МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(8) $a, b, c; x;$ a, ap, ap^2

$ax^2+2bx+c=0$

$x_1 = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2ap \pm \sqrt{4a^2p^2 - 4a \cdot ap^2}}{2a} =$

$= \frac{-2ap}{2a} = -p$

$a, ap, ap^2, -p$ ap^3

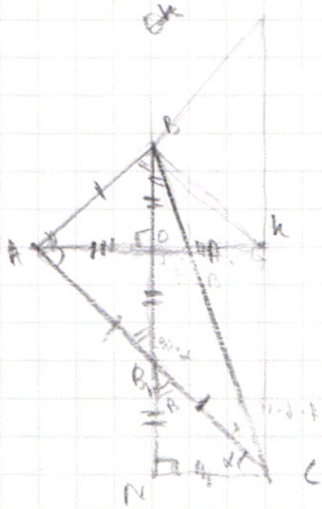
$ap^3 = -p$

$ap^2 = -1$

$k \in AO$

$k \mid Ok = NC \Rightarrow$

$OkNC$ - кв.



$P_{ABC} = 1200$

$\angle AOB = \angle AOB_1$, т.к. смеж. и верт. углы

$\angle BAO = \angle OAB_1$, т.к. бис.

AO - общая

$\angle BOA = 90 = \angle AOB_1$

$\Rightarrow AB = AB_1$

в $\triangle ABB_1$ AO - бис. и высота

$\Rightarrow \triangle ABB_1$ - равнб. с BB_1 основ.

$\Rightarrow \triangle OBA_1 \sim \triangle NBC$ ~~с к~~ $= 1:3$

$\Rightarrow A_1C = 2BA_1$ / $BC = 3BA_1$

$\angle N \mid CN \perp BB_1 \Rightarrow$

$BC = \sqrt{(3B_1N)^2 + (NC)^2}$

$B_1N^2 + NC^2 = B_1C^2$ $3B_1C = x$

$x^2 = B_1N^2 + NC^2$

$BC = \sqrt{x^2 + 2B_1N^2}$

$\triangle AOB_1 = \triangle CNB_1$ 2 стор. и 2 прил. у.

$\angle B_1CN = \angle AOB_1$, т.к. $AO \parallel NC$ накр.

$\angle OB_1A = \angle NB_1C$ т.к. вертик.

$AB_1 = B_1C$ т.к. BB_1 - мед. $\Rightarrow$

$B_1N = OB_1 \Rightarrow$

x В

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$\frac{1}{18} \Rightarrow a^2=1-\frac{2}{18}=\frac{8}{9}=\frac{16}{18}$

$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{18}}-2$

$2x^2-4x+2$

$2(x^2-2x+1)$

$2(x-1)^2$

$\left(\frac{2b^2+1}{5b}\right)^2+2b^2-1=0$

$\frac{4b^4+4b^2+1}{25b^2}+2b^2-1=0$

$(2b^2+1)^2=4b^4+1+4b^2$

$\frac{4b^4+4b^2+1+50b^4-25b^2}{25b^2}=0$

$b=0 \Rightarrow a=\sqrt{a}$ $a=0$

$a^2=1$

$54b^4-21b^2+1=0$

$3\cdot18b^4-18b^2-3b^2+1=0$

$18b^2(3b^2-1)-1(3b^2-1)=0$

$(3b^2-1)(18b^2-1)=0$

$b^2=\frac{1}{3}$ $\quad b^2=\frac{1}{18}$

$a^2=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$ab>0$

$a^2=\frac{1}{3}$ $\quad b^2=\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$x(y-2)-1(y-2)$

$(x-1)(y-2)$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ (y-2)^2+2(x-1)^2-1=0 \end{cases}$$

$y-2x=y-2$

$y^2-4y+2=y^2-2y\cdot2+2=(y-2)^2-1$

$\exists\, a=y-2,\ b=x-1 \Rightarrow$

$y-2x=y-2-2(x-1)=a-2b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-1=0 \end{cases}$$

$a,b\geq0$

$a-2b\geq0$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a^2+2b^2-1=0 \end{cases}$$

