

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 13xy + 36y^2 - 6y + x - 6 = 0$$

~~$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$~~

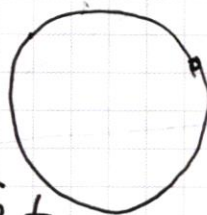
~~$$(x-6)^2$$~~ 
$$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) - 18 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$\approx 2y^2 - 4y + 2 \quad y^2 - 4$$

$$x^2 + 2y^2 = R^2$$

~~$$x^2 - 13xy + 36y^2$$~~



$$t = \sqrt{2}y$$

$$x^2 - \frac{13}{\sqrt{2}}xt + 18t^2 + 3\sqrt{2}t + x - 6 = 0$$

$$x^2 + t^2 = R^2$$

$$169 - 72 = 97$$

$$(x-y)^2 + y^2 = R^2$$

$$72 - 39 = 33$$

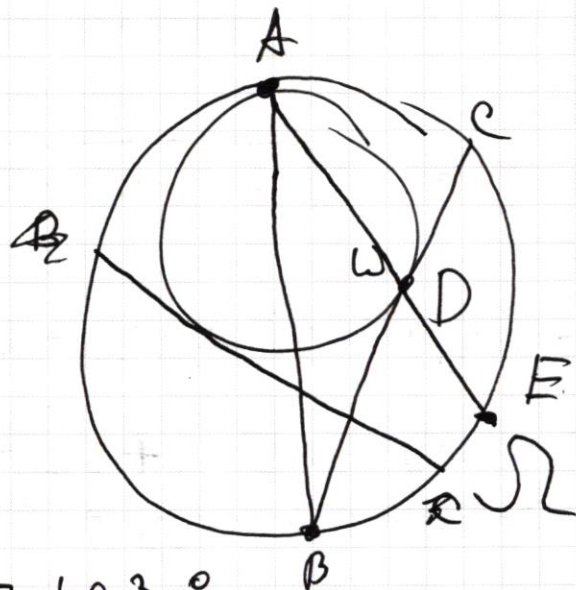
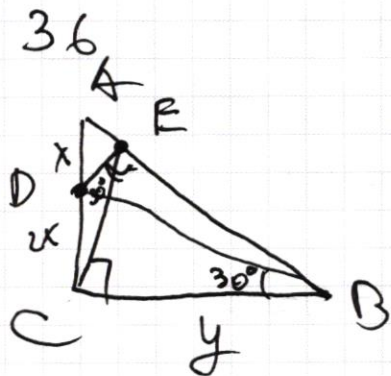
~~$$18t^2 + t \cdot (3\sqrt{2} - \frac{13}{\sqrt{2}}x) + x^2 + x - 6 = 0$$~~

$$\begin{array}{r} 15 \\ + 13 \\ \hline 39 \end{array} \quad 130$$



$$18t^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{2}} - \frac{13}{\sqrt{2}}x\right)t + x^2 + x - 6 = 0.$$

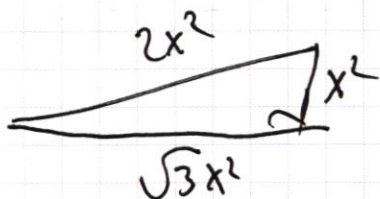
$$-\frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{13x}{\sqrt{2}} -$$



