МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

√1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

√ 2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

√ 3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

+-√5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

√ 7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

a, $b = k\cdot a$, $c = k^2 a$ (т.к. это геом. прогр.)

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2akx + ak^2 = 0$

$D = 4a^2k^2 - 4a^2k^2 = 0$

$x = \frac{-2b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a} = -\frac{ka}{a} = -k$ (← четвёртый член прогрессии по усл)

с другой стороны четвёртый член равен ak^3

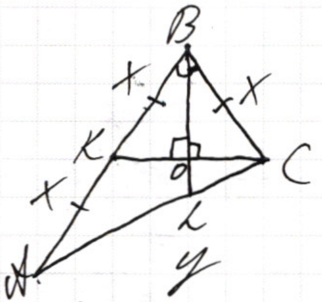
$ak^3 = -k$

$ak^2 = -1$

↖ третий член прогрессии.

Ответ: −1.

N2.



$\triangle ABC$, бисс $BL \perp$ мед CK

$x = AK = BK$ (CK − мед)

$\triangle KBO = \triangle CBO$ (BO − общ. и прил. углы равны)

$\Downarrow$

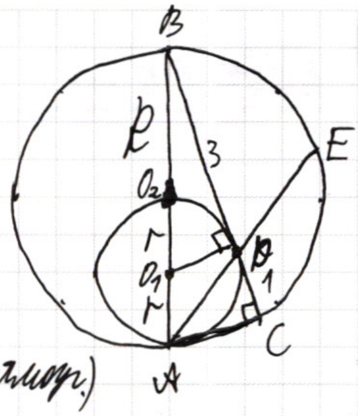
$x = BK = BC$

$AC = y$

P − периметр $P = 3\overset{\vdots 3}{x} + y = \overset{\vdots 3}{1200} \Rightarrow y \vdots 3$

из неравенства треуг. $x < y < 3x$ ($AB = 2x$, $BC = x$)

N 5



$\angle ACB = 90°$ (т.к. опирается на диам)

$O_1DB = 90°$ (т.к. BC – касат)

$\Delta O_1DB \sim \Delta ACB$ ($\angle B$ – общ. и треуг. прямоуг.)

$\Downarrow$

$\frac{AB}{O_1B} = \frac{BC}{BD}$ $\qquad O_1B = 2R - r$

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$

$1,5R = 2R - r$

$r = 0,5R$ $\quad \boxed{R = 2r}$ $\qquad O_1B = 2R - r = 3r$

рассмотрим ΔO_1DB

~~$O_1B = 3r$~~

$O_1B^2 = O_1D^2 + BD^2$

$(3r)^2 = r^2 + 3^2$

$8r^2 = 9$

$r = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{1,5}{\sqrt{2}}$ | $R = 2r = \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Ответ: $r = \frac{1,5}{\sqrt{2}}$; $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$$4x < \overset{1200}{\overset{\parallel}{3x+y}} < 6x$$

$$\Downarrow$$

$200 < x < 300$

$201 \leqslant x \leqslant 299$ (99 значений)

при всех этих „x", „y" задаётся автоматически $y=1200-3x$

Ответ: 99.

№3. $\underline{\text{ОДЗ}: \overset{y-2x\geqslant 0}{xy-2x-y+2\geqslant 0}}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-2x)^2=xy-2x-y+2 \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

$\underline{a=x-1 \text{ и } b=y-2}$

тогда:

$$\begin{cases} (b-2a)^2=ab \\ 2a^2+b^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+4a^2-5ab=0 \\ 2a^2+b^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b-a)(b-4a)=0 \\ 2a^2+b^2-3=0 \end{cases}$$

$(b-a)(b-4a)=0$

$\downarrow$

$b=a$

$\downarrow$

$2a^2+b^2=3$

$\downarrow$

$2a^2+a^2=3$

$b=a=\pm 1$

$\boxed{x=2 \text{ и } y=3}$

$\boxed{x=0 \text{ и } y=1}$

$\downarrow$

$b=4a$

$\downarrow$

$2a^2+b^2=3$

$\downarrow$

$2a^2+16a^2=3$

$6a^2=1$

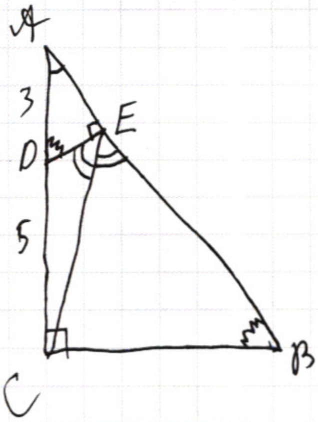
$a=\sqrt{\frac{1}{6}}$ и $b=4\sqrt{\frac{1}{6}}$ $\rightarrow$ $\boxed{x=1+\sqrt{\frac{1}{6}} \text{ и } y=2+4\sqrt{\frac{1}{6}}}$

