МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

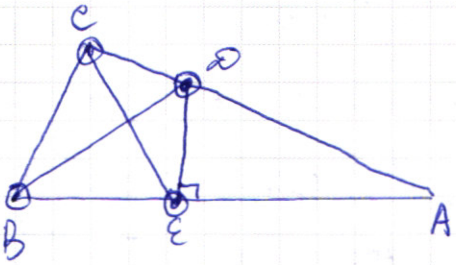
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.

а) Дано: $\angle CED = 45^\circ$

$AD : AC = 3:5$; $DE \perp AB$; $\angle C = 90^\circ$

Найти: $tg \angle BAC$



Решение: 1) $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{3}{2}$

2) Обозначим $AD = 3x$
$CD = 2x$

3) $CDEB$ – вписанный, т.к. $\angle BCD + \angle DEB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

4) Из п.3 $\Rightarrow \angle CBD = \angle CED = 45^\circ$

5) В $\triangle CBD$ $\angle C = 90^\circ$; $\angle CBD = 45^\circ \Rightarrow \angle CDB = 45^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle CBD$ – равнобедр. с осн $BD \Rightarrow CB = CD = 2x$

6) $tg \angle BAC = \frac{BC}{CA} = \frac{2x}{2x+3x} = \frac{2}{5}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

б) $AC = \sqrt{29}$; Найти: S_{CED}. 1) $AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$ (обозначения из п. а)) $\Rightarrow CD = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29}$

2) $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot ED \cdot \sin \angle CDE$ (П)

3) $\angle BED = 90^\circ$; $\angle CED = 45^\circ \Rightarrow \angle BEC = 45^\circ$ (из вписанности CDEB) $\Rightarrow$ $\angle BDC = 45^\circ$

4) $\triangle BCE$: $\angle CEB = 45^\circ$; $\angle CBA = 90^\circ - \angle BAC \Rightarrow \angle BCE = 45^\circ + \angle BAC$.

5) Из вписанности $BCDE$ $\angle BDE = \angle BCE = 45^\circ + \angle BAC$

6) Итого $\angle CDE = \angle CDB + \angle BDE = 45^\circ + 45^\circ + \angle BAC = 90^\circ + \angle BAC$.

7) $\sin \angle CDE = \sin(90^\circ + \angle BAC) = \sin 90^\circ \cdot \cos \angle BAC + \cos 90^\circ \cdot \sin BAC = \cos \angle BAC$

8) Тогда формула (П) переписывается в виде $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DE \cdot \cos \angle BAC$.

9) $1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ для $\angle BAC$: $1 + \frac{4}{25} = \frac{1}{\cos^2 BAC} \Rightarrow \cos BAC = \frac{5}{\sqrt{29}}$

10) $\frac{DE}{DA} = \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 BAC} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$DE = DA \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

11) Считаем площадь: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\frac{6}{5}$

Задача 1.

1) Пусть $b = ad$; $c = ad^2$; $a = a$ (раз a, b, c – члены геометрической прогрессии так можно сделать)

2) Перепишем уравнение для 4-ого члена из условия:

$$ax^2 + 2ad\,x + ad^2 = 0$$

Посчитаем дискриминант:

$$D = 4a^2d^2 - 4ad^2 \cdot a = \underline{0}$$

отсюда $x = \dfrac{-2ad \pm \sqrt{D}}{2a} = -d$

3) Получается, четвёртый член прогрессии равен $(-d)$.

С другой стороны, он равен ad^3.

$$ad^3 = -d$$
$$ad^3 + d = 0$$
$$d(ad^2+1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\begin{array}{ll} d = 0 & (1) \\ ad^2+1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

в случае (1) все члены прогрессии, кроме, может быть, первого, равны нулю, а значит третий член — ноль.

в случае (2) ad^2 и есть третий член и он равен (-1).

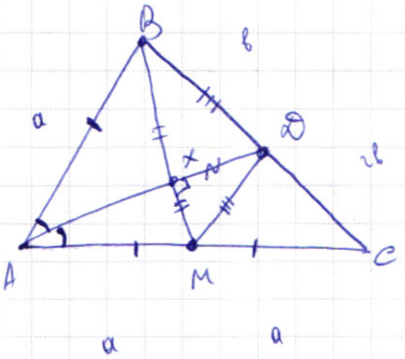
~~Ответ~~ ~~0 или −1~~

Учитывая ответ на вопрос, заданный жюри, случай (1) невозможен, а значит

Ответ: −1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2



Рассмотрим треугольник из условия.

