

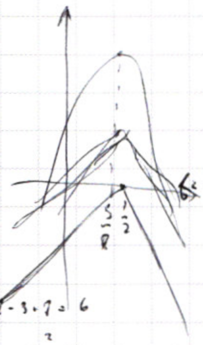
$2 \le a + b \le 5$

$-7 \le b \le 6$

$-5 \le a \le 11$

$-16 \le -\frac{1}{2}a + b \le 2 - 3 \cdot 7 \le 6$

$-22 \le -\frac{1}{2}a \le 13$



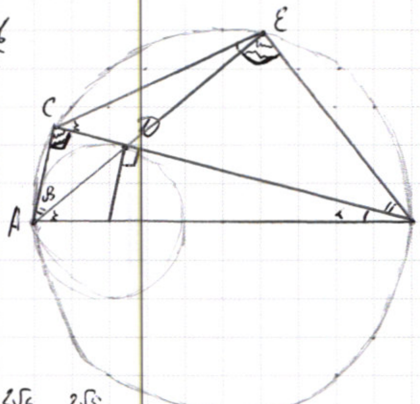
$a^2 - \frac{2a^3}{3c} \cdot \frac{a}{c} = b^2 + c^2 - \frac{2}{3}a^2 - 2b \cdot \frac{(3c^2 - a^2)}{3c} \cdot \frac{b}{c}$

$\frac{5}{3}a^2 - \frac{2a^4}{3c^2} = b^2 + c^2 - 2b^2 + \frac{2a^2 b^2}{3c^2}$

$b^2 + \frac{5}{3}a^2 - \frac{2a^4}{3c^2} = c^2 + \frac{2a^2 b^2}{3c^2}$

$\frac{2}{3}a^2 - \frac{2a^4}{3c^2} = \frac{2a^2 b^2}{3c^2}$

$\frac{2}{3} = \frac{2b^2 + 2a^2}{3c^2}$



$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5}$

$10R - 5r = 6R$

$4R = 5r$

$r = \frac{4R}{5}$

$-y^2 + 13x + 10y + 26 = 0$

$x = y^2 - 10y + 26$

$x^2 - 13xy + 6y + x + 36y^2 = 6$

$36y^2 + x^2 + y^2 + x + 6y = -y^2 + 13x + 10y - 20$

$\sin \angle = \frac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}} = \frac{6}{15-6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\cos \angle = \frac{3}{3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{15-6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$9 = 4R^2 - 4R \cdot \frac{4R}{5}$

$45 = 20R^2 - 16R^2$

$45 = 4R^2$ $\quad R = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{EB} \Leftrightarrow EB = \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

$AD^2 = 9 + 45 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$

$5\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

$34y^2 + 13x + 10y - 26 = 0$ $\quad = 9 + 45 - 30 = 24$

$x =$

$AD = 2\sqrt{6}$ $\quad \sin\beta = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} = 5\sqrt{5}$

$\frac{\sqrt{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1}}{2}$

$AC = \sqrt{24 - 4} = 2\sqrt{5}$

$S_{CEB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

$\begin{cases} x^2 - 12xy + y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$\frac{\sqrt{ab(a+b-c)(a+b+c)}}{a+b}$

$1 = \frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right)}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 1}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$(y^2 - 10y + 26)(y^2 - 10y + 26) + 2y^2 - 12(y^2 - 10y + 26) - 4y + 20 = 0$

$16MN^2 = \frac{2a^2(9a^2 - 9AN^2)}{9AN^2} = \frac{2a^2(a^2 - AN^2)}{AN^2}$

$\frac{4MN}{~~16MN^2~~} = ~~2a^2~~$ $\quad \frac{\sqrt{a \cdot 2a(3a + 3AN)(3a - 3AN)}}{3AN} = \frac{\sqrt{2a^2(9a^2 - 9AN^2)}}{3AN}$

$8MN^2 \cdot AN^2 = 2a^2(a^2 - AN^2) = 2a^2(a^2 - a^2 + 8MN^2) = 2a^2 \cdot 8MN^2$

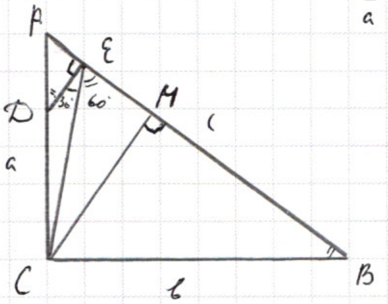
$AN^2 = 2a^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\frac{b}{a} - ?$