$a=\sqrt{ab}+2b$

$a^2+4b^2-4ab=ab$

$a^2+2b^2-1=0$

$$\begin{cases} a^2+4b^2=5ab \\ a^2+2b^2-1=0 \end{cases}$$

$2b^2+1=5ab$ $\quad a=\frac{2b^2+1}{5b}$

$2b^2-5ab+3=0$

$D=(-5a)^2-4\cdot2\cdot3=25a^2-24$

$b=$

$\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$2b^2-1$

$-2b=\sqrt{b}$

$4b^2=b$

$4b=1$ $\quad b=\frac{1}{4}$

$b^2=\frac{1}{2}$ $\quad b=\frac{1}{4}$

$(\frac{1}{4};0)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{3^2+9^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$

$x = B_1N, \quad y = NC$

$\sqrt{x^2+y^2} = BA_1$

$\sqrt{x^2+y^2} = B_1C \Rightarrow BA_1 < B_1C$

$\sqrt{9x^2+y^2} = BC$

$2\sqrt{x^2+y^2} = B_1C$

$2\sqrt{x^2+y^2}$

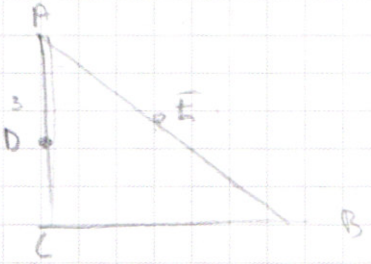
$4x^2+4y$

$BC^2 - B_1C^2 = 9x^2+y^2-4x^2-4y^2 =$
$= 5x^2-3y^2$

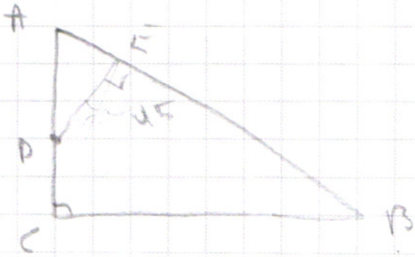
$x+x+x=x$

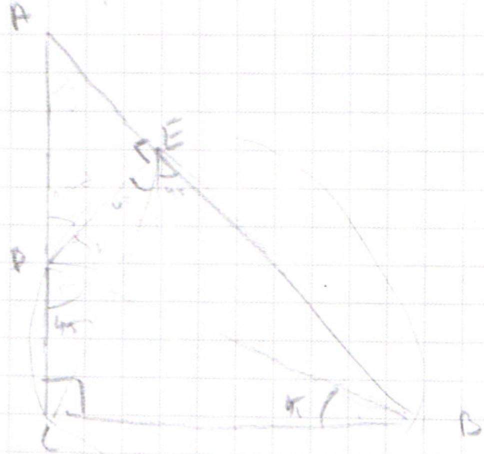
$AD : AC = 3:7$

$AC = \sqrt{29}$



$\angle CED = 45$





$CB = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

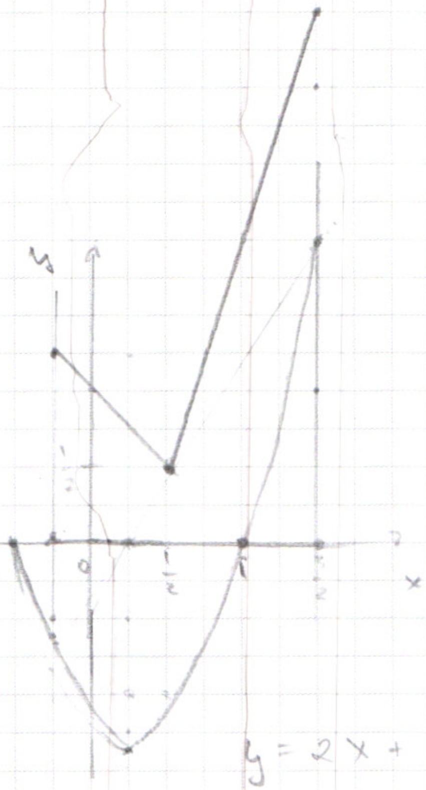
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1| \qquad x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - 2x + x - 1 = 2x(x-1) + 1(x-1) = (2x+1)(x-1)$



$y = 2x + \frac{1}{4}$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{2+4-16}{16} = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$

$f(x) = 2x^2 - x - 1$ – нь функции – уч на

$x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ вер $x = \frac{1}{4}$

$y = -\frac{9}{8}$

$x = \frac{1}{2}$ $\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$

$\frac{2}{4 \cdot 4} - \frac{1}{4} - 1$

$= \frac{2}{16} - \frac{4}{16} - \frac{16}{16}$

$-\frac{18}{16} = -\frac{9}{8} =$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} - \frac{3}{2} - 1$

