МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$b_1 = a \quad b_2 = b_1 q \quad b_1 q^2 = c \quad x = b_1 \cdot q^3$

$b_1 x^2 + 2b_1 q x + b_1 q^2 = 0 \qquad b_1 \neq 0$

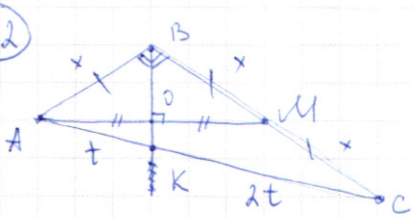
$x^2 + 2qx + q^2 = 0$

$(x+q)^2 = 0 \quad x = -q \qquad q \neq 0$

$b_1 q^3 = -q \quad b_1 q^2 = -1 \quad c = -1$

Ответ: -1

№2



Т.к. BO – высота и бис. в $\triangle ABM \Rightarrow \triangle ABM$ равнобедренный $\Rightarrow BM = BA = MC$ (т.к. AM – мед.)

т.к. BK – бис. $\Rightarrow \frac{BA}{AK} = \frac{BC}{KC} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}$

$3x + 3t = 1200 \Rightarrow x + t = 400 \Rightarrow t = 400 - x$. По неравенству треуг.

$\begin{cases} x < 2x + 3t \\ 2x < x + 3t \\ 3t < 3x \end{cases}$ $\quad x < 3t$, $t < x$ $\quad t < x < 3t \quad t < 400 - t < 3t \quad \begin{cases} 2t < 400 \\ 4t > 400 \end{cases} \quad t < 200, \; t > 100$

$t \in \{101, \ldots, 199\} \Rightarrow 99$ треугольников

Ответ: 99

№3

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{cases}$

Пусть $a = x - 1$; $b = y - 2$, тогда $x = a + 1 \quad y = b + 2$,

$y - 2x = b - 2a$.

$$\begin{cases} (1)\ b - 2a = \sqrt{ab} \quad b \geq 2a \\ (2)\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases}$$

(1) $b - 2a = \sqrt{ab}$ $\qquad D = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$

$b^2 - 4ab + 4a^2 = ab$ $\qquad b = \dfrac{5a \pm 3a}{2} \to a,\ 4a$

$b^2 - 5ab + 4a^2 = 0$

1 случай $b = a$, $a \geq 2a$, если $a \leq 0$

$2a^2 + a^2 = 3$

$3a^2 = 3$

$a = \pm 1$, т.к. $a \leq 0$ $\quad a = -1 \quad b = -1 \Rightarrow x = 0 \quad y = 1$

2 случай $b = 4a \quad b \geq 2a \quad 4a \geq 2a$, $a \geq 0$

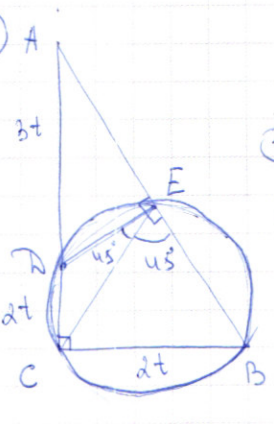
$2a^2 + 16a^2 = 3$

$18a^2 = 3$

$a^2 = 1/6$, но $a \geq 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \quad b = 4/\sqrt{6} \Rightarrow x = 1/\sqrt{6} + 1 \quad y = 1/\sqrt{6} + 2$

Ответ: $(0; 1)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}} + 1;\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} + 2\right)$

№4



Решение: т.к. $\angle BED$ и $\angle ACB = 90°$ и в сумме $180° \Rightarrow$
$\Rightarrow$ CDEB можно вписать в окружность. Т.к. $\angle DEC =$
$= \angle CEB = 45°$, то $DC = CB$. а) $tg\, BAC = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2t}{5t} = 2/5$

б) $AC = \sqrt{29}$, $5t = \sqrt{29}$, $t = \frac{1}{5}\sqrt{29}$; $\triangle AED$ − п/у,
$\angle AED = 90°$. $tg\, BAC = \dfrac{DE}{AE} = 2/5$; $DE = 2x$; $AE = 5x$

$AD = 3/5\sqrt{29}$; $\quad 9/25 \cdot 29 = 25x^2 + 4x^2 \Rightarrow x^2 = 9/25 \Rightarrow x = 3/5$

$AE = 3$; $DE = 6/5$; $DC = 2t$. $\triangle CED$: $\angle CED = 45°$ по т. косинусов

$DC^2 = DE^2 + CE^2 - 2 \cdot DE \cdot CE \cdot \cos CED$. Пусть $CE = y$

$\dfrac{29 \cdot 4}{25} = 1{,}44 + y^2 - 2 \cdot 1{,}2 \cdot y \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y^2 - 1{,}2y\sqrt{2} - 3{,}2 = 0$

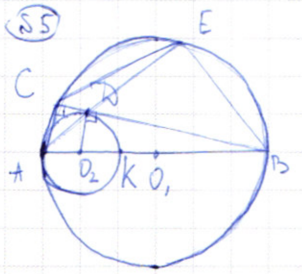
$D = 2{,}88 + 12{,}8 = 15{,}68 = 7{,}84 \cdot 2 \qquad y = \dfrac{1{,}2\sqrt{2} + 2{,}8\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,2$

Ответ: а) $2/5 = tg BAC$ б) $S_{CED} = 1,2$

№5



$CD = 1$, $BD = 3$

$O_1B = O_1A = R$; $O_2A = O_2K = r$; $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$

$(\angle BDO_2$ и $\angle BCA = 90°$; $\angle B$ – общий$) \Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC}$.