$\triangle AXM = \triangle AXB$ по катету AX и острому углу $\angle DAM = \angle DAB$.

$\Downarrow$

$AM = AB$ и $BX = XM$

Тогда $\triangle DMX = \triangle DBX$ по 2 катетам $\Rightarrow$

$\Rightarrow BD = DM$

AD – биссектриса $\Rightarrow$ $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Если $AB = a$; $BD = b$, тогда

$AC = 2a$; $DC = 2b$.

Тогда пара чисел $(a; b)$ однозначно задаёт треугольник.

Запишем неравенства треугольника:

$$\begin{cases} 3a > 3b \\ a + 3b > 2a \\ 3b + 2a > a \end{cases} \qquad \begin{cases} a > b \\ a < 3b \\ 3b + a > 0 \end{cases}$$

Последнее, очевидно всегда верно.

Известно, что периметр $\triangle$ равен 1200, а сторона целые.

$3a + 3b = 1200$

$a + b = 400$

$b = 400 - a$

Подставим в систему

$$\begin{cases} a > 400 - a \\ a < 3(400 - a) \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 200 \\ a < 300 \end{cases}$$

Понятно, что раз $a + b = 400$, то для каждого значения a есть ровно одно значение b.

между 200 и 300 ровно 99 чисел и это все значения, которые может принимать a.

Ответ: 99

Задача 7.

1)

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$
$$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$$

$\Big\}: \; f(p\cdot 1) = f(p) + f(1) = f(p)$

$$\Downarrow$$

$$f(1) = 0$$

2) $f(1) = f\left(p\cdot\frac{1}{p}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$$0 = \left[\frac{p}{2}\right] + f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) < 0$$

3) $f(1) = f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right) = f\left(p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}\cdot\frac{1}{p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 0 = \alpha_1\left[\frac{p_1}{2}\right] + \ldots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{2}\right] + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$$\Downarrow$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

Значит,

4) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \quad \left(\text{т.к. } f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)\right)$

5) Составим таблицу, где явно посчитаем $f(x)$ для всех натуральных x, таких, что $1 \le x \le 21$: [заполняем по правилам из условия]

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$f(x)$	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	...
кол-во чисел, у которых $f(x)$ больше	20	18	18	14	14	14	8	8	14	8	3	8	2	4	8	4	...

x	17	18	19	20	21
$f(x)$	8	3	9	4	4
кол-во тех, у кого больше	1	8	0	4	4

Исходя из п. 4 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.
Значит, нужно для каждого x найти число тех y, у которых $f(y) > f(x)$, а это третья строка таблицы.
В ответ пойдёт сумма этих чисел.