$x = 3$ $\quad \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3 - 1 =$

$= 2$

$g(x) = x + |2x-1|$

$2x - 1 \ge 0 \Rightarrow$

$2x \ge 1 \quad x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \quad x + 2x - 1 =$

$= 3x - 1$

$x - 2x + 1 =$

$= 1 - x$

$g(x) = 3x - 1$ при $x \ge \frac{1}{2}$

$g(x) = 1 - x$ при $x < \frac{1}{2}$

$k(x) = ax + b \quad k = \frac{3}{2} = 2 \Rightarrow$

$k\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{1}{2}$

$k\left(\frac{3}{2}\right) \ge 2$

$k\left(-\frac{1}{4}\right) \ge -\frac{5}{8}$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = 3,5 \qquad \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3,5$

$g\left(-\frac{1}{4}\right) = 1\frac{1}{4}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{29}}{\frac{29}{5}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\frac{CE}{\sin\angle ABC} = 2r = DB$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$x =$

$y - 1$

$P_{ABC} + P_{BNC} - P_{PB_1C} =$

$= x + x + x + BC + y + y + y + NC + BC -$

$- y - y - x - BC$

$3x + BC + 3y + NC + BC - 2y - x - BC =$

$= BC + 2x + y + NC$

$= 3x + 3y + NC$

$AB + BB_1 + B_1N$

$AB + \cancel{AC} + BC + \cancel{BN} + NC + \cancel{BC}$

$AB_1 \qquad B_1N$

$2x + 2y + NC + x + y =$

$= 3x + 3y + NC$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2 \quad y^2-4y+4+2x^2-4x+2=$

$=(y-2)^2+2(x-1)^2+8$

$\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$2b^2-2ab - 3ab+3=0$

$3-ab=$

$2b(1-a)-3$

$9+4b^4+12b^2$

$54b^4-63b^2+9=54b^4-54b^2-9b^2+9=0$

$54b^2(b^2-1)-9(b^2-1)=0$

$(54b^2-9)(b^2-1)$

$9(6b^2-1)$

$54=6\cdot 9$

$2\cdot 27$

$1\cdot 54$

$\frac{\sqrt{6}}{6}=b \quad a=\frac{2\sqrt{6}}{3} \quad 54b^2$

$6\cdot 9=54$

$a-2b$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$\frac{2\sqrt{6}}{3}-2\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$a^2+2b^2-3=0$

$-\frac{2\sqrt{6}}{3}+2\frac{\sqrt{6}}{6}$

$a^2+4b^2-5ab=0 \quad ab=$

$\frac{8}{3}+\frac{4}{6}-5\sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{6}}$

$1=\sqrt{6-0-1+2}$

$0+1-0-4+3=0$

$\frac{16}{6}+\frac{4}{6}=\frac{20}{6}-5\sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{6}}=5\left(\frac{4}{6}-\sqrt{\frac{8}{3\cdot3\cdot2}}\ \frac{2}{3}\right)$

$5\left(\frac{4}{6}-\frac{2}{3}\right)=0$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

(b_n) - г.п. $: a, b, c, x$, =>

$\exists$ $\frac{b}{a} = p$ т.к. a, b, c, x - члены г.п., а имеем

$b_1 = a$; $b_2 = b$; $b_3 = c$; $b_4 = x$ то

$b_2 = b = ap$; $b_3 = c = ap^2$; $b_4 = x = ap^3$, т.к. x - корень (из усл.)

Уров. $ax^2 + 2bx + c = 0$ то $x = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4ac}}{2a} =$

$= \frac{-2ap \pm \sqrt{4a^2p^2 - 4a \cdot ap^2}}{2a} = \frac{-2ap}{2a} = -p \Rightarrow x = -p \Rightarrow$

$b_4 = x = ap^3 = -p \Rightarrow$ ~~ap~~ $ap^2 = -1$ ($p \neq 0$ т.к. это зн. г.п. (b_n))

$ap^2 = b_3 = -1$ - Третий член прогрессии

Ответ: -1.

№6.