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow 6R = 8R - 4r \Rightarrow 4r = 2R \Rightarrow 2r = R$, т.о. $K = O_1$

по свойству касательной и секущей $BD^2 = BK \cdot BA$; $3^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$9 = 4r \cdot (4r - 2r) = 8r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin ADC$; $\frac{AE}{DO_2} = 4/3 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

$\triangle ACD$: $AD = \sqrt{1^2 + 2} = \sqrt{3}$; $\sin ADC = \sqrt{\frac{2}{3}}$

по свойству хорд $BD \cdot DC = AD \cdot DE$ $\quad 3 \cdot 1 = \sqrt{3} \cdot DE \Rightarrow DE = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$AE = 2\sqrt{3}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$; $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$; $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$

5б

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$ $\quad [-1/4;\ 3/2]$

$y = 2x^2 - x - 1$

$x_в = 1/4 \qquad y_в = -9/8$

x	$-1/4$	0	$3/2$
y	$-5/8$	-1	2

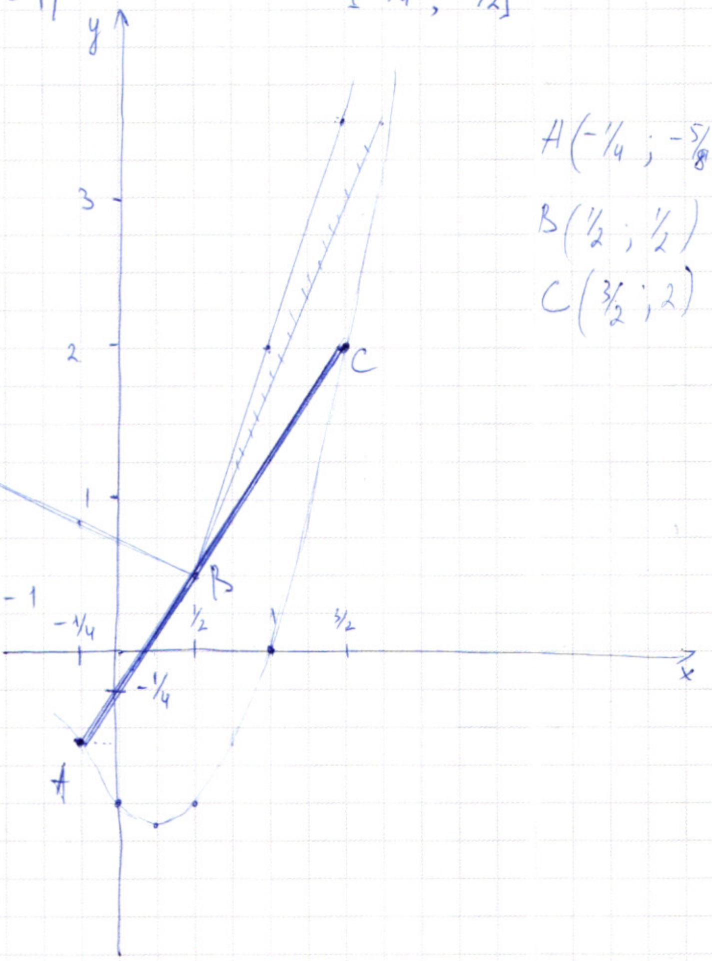
$y = x + |2x-1|$

$x \le 1/2 \qquad y = x - 2x + 1 = 1 - x$

$x > 1/2 \qquad y = x + 2x - 1 = 3x - 1$

x	$-1/4$	$1/2$
y	$5/4$	$1/2$

x	$1/2$	$3/2$
y	$1/2$	$7/2$



$A(-1/4;\ -5/8)$

$B(1/2;\ 1/2)$

$C(3/2;\ 2)$

Составим уравнение AC:

$y = ax + b \qquad \begin{cases} -5/8 = a\cdot(-1/4) + b \\ 2 = a\cdot(3/2) + b \end{cases} \Rightarrow 2\frac{5}{8} = \frac{7}{4}\cdot a \Rightarrow a = \frac{21}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{3}{2}$

$b = 2 - 9/4 = -1/4$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ – прямая AC

точка $B \in$ прямой AC, т.к. $1/2 = 3/2 \cdot 1/2 - 1/4$; $\quad 0 = 0$

прямая $y = ax + b$ должна быть не выше $y = x + |2x+1|$ и не ниже $y = 2x^2 - x - 1$

Ответ: $a = 3/2$; $b = -1/4$.