$$\frac{2x}{y} = \operatorname{tg} 30^\circ$$

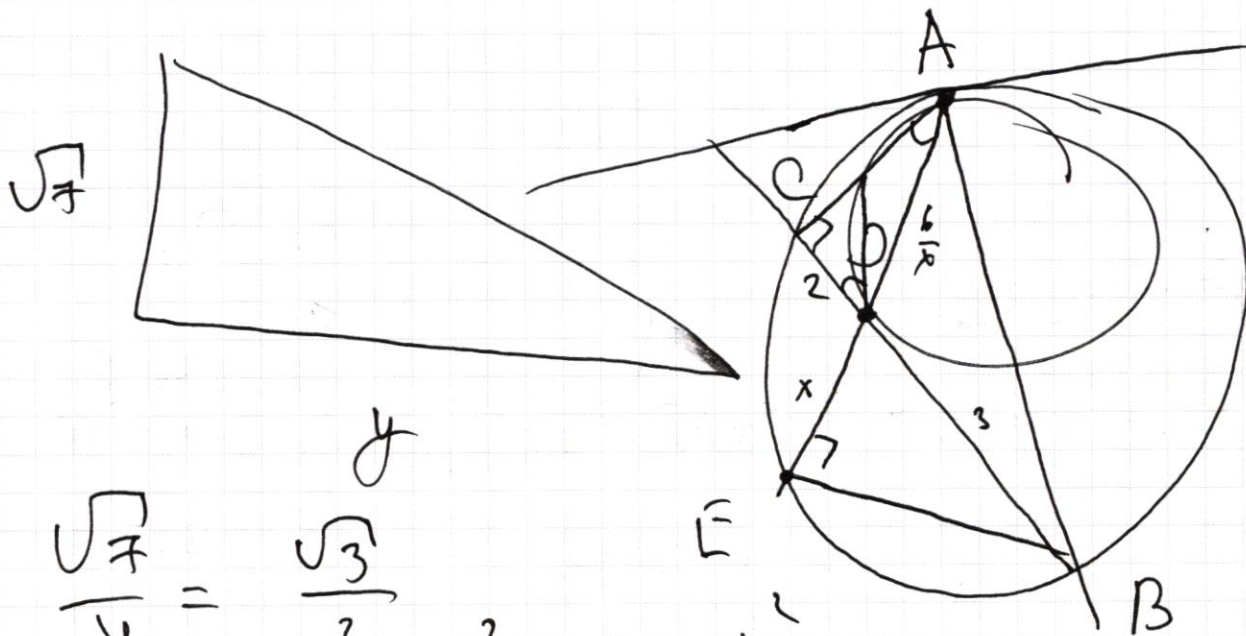
$$CP=2$$

$$BP=3.$$



$$\frac{3x}{y} = 1,5 \operatorname{tg} 30^\circ.$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



$$\frac{\sqrt{7}}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$D^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^2 - x^2$$

$$D^2 - 5^2 = \frac{36}{x^2} - 2^2.$$

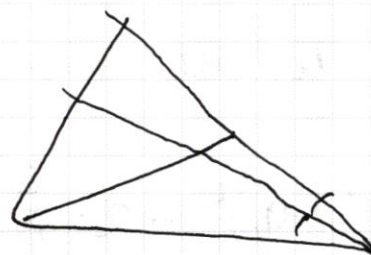
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, b, c$

$a, aq, aq^2$  }  $aq^3$

$\frac{c}{a^2}, \frac{c}{a}, c, cq$

$$\frac{900}{4} = 225$$



$$x = cq$$

$$\frac{c}{a^2} \cdot (cq)^2 - 2 \frac{c}{a} \cdot c + c = 0$$

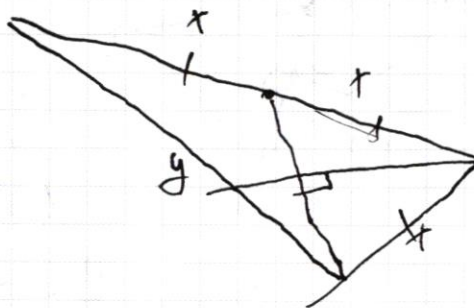
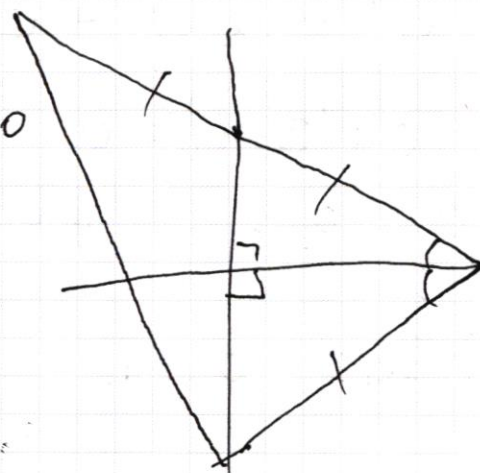
$$c^3 - 2c^2 + c = 0$$

$$c(c-1)^2 = 0$$

$$c = 1.$$

$2; 1$

$x$



№1.

$a, b, c, d$  - член прогрессия  $d$  -  $n$ -й член.