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$

Рассм. функции:

$f(x) = 2x^2 - x - 1$

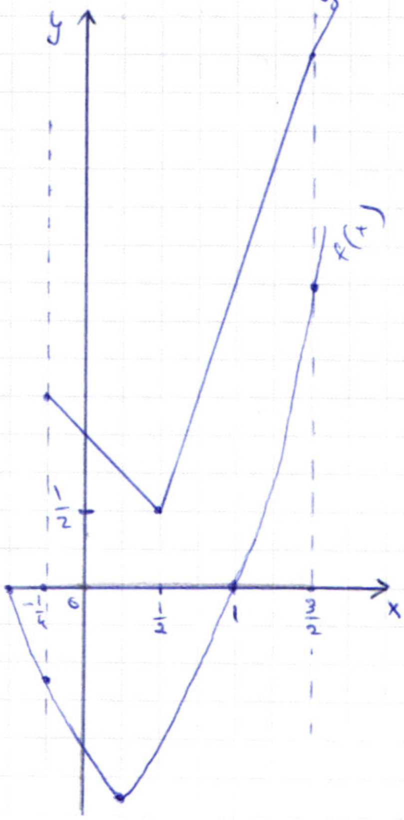
$g(x) = x + |2x - 1|$

$k(x) = ax + b$.

построим графики

$f(x)$ и $g(x)$ на пром.

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{2}{3}]$.



1. $f(x)$ – кв. ф., граф. парабола, $(x_0; y_0)$ – вершина, ветви вверх т.к. $2 \geq 0$, $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$.

$f(x) \cap OX$ в A и B; $A(1; 0)$; $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

2. $g(x) =$ $g(x) = x + |2x - 1|$ при $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow$ т.е. $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$g(x) = 3x - 1$; при $x < \frac{1}{2}$ $g(x) = 1 - x$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $g\left(-\frac{1}{4}\right) = 1\frac{1}{4}$ $g\left(\frac{3}{2}\right) = 3{,}5$

т.к. $k(x) \geq f(x)$ и $k(x) \leq g(x)$ при любом x на пром. $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$, то $k\left(\frac{3}{2}\right) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$; $k\left(-\frac{1}{4}\right) \geq f\left(-\frac{1}{4}\right)$ и $k\left(\frac{1}{2}\right) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} k\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \\ k\left(\frac{3}{2}\right) \geq 2 \\ k\left(-\frac{1}{4}\right) \geq -\frac{5}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3a}{2} + b \geq 2 \\ k\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{a}{4} + b \geq -\frac{5}{8} \end{cases}$$

$$k(x) \begin{cases} \frac{3a}{2} + b = 2 \\ -\frac{a}{4} + b = -\frac{5}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = 2 - \frac{3a}{2} \\ b = -\frac{5}{8} + \frac{a}{4} \end{cases} \Rightarrow 2 - \frac{3a}{2} = -\frac{5}{8} + \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{21}{8} = \frac{7a}{4} \Rightarrow$$

$a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$

~~чем меньше b тем k(x) меньше ⇒ b ≥ −1/4 ⇒~~

~~при a ≥ 3/2, k(3/2) k(1/2) = 3a/2 … a/2 − 1/2 ≤ 1/2.~~

~~k(x) = 3/2 x − 1/4 – функция с наимен. значен. на пром. [−1/4; 3/2] удов. усл. (см. график), но при k(1/2) = 3/2 · 1/2 − 1/4 = 1/2 ≤ 1/2, где ну.~~

Чем меньше b тем меньше $k(x)$, а т.к. мн. решен. наим. зн. b для $k\left(\frac{3}{2}\right)$ и $k\left(-\frac{1}{4}\right)$, то $b \geq -\frac{1}{4}$, иначе $k\left(\frac{3}{2}\right) < f(x)$ что не усл.

при умен. a, $k\left(-\frac{1}{4}\right)$ умен, т.к при $a = \frac{3}{2}$

$k\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8}$ то отв. $a \geq \frac{3}{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow$ из $\triangle ABC \Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \sqrt{29}\cdot\frac{5}{29} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

из обобщ. теор. синусов $\frac{CE}{\sin\angle ABC} = DB \Rightarrow CE = DB\cdot\sin\angle ABC$.

где $DB = \sqrt{DC^2+CB^2} = DC\sqrt{2} = \frac{2\cdot\sqrt{29\cdot 2}}{5} \Rightarrow$

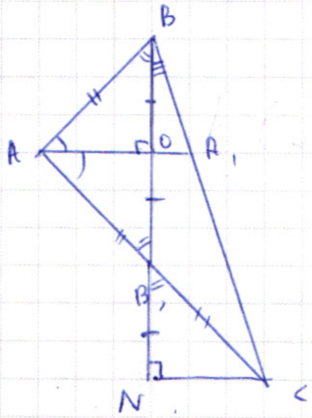
$CE = \frac{\cancel{5}}{\sqrt{29}}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{29}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{5}} = 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ в ~~$\triangle CED$~~ $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot EC\cdot\sin\angle CED =$

$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cancel{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \frac{6}{5} = 1{,}2$.