(5.7) т.к. $f(ab) = f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, то $f(1 \cdot 1) =$

$f(1) + f(1) = 2f(1)$, $f(1) = 0$.

$f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$ $\quad f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

1 $a = b_1$ $b = b_2$ $c = b_3$ $b_4 =$ корням $ax^2 + 2bx + c = 0$

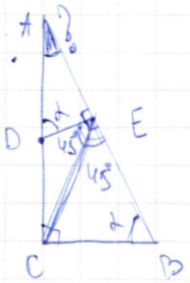
$b_2 = b_1 \cdot q$ $b_3 = b_1 q^2$ $c - ?$ $b_4 = b_1 \cdot q^3$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac = 4 \cdot (b^2 - ac)$

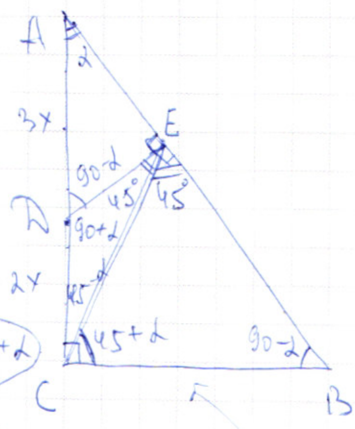
$x = \dfrac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

1



$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ $\angle CED = 45°$

$tg\,\angle BAC - ? = \frac{BC}{AC} - ?$



EC – бисс. $\angle BED$:

$180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$

$180° - 45° - 90° - \alpha = 45 - \alpha$

CDEB – можно вписать в окр. (DB-диам) $90° - 45° + \alpha = 45° + \alpha$

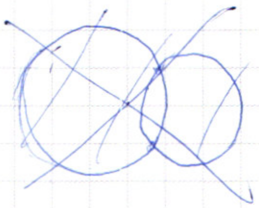
$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ $(k = 3/5)$

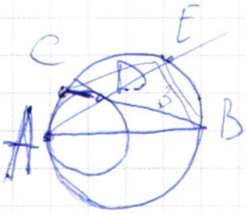
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



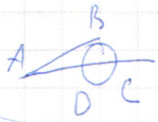


r, R — ?

S_{BACE} — ?

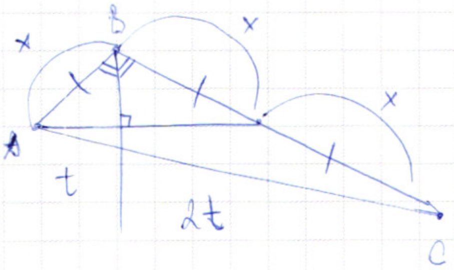
$CD = 1$, $BD = 3$

$$AB^2 = AD \cdot AC = 3 \cdot 4 \Rightarrow \sqrt{12} = AB$$



$AB = \sqrt{12} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{12}}{2}$

S_{BACE} — ?



$P = 1200$

$3x + 3t = 1200$

$x + t = 400 \Rightarrow t = 400 - x$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

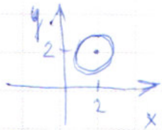
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3



$$\begin{cases} (1)\ y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ (2)\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \rightarrow$$

(2) $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$(y-2)^2+2x^2-4x-1=0$

$(y-2)^2+(\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2})^2-3=0$

$(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2 = 2x^2-4x+2 = 2\cdot(x^2-2x+1)$

$$\boxed{(y-2)^2+2\cdot(x-1)^2=3}$$

уравнение окружности с $O(+2;2)$ и $R=\sqrt{3}$

(1) $y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y^2-4x+4x^2 = xy-2x-y+2$

$y^2+y-xy-4x+4x^2+2x-2=0$

$$\boxed{y^2+y-xy-2x+4x^2-2=0}$$

относительно x^2:

$4x^2-x\cdot(y+2)+y^2+y-2=0$

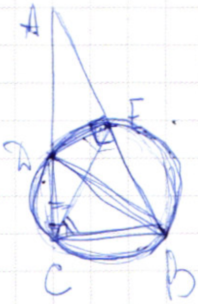
$D=(y+2)^2-4\cdot4\cdot(y^2+y-2)=y^2+4y+4-16y^2-16y+32=-15y^2-12y+36=-3(5y^2+4y-12)<0\Rightarrow\varnothing.$

☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)



$DC = CB$ (равные дуги)

$\triangle$

$3 \cdot DE = 5 \cdot CB$

③ $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 + y^2 + y - xy - 2x - 2 + 4x^2 = 0$

$(1+2)$

$6x^2 + 2y^2 - 6x - 3y - xy + 1 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)