$a=-\sqrt{\frac{1}{6}}$ и $b=-4\sqrt{\frac{1}{6}}$ $\rightarrow$ $\boxed{x=1-\sqrt{\frac{1}{6}} \text{ и } y=2-4\sqrt{\frac{1}{6}}}$

не подходит по ОДЗ

Ответ: $x=0$ и $y=1$; $x=1+\sqrt{\frac{1}{6}}$ и $y=2+4\sqrt{\frac{1}{6}}$

№4.

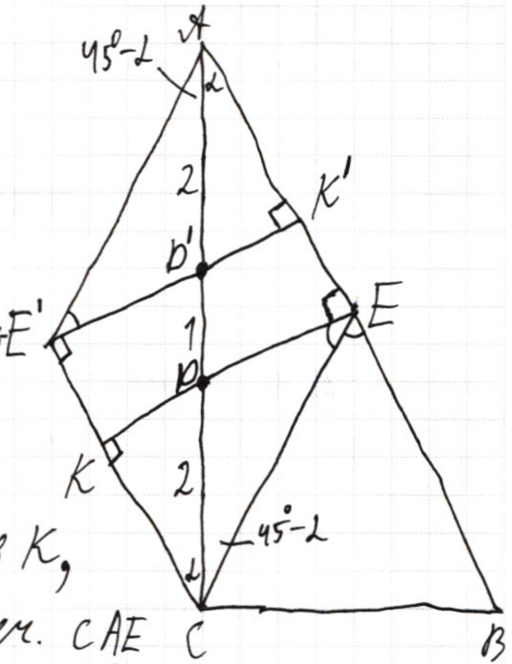


а) $tg\,BAC = x$

$$x = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 4.



а) $\angle BAC = \alpha$

$\angle ACE = 180° - \angle CEA - \angle CAE = 45° - \alpha$

Возьмём ΔAEC и повернём относительно середины AC на $180°$, получим $\Delta CE'A$.

Продлим ED до пересеч с CE' в K, аналогично продлим $E'D'$ до пересеч. CAE в точке K'

$\angle EKC = 180° - \angle KEC - \angle KCE =$

$= 90°$

аналогично $\angle E'K'A = 90°$

ΔCKE − равноб с вершиной K ($\angle KCE = \angle KEC = 45°$)

$\Downarrow$

$KE = KC$

$\Delta CKD = \Delta AK'D'$ (из симметрии относительно центра AC)

$\Downarrow$

$KD = K'D'$

$DE \parallel D'K'$ ($DE \perp AB$ и $D'K' \perp AB$)

$\Downarrow$

$\Delta DEA \sim \Delta D'K'A \Rightarrow \frac{DE}{D'K'} = \frac{AD}{AD'} = \frac{3}{2} \Rightarrow DE = 1{,}5D'K'$

$KC = KE = KD + DE = D'K' + 1{,}5D'K' = 2{,}5D'K' = 2{,}5KD$

$tg\alpha = \frac{KD}{KC} = \frac{KD}{2{,}5KD} = 0{,}4$ $(tg\angle BAC = 0{,}4)$

Ответ: $tg\angle BAC = 0{,}4$.

продолжение на стр 7

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

если $a=1$, то:

$f(1\cdot b)=f(1)+f(b) \Rightarrow \boxed{f(1)=0}$

если $a=\frac{1}{b}$, то:

$f(\frac{1}{b}\cdot b)=f(b)+f(\frac{1}{b})$

$0=f(b)+f(\frac{1}{b}) \Rightarrow \boxed{-f(\frac{1}{b})=f(b)}$

$$f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(y)>f(x)$$

$f(2)=[\frac{2}{2}]=1$ $\quad f(3)=1$ $\quad f(5)=2$ $\quad f(7)=3$ $\quad f(11)=5$ $\quad f(13)=6$ $\quad f(17)=8$

$f(19)=9$

$f(1)=0$

$f(4)=f(2\cdot2)=f(2)+f(2)=1+1=2$

аналогично найдём все числа до 21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	$\leftarrow N$
0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	$\leftarrow f(N)$