Ответ: б) 1,2

№2.



$\triangle ABC$, AA_1 - бис, BB_1 - мед, $AA_1 \perp BB_1$,

в $\triangle ABB_1$ AO ($O \mid AA_1 \cap BB_1 = O$) - бис. и высота $\Rightarrow \triangle ABB_1$ - р/б.

$N \mid N \in (BB_1)$, $(CN)\perp(BB_1) \Rightarrow$

$(CN)\parallel(AA_1) \Rightarrow \angle OAC = \angle ACN$, т.к. накрест леж. $\Rightarrow$,

$\angle AB_1O = \angle CB_1N$ т.к. верт.

$AB_1 = B_1C$ т.к. BB_1 - мед $\Rightarrow$

$\triangle AB_1O = \triangle CB_1N \Rightarrow B_1N = OB_1 = OB \Rightarrow$ ~~$\triangle ABA_1$~~, ~~$\triangle BOA_1$~~ $\sim$

$\triangle BOA_1 \sim \triangle BNC$ т.к. они прям. и у них $\angle NBC$ общий $\Rightarrow$

$\frac{BA_1}{BC} = \frac{BO}{BN} = \frac{1}{3}$.

Тогда для $h(x) = \frac{3}{2}x \cancel{+} - \frac{1}{4}$ рас. $x = \frac{1}{2}$.

$h(\frac{1}{2}) \le \frac{1}{2}$ и $h(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$, при увел. b.

$h(\frac{1}{2})$ будет увел, ~~$\Rightarrow$~~ b $\Rightarrow h(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$ что не уд. $\Rightarrow$

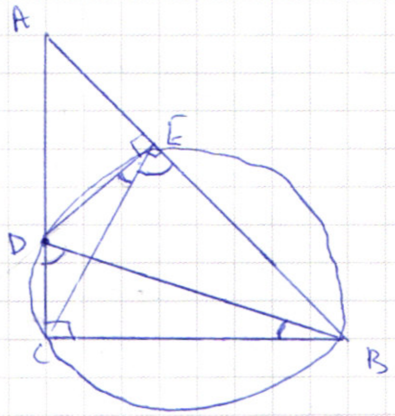
$b = -\frac{1}{4}$, при увел. a ~~на~~ будет увел. $h(\frac{1}{2}) \Rightarrow$

анал. $a \le \frac{3}{2}$, ~~при. увел.~~ a $\Rightarrow a = \frac{3}{2}$ ~~в~~. $\Rightarrow$ ед.

~~Ответ~~ един. a и b | $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{1}{4}$

Ответ: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$

№4.



$AD : AC = 3 : 5$., $\angle CED = 45°$

$\Rightarrow$ ~~$\angle CEB$~~ $= \angle DEB = 90° = \angle DCB$ и

Опир. на отрезок DB $\Rightarrow$

можем описать окр. возле

четырех угол. DEBC т.к. углы

суммы против. 180°,

т.к. $\angle DEB$ прям то DB - диам.

$\Rightarrow \angle DBC = \angle DEC$ т.к. опир. на одну

хорду $\Rightarrow \angle DBC = 45° \Rightarrow$

$\triangle DBC$ - прямоугол., с углом в $45° \Rightarrow$ он равнобед $\Rightarrow$

$DC = CB \Rightarrow tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{DC}{AC} = \frac{AC - AD}{AC} = \frac{2}{5}$,

~~Ответ: а) $\frac{2}{5}$~~. ~~S~~ Ответ: а) $\frac{2}{5}$.

б) $AC = \sqrt{29}$; $\Rightarrow DC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$; $\triangle AED \sim \triangle ACB$, т.к. они прям

и $\angle A$ общий $\Rightarrow \frac{DE}{AD} = \frac{CB}{AB} = \frac{DC}{AB}$; $AB = \sqrt{CB^2 + AC^2} =$

$= \sqrt{\sqrt{29}^2 + \left(\frac{2\sqrt{29}}{5}\right)^2} = \sqrt{29 + \frac{4 \cdot 29}{25}} = \sqrt{\frac{29(25+4)}{25}} = \frac{29}{5} \Rightarrow$