$q$  - ее знаменатель

$$a = \frac{c}{q^2}; b = \frac{c}{q} \quad c = c \quad d = cq$$

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$d$  - корень  $\rightarrow$  подставим его

$$\frac{c}{q^2} \cdot (cq)^2 - 2 \cdot \frac{c}{q} (c \cdot q) + c = 0$$

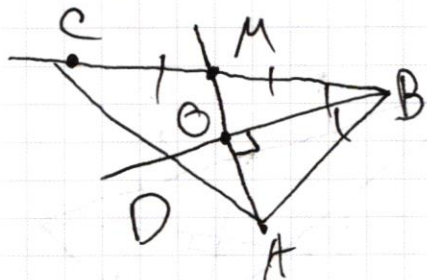
$$c^3 - 2c^2 + c = 0$$

$$c(c-1)^2 = 0$$

$c = 0; 1$  при  $c=0$  член прогрессия - конст.

Ответ:  $0; 1$ .

№2.



$B \in AB \in CE$

$AM$  - мед.,  $BD$  - бис-са

$AM \perp BD$ .

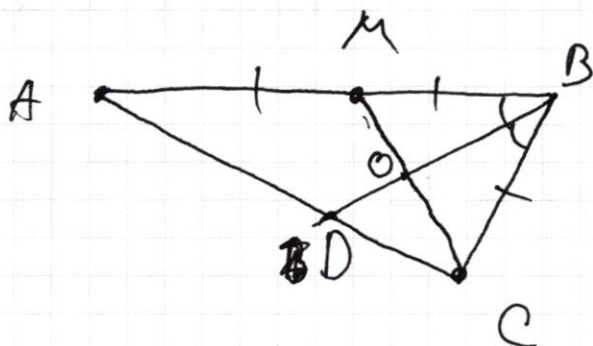
$BD$  - бис-са и вые

$$\angle M \angle BA \Rightarrow MB = AB \Rightarrow CB = 2AB$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь докажем, что если в  $\Delta$  есть одна сторона в 2 раза больше другой, то условие  $\perp$  бис-сы и медианы выполняются

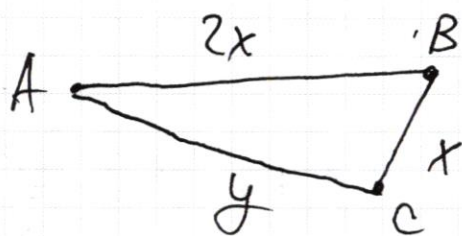


CM - мед, BD - бис-са, BO - бис-са

в  $\triangle BOA$   $\angle O$  к основанию  $\Rightarrow$  она явл высотой

$\Rightarrow BO \perp MC$  Значит  $\perp$  мед и ~~б~~

бис-сы ~~выполн.~~  $\Leftrightarrow$  то, что одна сторона в 2 раза больше другой.



По перв-ву  $\Delta$

$$\begin{cases} 2x + x \geq y \\ x + y \geq 2x \\ 2x + y \geq x \end{cases} - \text{выполн. авт.}$$

необх и дост. условия для суц.  $\Delta$ .

$$\begin{cases} 3x \geq y \\ y \geq x \\ 3x + y = 900 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x \geq 900 - 3x \\ 900 - 3x \geq x \end{cases} \quad \begin{cases} 6x \geq 900 \\ 4x \leq 900 \end{cases}$$

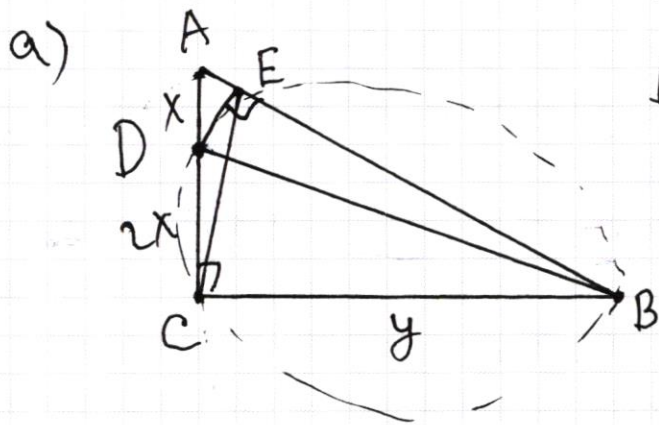
$$y = 900 - 3x \quad \begin{cases} x \geq 150 \\ x \leq 225 \end{cases}$$

Причем для каждого такого  $x$  существует  
и одна <sup>все</sup> размытая

$$\text{Кол-во} = 225 - 150 + 1 = 76$$

Ответ: 76.