Ответ: 182 пары.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

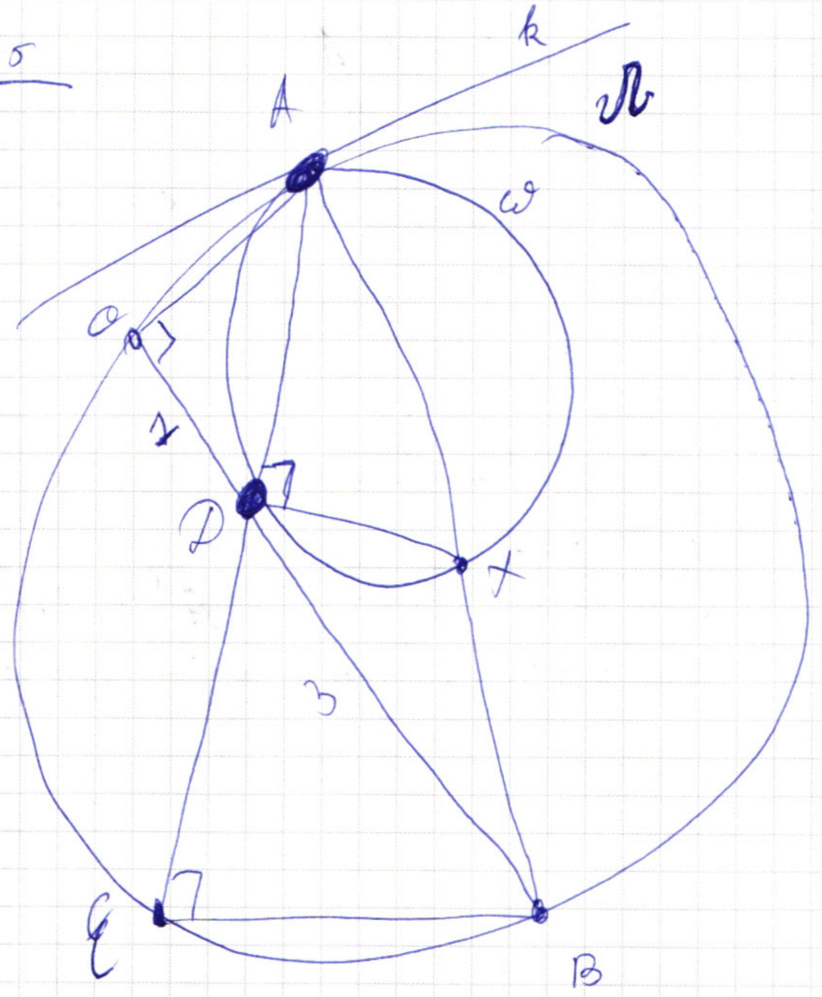
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



Обозначим
R - радиус Ω
r - радиус ω

AB - диаметр Ω => он перпендикулярен общей касательной k. Из точки касания A проведена прямая, перпендикулярная k => AX - диаметр ω.

$BX = 2R - 2r$

$BX \cdot BA = BD^2$

$(2R-2r)2R = 9$

$\frac{9}{4} = R^2 - rR$

$3 = AD^2 \cdot \frac{R-r}{r}$

$ED \cdot DB = AD \cdot DE = 3$

$\angle AEB = 90°$, т.к. AB - диаметр

$\angle ADX = 90°$, т.к. AX - диаметр =>

=> $\triangle ADX \sim \triangle AEB$ по 2 углам =>

=> $\frac{DX}{EB} = \frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$

$\frac{DE}{AD} = \frac{R-r}{r}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ (y-2)^2-1+2(x-1)^2-2=0 \end{cases}$$

$\exists\ y-2=A^2$

$x-1=B^2$

тогда $y-2x=A^2-2B^2+4$

$$\begin{cases} A^2-2B^2+4=AB \\ A^4-1+2B^4-2=0 \end{cases}$$

сложим:

$$A^4+2B^4+A^2-2B^2-AB+1=0$$

$$\left(A-\frac{B}{2}\right)^2-\frac{9\cdot B^2}{4}+1+A^4+2B^4=0$$

$$\left(A-\frac{B}{2}\right)^2+\left(B^2-\frac{9}{8}\right)^2+a^4+b^4-\frac{17}{64}=0$$

?????

$\sqrt{y(x-1)-2(x-1)}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y^2-4y+4=(y-2)^2$

$2x^2-4x+2-2$

$2(x-1)^2=2x^2-4x+2$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ (y-2)^2-1+2(x-1)^2-2=0 \end{cases}$$

a^2 b^2

$x-1$ $y-2$

$y-2-2(x+1)$

$=y-2-2x-2=$

$=y-2x-4$

a^2-2b^2+4

$a^2-ab+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+4=0$

$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+4=0$

$$\begin{cases} a^2-2b^2+4=ab \\ a^4+2b^4-3=0 \end{cases}$$

$b^2\sqrt{2}+1+a^4+2b^4=0$

$a^4+b^4-2a^2b^2+b^4-3=$

$-(a^2-2b^2+4)^2$

$$\begin{cases} a-2b+4=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases}$$