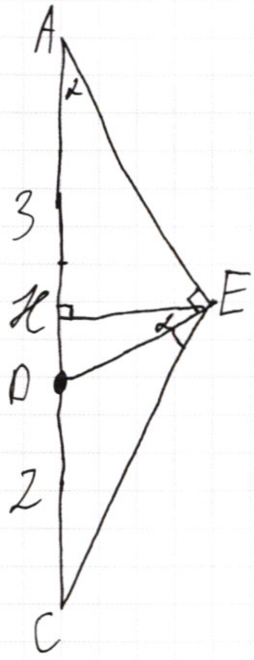
нам нужно н-ти кол-во пар „k" $(x;y)$, таких что $1\leqslant x\leqslant 21$ и $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x)<f(y)$

$k=21\cdot20\overset{210}{:}2-\frac{2\cdot1}{2}-\frac{4\cdot3}{2}-\frac{6\cdot5}{2}-\frac{4\cdot3}{2}=210-1-6-15-6=182$

Ответ: 182

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) для $\triangle ADE$:



$AD^2 = AE^2 + DE^2$

$AD^2 = (DE/tg\alpha)^2 + DE^2$

$AD^2 = \left(1+\frac{1}{tg^2\alpha}\right) DE^2$

$AD = \sqrt{1+\frac{1}{0,4^2}}\, DE$

$DE = \sqrt{\frac{4}{29}}\, AD = \frac{2}{\sqrt{29}} AD = \frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\frac{3}{5}AC =$

$= 1,2$

для $\triangle HED$ (EH – высота $\triangle AEC$):

$DE^2 = HE^2 + HD^2 = HE^2 + (tg\alpha\cdot HE)^2 = (1+tg^2\alpha)\, HE^2$

$HE = \frac{DE}{\sqrt{\frac{29}{4}}} = 0,4\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}$

$S_{\triangle AEC} = HE\cdot AC : 2 = 0,4\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\sqrt{29} : 2 = 0,4$

$S_{\triangle EDC} = \frac{DC}{AC}\, S_{\triangle AEC} = \frac{2}{5}\cdot 0,4 = \frac{4}{25} = 0,16$

Ответ: $S_{\triangle EDC} = 0,16$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

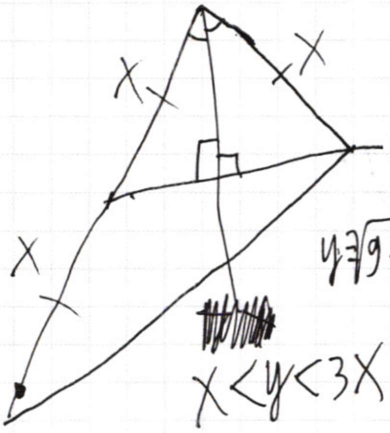
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

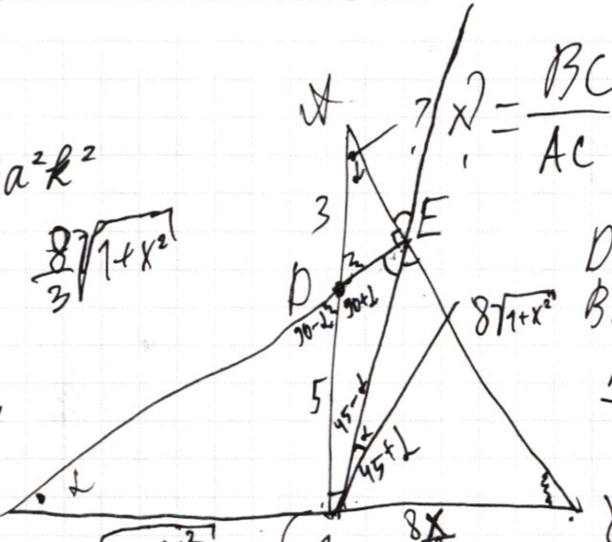
$ax^2 + akx + ak^2 = 0$

$D = a^2k^2 - 4a^2k^2 = -3a^2k^2$

$\frac{8}{3}\sqrt{1+x^2}$



$\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$



$x) = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$

$DE = AE \cdot x$

$BC = A\cancel{B}^{C} \cdot x$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{8}$

$8\cancel{x}$

$y = \sqrt{9 - \frac{9x^2}{1+x^2}} = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}} = 3\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$AD = \frac{3}{8}\sqrt{AD^2 + BC^2 \over AC^2x^2}$