~~нч.~~ нч.



В четырехугольнике BEDC

$\angle E + \angle C = 180^\circ \Rightarrow$  он  
вписанный.

$$\angle CBE = \angle DEC = 30^\circ$$

Т.к. опираются на  
одну дугу.

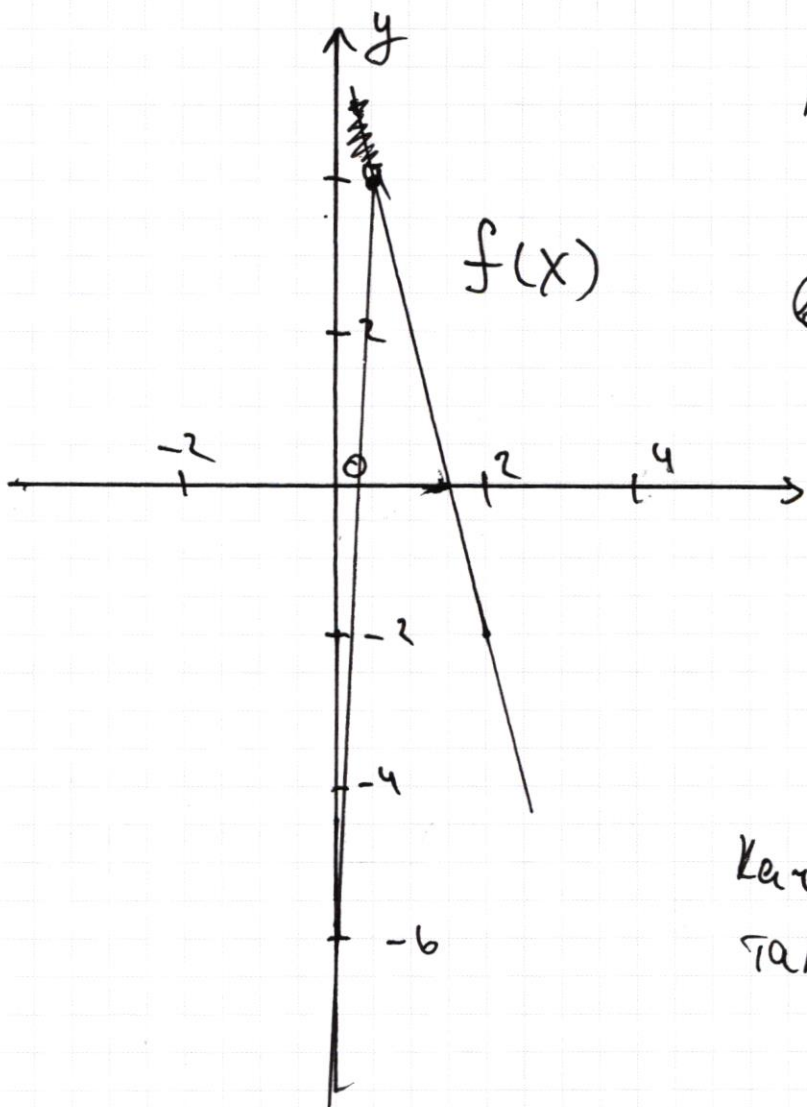
$$\frac{2x}{y} = \operatorname{tg} \angle DBC = \operatorname{tg} 30^\circ$$

~~$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{3x}{y} = 1,5 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1,5}{\sqrt{3}}$$~~

Ответ:  $\frac{1,5}{\sqrt{3}}$







$h(x) = -8x^2 + 6x + 7$   
 параболы ветвями  
 вниз с центр вершины  
 в  $\tau \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ .  
 в вершине

$$\begin{aligned}
 h\left(\frac{3}{8}\right) &= -8\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{8} + 7 \\
 &= -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \\
 &= 8\frac{1}{8} \Rightarrow \text{она "над" } f(x)
 \end{aligned}$$

Качественно это выглядит  
 так:



Так как: 1) в вершине значение  
 больше, чем  $f(x)$

~~2)  $h(1) > f(1)$  ( $5 > 2$ )~~

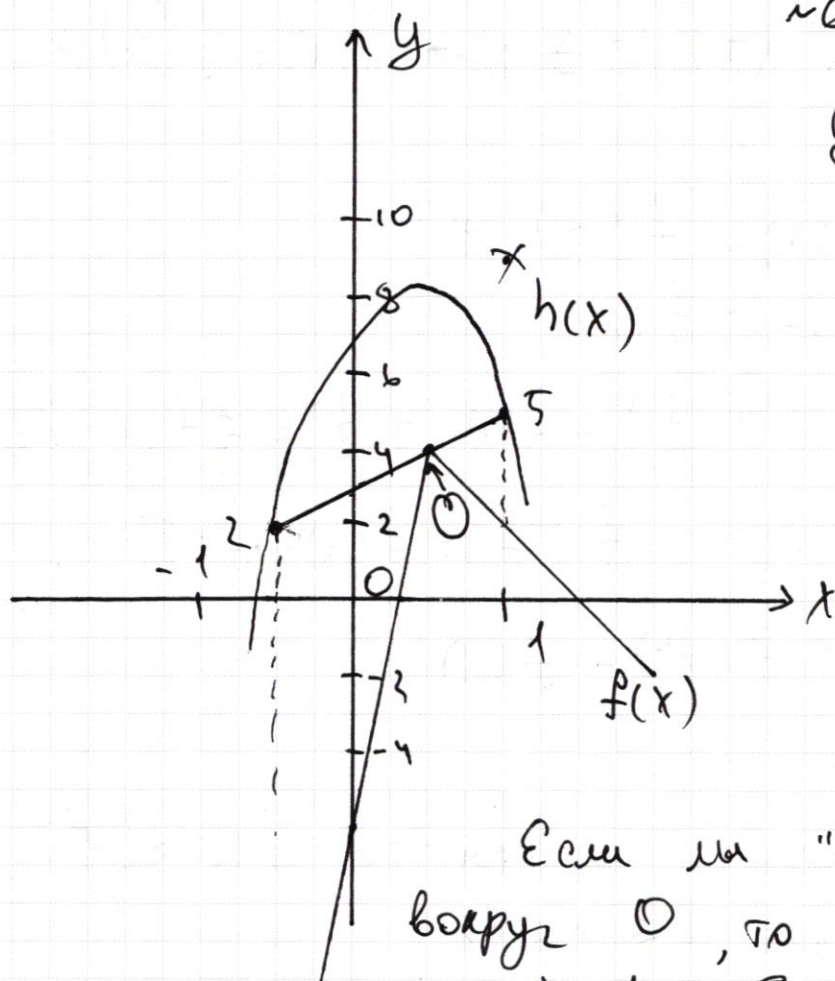
3)  $h\left(-\frac{1}{2}\right) > f\left(-\frac{1}{2}\right)$  ( $2 > -16$ )

$g(x) = ax + b$  — это прямая

Тогда в точке  $x = -\frac{1}{2}$   $g(x) \in [-16; 2]$

~~$g(1) \in [2; 5]$~~

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№6

$g(x)$  должна  
на промежутке

$[-\frac{1}{2}; 1]$  быть  
ниже  $h(x)$  и выше

$\leq h(x)$  и  $\geq f(x)$

Такая прямая единств.

и проходит через

$(-\frac{1}{2}; 2); (\frac{1}{2}; 4); (1; 5)$

Если мы "покрутим" нашу прямую  
вокруг  $O$ , то либо на  $x = -\frac{1}{2}$ ; либо на  
 $x = 1$   $g(x)$  не будет принадлеж.

пунктам отрез. Если мы поднимем отн. т.о.  
прямую, то тоже решений не будет.

$$g(x) = 2x + 3$$

Ответ:  $(2; 3)$ .

№7.