$\frac{\frac{1}{3}a}{c} = \frac{DE}{b} = \frac{AE}{a}$ $\quad DE = \frac{ab}{3c}$ $\quad \frac{a^4}{9} - \frac{a^2b^2}{9c^2} = \frac{a^2(c^2-b^2)}{9c^2} = \frac{a^4}{9c^2}$

$AE = \frac{a^2}{3c}$

$\frac{a}{c} = \frac{\frac{ab}{c}}{b} = \frac{AH}{a}$ $\quad AH = \frac{a^2}{3c}$

$EH = \frac{2c^2}{c}$

$tg\,60^\circ = \sqrt{3} = \frac{CH}{EH} = \frac{\frac{ab}{c}}{\frac{2c^2}{c}} = \frac{ab}{2a^2} = \frac{b}{2a}$ $\quad \frac{b}{a} = 2\sqrt{3}$

$b = 2\sqrt{3}\cdot a$

$ED = \frac{2\sqrt{3}\cdot a^2}{3a\sqrt{3}} = \frac{a\cdot 2\sqrt{35}}{39}$ $\quad c = \sqrt{12a^2 + a^2} = a\sqrt{13}$

$\sin \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{a\cdot 2\sqrt{35}}{39}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{a^2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{39} = \frac{14\sqrt{3}}{117}$ $\quad \cos\angle BAC = \frac{1}{\sqrt{13}}$

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$

$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x = 6$

$x^2 + 36y^2 - 34y^2 + x - 13x + 6y - 10y = -20$

$13xy + 6 = 34y^2 + 13x + 10y - 20$

$x = \frac{34y^2 + 10y - 26}{13(y-1)}$

$\frac{(34y^2+10y-26)^2}{169(y-1)^2} + 2y^2 - \frac{12(34y^2+10y-26)}{13(y-1)} - 4y + 20 = 0$

$156\cdot$

$(34y^2+10y-26)^2 + 338(y-1)^2y^2 - (34y^2+10y-26)\cdot(y-1)$

$(x^2-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

$(x^2-6)^2 + 2(y-1)^2 - 16 - 2 = 0$

$(x-10)(x-2) + 2(y-2)y = 0$

$x - 6 = 0$

$x^2 - 12x + 28 = 0$

$(8-a)x - b \le 0$

$8 - 6|2x-1| \le ax + b$

$6|2x-1| \ge (8-a)x - b$

$2b - 2(8-a)x \ge 0$

$\left[\begin{array}{l} |2x - 1 \ge (8-a)x - b \\ |2x - 1 \le b - (8-a)x \end{array}\right.$

$b - (8-a)x \ge 2x - 1$

$8x^2 + (6+a)x + b - 7 \le 0$

$D = 36 + 12a + a^2 - 32b + 224 = 260 + 12a + a^2 - 32b < 0$

$a^2 = AM^2 + 8MH^2$

$S_{ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{(2a+c)c\cdot c\cdot(2a-c)} = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2} = 4S = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 3HM\cdot\sqrt{AM^2 - HM^2}$

$\frac{9AM^2}{16}\cdot(4a^2 - 9AM^2) = 4\cdot 9HM^2\cdot(AM^2 - HM^2)$

$4a^2AM^2 - 9AM^4 = 64AM^2HM^2 - 64HM^4$

$4AM^4 + 32AM^2MH^2 - 9AM^4 = 64AM^2HM^2 - 64HM^4$

$64HM^4 - 32AM^2HM^2 - 5AM^4 = 0$

$(8HM^2 - 2AM^2)^2 = 9AM^2$

$8HM^2 = 5AM^2$

$\cancel{AM^2 = \frac{8}{5}}HM$

a^2

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

a, b, c, x - члены геометрической прогрессии, $b = qa$, $c = q^2a$, $x = q^3a$ $(*)$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$ax^2 - 2qax + q^2a = 0 \,/ : a$, т.к. a - член геометрической прогрессии

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x-q)^2 = 0$

$x - q = 0$

$x = q \overset{(*)}{=} q^3a = q \cdot c$. Т.к. $q \neq 0$ $c = 1$

Ответ: третий член прогрессии равен 1

№ 4

Дано:

$\triangle ABC$ - прям, $BC = b$, $AC = a$, $AB = c$

$D \in AC$, $AD : AC = 1 : 3$

$E \in AB$

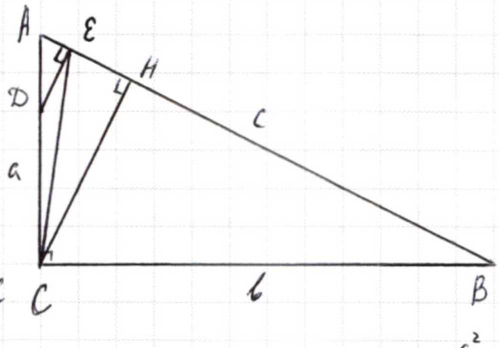
$DE \perp AB$

$\angle CED = 30^\circ$

а) Найти: $tg \angle BAC$

б) $AC = \sqrt{7} = a$

Найти: S_{CED}



Решение

а) 1) CH - высота $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ - прям (усл) $\Rightarrow CH = \frac{ab}{c}$

2) $\triangle ADE \sim \triangle CAH$ (по 2м углам) $\Rightarrow$

1) $\angle AED = \angle AHC = 90^\circ$

2) $\angle A$ - общий

$\Rightarrow \frac{AE}{AH} = \frac{DE}{CH} = \frac{DE}{\frac{ab}{c}} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow DE = \frac{ab}{3c}$

3) $\triangle ADE$ - прям (т.к. $DE \perp AB$ усл) $\Rightarrow$ по т. Пифагора

$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2b^2}{9c^2}} = \frac{a}{3c} \cdot \sqrt{\underbrace{c^2 - b^2}_{= a^2 \text{, т.к. } \triangle ABC \text{ - прям}}} = \frac{a}{3c} \cdot \sqrt{a^2} = \frac{a^2}{3c}$

4) из п 2 и 3 $\Rightarrow AH = 3AE = 3 \cdot \frac{a^2}{3c} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow EH = \frac{2a^2}{3c}$

5) $\angle DEH = 90^\circ$ (т.к. $DE \perp AB$) $= \angle CED + \angle CEH = 30^\circ + \angle CEH \Rightarrow \angle CEH = 60^\circ$ (усл)

6) из п. 1, 4, 5 $\Rightarrow tg \angle CEH = tg\, 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{CH}{EH} = \frac{\frac{ab}{c}}{\frac{2a^2}{3c}} = \frac{3b}{2a}$

7) $tg \angle BAC = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3b}{2a} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $tg \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

продолжение на следующей странице

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

§4 (продолжение)

8) $\angle CEH = 60^\circ$ (п. 5) $\Rightarrow EC = \frac{EH}{\cos 60^\circ} = 2EH = \frac{4a^2}{c}$

9) $c = \sqrt{a^2+b^2}$ (т.к. $\triangle ABC$ - прям, т. Пифагора)
$b = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$ (п. 7) $\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + \frac{4}{3}a^2} = \sqrt{a^2 \cdot \frac{7}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

10) из п. 8 и 9 $\Rightarrow EC = \frac{4a^2}{\frac{a\sqrt{21}}{3}} = \frac{4a \cdot 3\sqrt{21}}{21} = \frac{a \cdot 4\sqrt{21}}{7}$

11) $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot EC \cdot \sin\angle CED = \frac{ab}{3c} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot 4\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}a}{3 \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot 4\sqrt{21}}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot a^2}{21} = \frac{2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{7})^2}{21} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 7}{21} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $S_{ECD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

§5

Дано

$\Omega(O_1; R)$ и $\omega(O_2; r)$ кас. внутр. образом в т. A

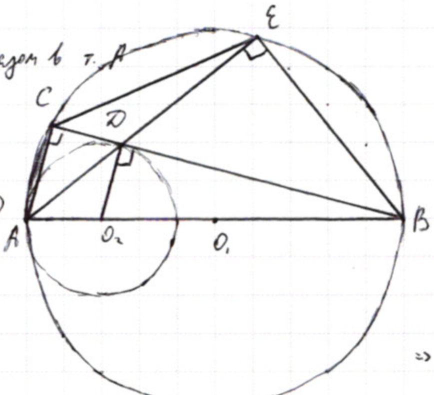
AB - диаметр Ω

BC - хорда Ω, BC кас ω в т. D

$AD \cap \Omega = E$

$CD = 2$, $BD = 3$

Найти: R, r, S_{BACE}



Решение

1) Ω: $\angle ACD$, $\angle AEB$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle ACD = \angle AEB = 90^\circ$

2) $\triangle BDO_2 \sim \triangle ABC$ (по 2м углам)
$\angle ABC$ - общий
$\angle O_2DB = \angle ACB = 90^\circ$ (п. 1 + усл)