$x < y < 3x$

$y(\cancel{4}y - \cancel{4}x) + 4x(x-y) + 2x - y = 2 = 0$

$4x < P < 6x$

$3 = \sqrt{} - 1$

$\sqrt{8^2 + 8^2x^2} =$

$= 8\sqrt{1+x^2}$

$AD^2 = \frac{3}{8}AD^2 + \frac{3}{8}BC^2$

$\frac{5}{8}AD^2 = \frac{3}{8}BC^2$

$AD = 0{,}6BC$

300 200

99

0

∧|

$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2$

$y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$4x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 6 = 0$

$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$

$(x \quad)(2x$

$y^2 + 5xy - 10x - 9y + 8 = 0$

$(y \quad x)(y \quad 2x)$

$y^2 - 9y + 18 = 0$

$2(x-1)^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

6 − 4 − 3 + 2

0

0

$\overset{9}{1} + \overset{16}{0} - \overset{10}{30} + \overset{4}{0} + \overset{3}{1} - 2 = 0$

x = 2 y = 3

x = 0 y = 1

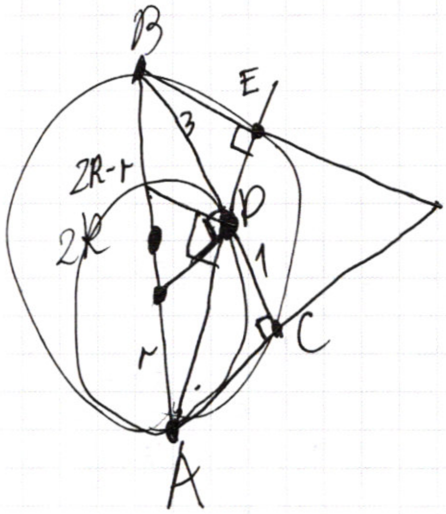
0	3
1	2
2	1
3	0

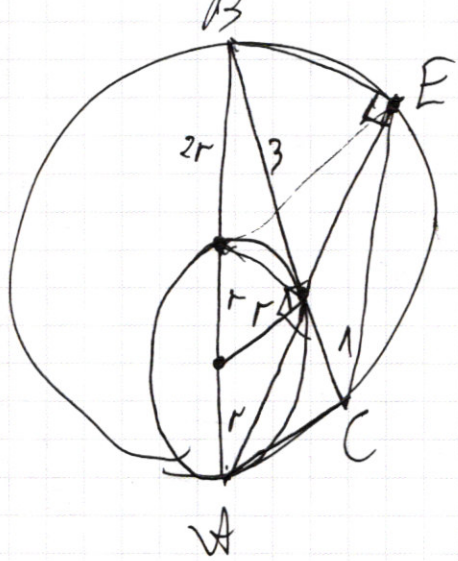
x = 0
y = 3

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$9 - 12 + 3 = 0$

$1 - 4 + 3$





$$\frac{2R-r}{r}=\frac{3}{1}$$

$$2R-r=3r$$

$$R=2r$$

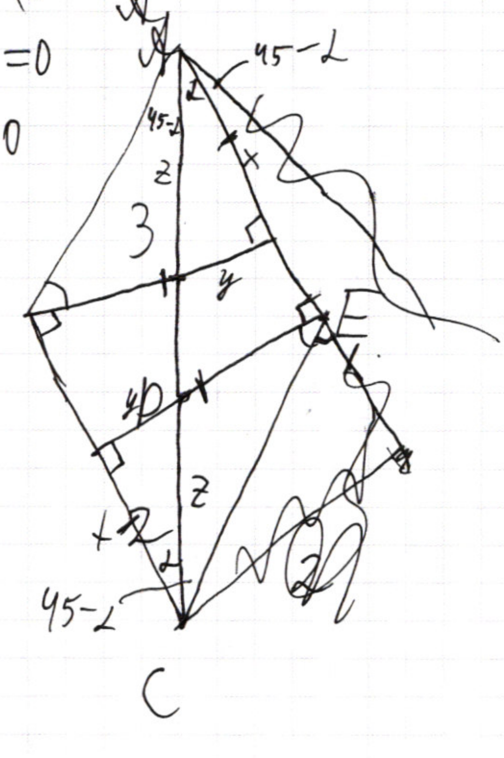
$$9r^2=r^2+9$$

$$r=\frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$(y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$$

$$(b-a)(b-4a)=0$$



$$\begin{cases}(b-2a)^2=ab\\ 2a^2+b^2=3\end{cases}$$

$$b^2+4a^2-5ab=0$$

$$2a^2+b^2-3=0$$

45
90−α
45+α

$$1{,}5y+y=X$$