Заметим, что т.к.  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , то  
 $f(abc) = f(ab) + f(c) = f(a) + f(b) + f(c)$



$$f(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n) = f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) \dots + f(a_n)$$

воспользуемся этим

$$f(x) = f(x \cdot x^x \cdot (\frac{1}{x})^x) = f(x) + (x+1) + f(\frac{1}{x}) \cdot x$$

$$-x \cdot f(x) = f(\frac{1}{x}) \cdot x$$

$$f(\frac{1}{x}) = -f(x)$$

Т.е.  $f(\frac{a}{b}) = f(a \cdot \frac{1}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b}) = f(a) - f(b)$

$$f(a \cdot b) = f(a) + f(b) \quad f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b)$$

$$f(x) = f(\frac{x^2}{x}) = f(x^2) - f(x)$$

$$f(x^2) = 2f(x)$$

Пользуясь этими фактами и тем, что  $f(p) = [\frac{p}{2}]$

Получим  $f(x)$  для  $2 \leq x \leq 22$

$$f(2) = 1 \quad f(3) = 1 \quad f(4) = 2 \quad f(5) = 2$$

$$f(6) = 2 \quad f(7) = 3 \quad f(8) = 3 \quad f(9) = 2$$

$$f(10) = 3 \quad f(11) = 5 \quad f(12) = 3 \quad f(13) = 6$$

$$f(14) = 4 \quad f(15) = 3 \quad f(16) = 4 \quad f(17) = 8$$

$$f(18) = 3 \quad f(19) = 9 \quad f(20) = 4 \quad f(21) = 4$$

$$f(22) = 6$$

Теперь мы смотрим на каждое значение  $f(x)$ .

1 - 2 шт

3 - 6 шт

5 - 1 шт

2 - 4 шт

4 - 4 шт

6 - 2 шт



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$7 - \emptyset$      $8 - 1 \text{ шт}$      $9 - 1 \text{ шт}$     ←

Нам нужно, чтобы  $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$  — нужно найти такое кол-во пар.

будем перебирать по  $y$ .

$y=1$      $S_1=0$

$y=2$      $S_2=$

эта зависимость будет  $h(x)$

Теперь заметим, что кол-во пар где  $f(x) < f(y)$

и  $f(x) > f(y)$  равна, т.ч. это по сути одно и то же, мы можем поменять местами  $x$  и  $y$ .

Тогда посчитая общее кол-во пар ~~(с определением порядка)~~

~~(21-20)~~ вычтем пары, где  $f(x) = f(y)$

и разделим наполам, чтобы получить пары только одного вида.

Для опр  $x$  кол-во пар  $f(x) = f(y)$   $\times$   
 $= h(x) \cdot h(x-1)$

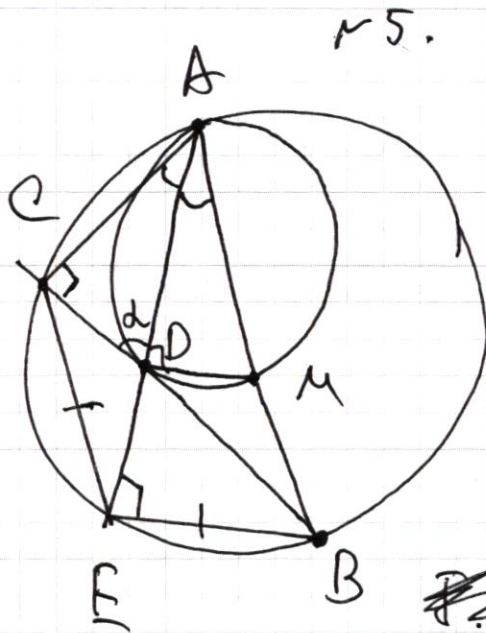
Теперь посчитаем для каждого  $x$ .

1 - 2 пар	4 - 12 пар	7 - 0
2 - 12 пар	5 - 0 пар	8 - 0
3 - 30 пар	6 - <del>2 пар</del>	9 - 0

Сумма пустых пар:  $21 \cdot 20 - 2 - 12 - 30 - 12 - 2$   
 (кол-во) 2

$$= 210 - 1 - 6 - 15 - 6 - 1 = 210 - 15 - 14 = 210 - 29 = 181$$

Ответ: 181 пар.



По лемме Архимеда  
 AD - бис.  $\angle CAB$   
 $\Rightarrow \sphericalangle CE = \sphericalangle EB \Rightarrow$   
 $\Rightarrow CE = EB$   
 $CD = 2 \quad DB = 3$

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \text{ - биссектриса}$$

длины сторон в отношении двух сторон.