$DE = \frac{CB \cdot AD}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{29}}{5}}{\frac{29}{5}} = \frac{6}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$P_\Delta ABC + P_\Delta BCN - P_\Delta BB_1C$ ~~$= AB + B + P_\Delta ABB_1 + P_\Delta B_1CN$~~

$\Rightarrow \frac{P_\Delta ABC}{3} = AB + BA_1 = 400 \Rightarrow$ AB - целое чис. $\Rightarrow$

AB может прин. зн. от 1 до 399 $\Rightarrow$ возможно 399 таких треугол. (сторона треугол $\neq 0$)

Ответ: 399.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$54b^4-54b^2-9b^2+9=0$

$54b^2(b^2-1)-9(b^2-1)=0$

$(b^2-1)(54b^2-9)=0$

$9(b^2-1)(6b^2-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=\frac{1}{6}\end{array}\right. \Rightarrow$ 1.) если $b^2=\frac{1}{6} \Rightarrow$ вер. к сис.

$a^2+2\cdot\frac{1}{6}-3=0$

$a^2+\frac{1}{3}-3=0$

$a^2=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$, заметим что в системе есть

ограничение $\sqrt{ab} \Rightarrow ab\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2=\frac{8}{3} \\ b^2=\frac{1}{6} \\ ab\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=\pm\sqrt{\frac{8}{3}} \\ b=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}\end{array} \Rightarrow$

и $a-2b=\sqrt{ab} \Rightarrow$

$a-2b\geq 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=+\sqrt{\frac{8}{3}} \\ b=+\sqrt{\frac{1}{6}}\end{cases} \\ \begin{cases} a=-\sqrt{\frac{8}{3}} \\ b=-\sqrt{\frac{1}{6}}\end{cases} \end{array}\right.$ — неподх. т.к. $-\frac{2\sqrt{6}}{3}-2\cdot-\frac{\sqrt{6}}{6}=-\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{6}=a-2b\geq 0$ W.

~~для a и b; а корн. $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\right.$~~

$\Rightarrow$ при $b^2=\frac{1}{6} \Rightarrow a=\frac{2\sqrt{6}}{3}; b=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

2) если $b^2=1 \Rightarrow$

$a^2+2\cdot 1-3=0$.

$a^2+2-3=0 \quad a^2=1 \Rightarrow$ т.к. $ab\geq 0$ и $a-2b\geq 0$

$\begin{cases} a=-1 \\ b=-1\end{cases} \Rightarrow$ из 1 и 2 $\left[\begin{array}{l} a=\frac{2\sqrt{6}}{3};\ b=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ a=-1;\ b=-1\end{array}\right.$ вер. к замене

$\Rightarrow \begin{cases} x-1=\frac{\sqrt{6}}{6}; & y-2=\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x-1=-1; & y-2=-1\end{cases} \Rightarrow$

$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}+1; \frac{2\sqrt{6}}{3}+2\right); (0;1)$

Ответ: $(0;1), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}+1; \frac{2\sqrt{6}}{3}+2\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

1) $xy-2x-y+2 = x(y-2)-1(y-2)=(x-1)(y-2)$

2) $2x^2+y^2-4x-4y+3=(y^2-4y+2)+2(x^2-2x+1)-1=$

$=(y-2)^2+2(x-1)^2-\cancel{3}3 \Rightarrow$

4) $y-2x = y-2-2(x-1) \Rightarrow$

З $\cancel{a}\,b=x-1$; $\cancel{b}\,a=y-2$, тогда.

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-3=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+4b^2-4ab=ab. \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases}$$ вычтем из 1 ур. второе.

$a^2-a^2+4b^2-2b^2-4ab+3=ab-0.$

$2b^2-5ab+3=0$ ~~[illegible]~~ :

$\cancel{b}$ $\cancel{5ab=\ldots}$ $5ab=3+2b^2 \Rightarrow a=\frac{3+2b^2}{5b}.$

вернемся к системе.

$\frac{(3+2b^2)^2}{25b^2}+2b^2-3=0.$ $\frac{4b^4+12b^2+9+50b^4-\cancel{3}75b^2}{25b^2}=0.$

при $b^2=0$, $b=0 \Rightarrow a-2\cdot 0=\sqrt{a\cdot 0}$ т.е. $a=0 \Rightarrow$

$a^2+2\cdot 0^2-3=0$ т.е. $-3=0$!!! $\Rightarrow b\neq 0 \Rightarrow$

$54b^4-63b^2+9=0$