$\Rightarrow \frac{O_2B}{AB} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BD+DC} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow 10R - 5r = 6R \Rightarrow r = \frac{4R}{5}$

3) $\triangle BDO_2$ - прям (т.к. $O_2D \perp BD$, т.к. BD - кас) $\Rightarrow$ по т. Пифагора $O_2B^2 = (2R-r)^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2 = BD^2 + O_2D^2 =$
$= 9 + r^2 \Rightarrow 4R^2 - 4Rr = 4R^2 - 4R \cdot \frac{4}{5}R = \frac{4R^2}{5} = 9 \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

4) $\triangle ABC$ - прям ($\angle ACB = 90^\circ$ (п. 1)) $\Rightarrow$ по т. Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2} = \sqrt{4R^2 - (CD+BD)^2} = \sqrt{45 - 25} = 2\sqrt{5}$

5) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 = 5\sqrt{5}$

6) $\triangle CAD \sim \triangle DEB$ (по 2м углам) $\Rightarrow$ $\angle EBC = \angle CAD$, $\frac{AC}{EB} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow EB = \frac{AC \cdot BD}{AD} = \frac{AC \cdot BD}{\sqrt{AC^2 + CD^2}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 3}{\sqrt{20+4}} =$
$\angle CDA = \angle EDB$ (как верт.)
$\angle ACD = \angle AEB = 90^\circ$ (п. 1)

$= \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

7) из п. 6 $\sin\angle EBC = \sin\angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

8) $S_{CEB} = \frac{1}{2} CB \cdot EB \cdot \sin\angle CBE = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{30}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

9) $S_{BACE} = S_{ABC} + S_{CEB} = 5\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

Дано:

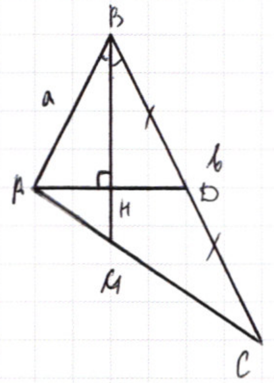
$\triangle ABC$, $a, b, c \in \mathbb{N}$

AD - мед

BM - бисс

$P = a + b + c = 900$

Найти: количество тр-ков



Решение:

1) AH - бисс $\triangle ABD$ (усл), AH - выс $\triangle ABD$ (усл) $\Rightarrow$ (признак) $\triangle ABD$ - р/б $\Rightarrow AB = BD$

2) из п 1 $\Rightarrow$ AD - мед (усл) $\Rightarrow CD = BD = AB = a \Rightarrow BC = b = 2a$

3) $\triangle ABD$ - р/б (п. 1) $\Rightarrow S_{ABH} = S_{BHD} = S$; $S_{AMH} = S_1$; $S_{HMCD} = S_2$

4) т.к. AD - мед $2S = S_1 + S_2$

5) т.к. BM - бисс $\frac{a}{AM} = \frac{2a}{MC} \Rightarrow AC = 3AM$

6) $\frac{S+S_1}{S+S_2} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2S + 2S_1 = S_1 + S_2 \Rightarrow 3S_1 + S_2 = S + S_2 \Rightarrow S = 3S_1 \Rightarrow \frac{MH}{BH} = \frac{1}{3}$

7) по т. Пифагора $AH^2 = a^2 - BH^2 = a^2 - 9MH^2 = AM^2 - MH^2 \Rightarrow a^2 = AM^2 + 8MH^2 \Rightarrow A$

8) $BM^2 = 16MH^2 = \frac{a \cdot 2a(a+2a+3AM)(a+2a-3AM)}{(a+2a)^2} = \frac{2a^2(9a^2 - 9AM^2)}{9a^2} = 2a^2 - 2AM^2$

9) $3a + 3AM = 900 \Rightarrow AM = 300 - a \Rightarrow a^2 = 90000 - 600a + a^2 + 8MH^2 \Rightarrow a = 150 + \frac{MH^2}{75} \Rightarrow MH^2 = 75a - 11250$

~~$\Rightarrow a^2 = AM^2$~~

10) $\begin{cases} a < 2a + c \\ 2a < a + c \\ c < 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < c \\ c < 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a < 900 \\ 2c < 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 225 \\ c < 450 \\ a < c \\ c < 3a \end{cases} \Rightarrow \frac{450}{2} - 225 - \frac{450}{3} = 75$ треугольников

Ответ: 75 треугольников

№ 7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(1) = f(y) + f(\frac{1}{y}) = f(1) + f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0 = f(y) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

при

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)