~~AB = D~~  $AB = D$

$$\frac{AB}{D} = \frac{AC}{DB} = \frac{2}{3} \quad AC = \frac{2}{3} D$$

По Т. Пифагора  $AD^2 = AC^2 + CD^2$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AD = \sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4}$$

Степень точки P отн R:  $CD \cdot DB = 6$ .

$$DE = \frac{6}{AD} = \frac{6}{\sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4}}$$

$$\triangle CDA \sim \triangle EDB \Rightarrow \frac{DE}{CD} = \frac{EB}{AC}$$

$$EB = \frac{DE}{CD} \cdot AC = \frac{3}{\sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4}} \cdot \frac{2}{3}D = \frac{2D}{\sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4}}$$

Т. Пифагора:  $AE^2 + EB^2 = AB^2$

$$\left( \sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4} + \frac{6}{\sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4}} \right)^2 + \frac{4D^2}{\frac{4}{9}D^2 + 4} = D^2$$

$$\frac{4}{9}D^2 + 4 + \frac{36}{\frac{4}{9}D^2 + 4} + 12 + \frac{4D^2}{\frac{4}{9}D^2 + 4} = D^2$$

$$\frac{4}{9}D^2 + 4 = t, \quad D^2 = \frac{9}{4}(t-4) \quad t \geq 4$$



$$t + \frac{36}{t} + 12 + \frac{9(t-4)}{t} = \frac{9}{4}(t-4) \quad t \neq 0.$$

$$t^2 + 36 + 12t + 9(t-4) = \frac{9}{4}t(t-4)$$

$$4t^2 + 144 + 48t + 36(t-4) = 9t(t-4)$$

$$4t^2 + 48t + 36t = 9t^2 - 36t \quad t \neq 0.$$

$$4t + 48 + 36 = 9t - 36$$

$$48 + 72 = 5t$$

$$5 \cdot 24 = 5t$$

$$\boxed{t=24}$$

$$D^2 = \frac{9}{4}(t-4) = \frac{9}{4} \cdot 20 = 45.$$

$$\boxed{D = \sqrt{45}}$$

$$R(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

$$\frac{n(\omega)}{R(\sqrt{2})} = \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AE}$$

, т.к.  $\triangle DAM \sim \triangle EAB$ .

$$\frac{AP}{AE} = \frac{\sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4}}{\sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4} + \frac{6}{\sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4}}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{\frac{4}{9}D^2 + 4}}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{AD}{AE} = \frac{1}{1 + \frac{6}{24}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$r(\omega) = \frac{AD}{AE} \cdot R(\sqrt{2}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{4\sqrt{45}}{10}$$

Пусть ~~угол~~  $\angle CDA = \alpha$ .

Тогда  $S_{\text{BASE}} = \frac{AE \cdot CB}{2} \cdot \sin \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{\frac{2}{3}D}{\sqrt{\frac{4}{9}D^2 + 4}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{45}}{\sqrt{24}}$$

$$S_{\text{BASE}} = \frac{AE \cdot CB}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{(\sqrt{24} + \frac{6}{\sqrt{24}}) \cdot 5}{2} \cdot \frac{2\sqrt{45}}{3\sqrt{24}}$$

$$= \frac{5}{3} \left(1 + \frac{6}{24}\right) \cdot \sqrt{45} = \frac{25}{12} \cdot \sqrt{45}$$

Ответ:  $R(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{45}}{2}$ ;  $r(\omega) = \frac{2}{5} \sqrt{45}$

$$S = \frac{25}{12} \sqrt{45}$$

рз.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x - 6y \geq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0.$$

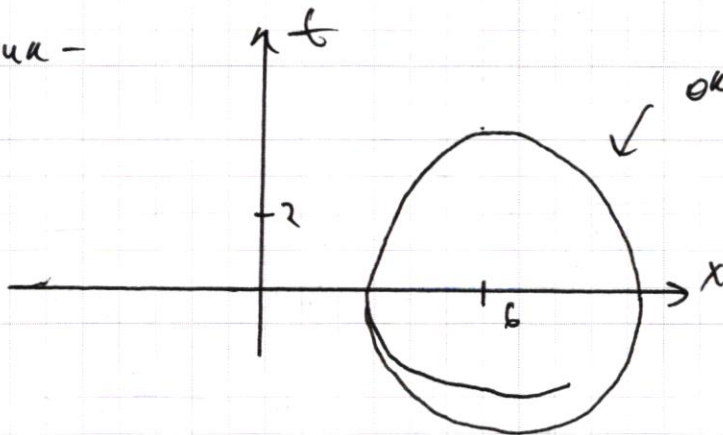
$$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) - 18 = 0.$$

$$(x - 6)^2 + 2(y - 1)^2 = 18.$$

Если ~~мы~~  $\sqrt{2}(y - 1) = t$

$$(x - 6)^2 + t^2 = 18.$$

График -



окр.  $R = \sqrt{18}$   
центр:  $(0, 6)$

$$(x - 6y)^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0.$$

$$2x^2 - 26xy + 72y^2 + 12y + 2x - 12 = 0.$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 26xy + 139y^2) + \cancel{22y^2 + 12y} +$$
$$+ 97y^2 + 12y + \left(\frac{6}{\sqrt{97}}\right)^2 - 13 - \left(\frac{6}{\sqrt{97}}\right)^2 = 0.$$

$$(x+1)^2 + (x+13y)^2 + \left(\sqrt{97}y + \frac{6}{\sqrt{97}}\right)^2 = 13 + \frac{36}{97}$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$D^2 - x^2 - 12 - \frac{36}{x^2} = 9 - x^2$$

$$9x - 6 |2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 1$$

$$2x - 1 \geq 0 \quad 8x - 12x + 6 =$$

$$-8 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{2} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{36}{144}$$

$$-2 - 3 + 7 = 2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; ~~2~~

1 ~~2 3~~

1 2 3 5 6 8 9 10

~~$f(2) = 1$~~     ~~$f(3) = 2$~~     ~~$f(4) = 2$~~     ~~$f(5) = 2$~~     ~~$f(6) = 2$~~

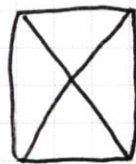
~~$f(7) = 3$~~     ~~$f(8) = 3$~~     ~~$f(9) = 2$~~     ~~$f(10) = 3$~~     ~~$f(11) = 5$~~

~~$f(12) = 3$~~     ~~$f(13) = 6$~~     ~~$f(14) = 4$~~     ~~$f(15) = 3$~~

~~$f(16) = 4$~~     ~~$f(17) = 8$~~     ~~$f(18) = 3$~~     ~~$f(19) = 9$~~     ~~$f(20) = 4$~~   
 ~~$f(21) = 4$~~     ~~$f(22) = 6$~~

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$4 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + 5 \cdot f(2) = f(2)$$



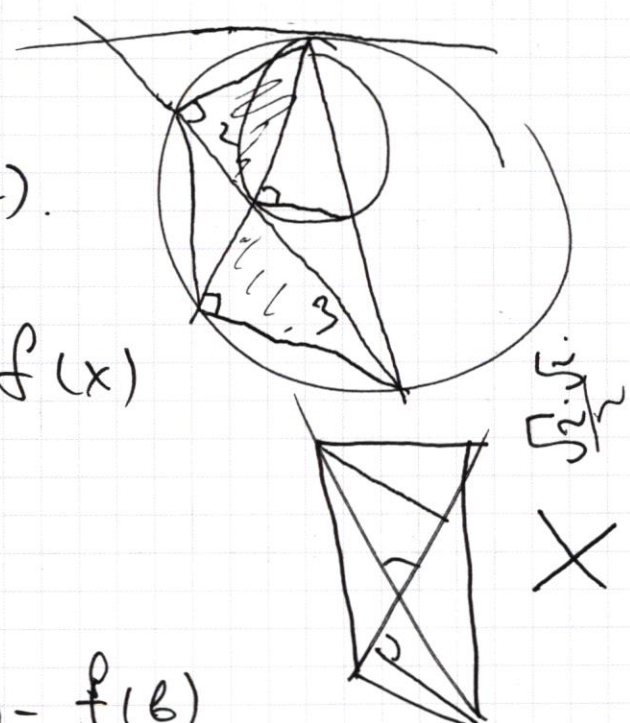
$$4 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = -4f(2)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -f(2)$$

$$x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) + (x+1) \cdot f(x) = f(x)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$



$$\underbrace{2+4+6+4+1+2+2}_{6} \quad \underbrace{\quad}_{10} \quad \underbrace{\quad}_{5}$$

21

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$\uparrow = \vec{r} + \vec{m}$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