$b^2\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$

$a^2+2\sqrt{2}ab+2b^2=0$

$\sqrt{2}b$

$\left(2b^4-b^2\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+1+a^4=0$

$(a^2+b^2)^2+b^4-3+(a^2-2b^2+4)^2$

$\left(b^2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+a^4=0$

$\left(b^2\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+a^4=0$

$\left(\sqrt{2}b-\frac{b}{2}\right)^2+$

$a^2+2b^2-2b+a+1=\sqrt{ab}$

$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}b-\frac{b}{2}\right)^2=$

$\left(a-\frac{b}{2}-\sqrt{2}b+\frac{b}{2}\right)\left(a-\frac{b}{2}+\sqrt{2}b-\frac{b}{2}\right)=$

$(a-\sqrt{2}b)(a-b+\sqrt{2}b)$

$=(a-\sqrt{2}b)$

$a^2-2a\cdot\frac{b}{2}=$

$a^2-2b^2+1+a^4+2b^4=ab$

$\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}-2b^2+1+a^4+2b^4=0$

$\sqrt{2}b\cdot\frac{b}{2}\cdot 2=$

$=b^2\sqrt{2}$

$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{9b^2}{4}+1+a^4+2b^4=0$

$81-64=17$

$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}b-\frac{b}{2}\right)^2-b^2\sqrt{2}+1+a^4+2b^4=0$

$\left(b^4-2\cdot\frac{9}{8}\cdot b^2+\frac{81}{64}\right)-\frac{81}{64}+1+a^4+b^4=0$

$b^4=(b^2)^2$

$\frac{9}{4}=2\cdot\frac{9}{8}$

$\frac{81}{64}$

$\left(b^2-\frac{9}{8}\right)^2+a^4+b^4-\frac{17}{64}=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b = ad$

$c = ad^2$

ad^3

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2adx + ad^2 = 0$

$\frac{D}{4} = a^2d^2 - a^2d^2 = 0$

$x = \frac{-ad \pm \sqrt{0}}{a}$

$x = -d$

$a^2d^3 + 2ad \cdot ad^3 + ad^2 = 0$

$ad^2(ad + 2ad^2 + 1) = 0$

$ad^3 = -d$ $\quad d \neq 0$

$ad + 2ad^2 + 1 = 0$

$ad^2 = -1$ $\quad ad(1+2d)+1=0$

$d = 0$

$a \quad 0 \quad 0$

$400 - a < a < 2 \cdot (400 - a)$

$400 + a < 3a < 800$

$\begin{cases} 200 < a \\ a < 267 \end{cases}$

$800 : 3 = 266$

$b < 400 - b < 3b$

$2b < 400 < 4b$

$b < 200 < 2b$

$3a > 3b$

$a > b$

$a + b = 400$

$b < a < 3b$

$a = 400 - 199 =$

$= 201$

$3b > a$

$3b + a > 0$

$1200 - 3a + a > 0$

$1200 - 2a > 0$

$b < 400 - b < 1200 - 2a < 1200$

$0 < 400 < 2b$

$a < 600$

$b > 200$

$3(400 - a) =$

$= 1200 - 3a$

$4a < 1200$

$a < 300$

b: 1 $\quad a < 3$

b 2 $\quad a < 6$

3 $\quad 9$

4 $\quad 12$

5 $\quad 15$

133 $\quad 399$

134 $\quad$ все

200 $\quad 400$

201

1 $\quad$ 1

2 $\quad$ 3

3 $\quad$ 6

134

$+ 399$

399

$133 \cdot 3 = 399$

b: 1 … 133:

$3b - 1 - b =$

$= 2b - 1$

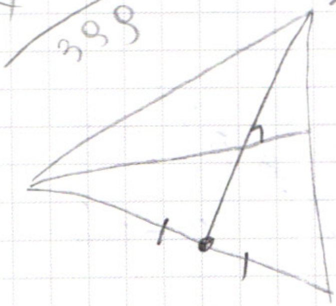
$\sum_{1}^{133}(2b - 1) =$

$= \sum_{1}^{133} 2b - 133 =$

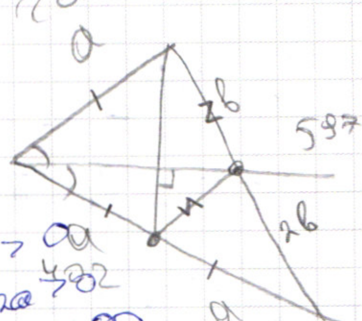
$= 2\sum_{1}^{133} b - 133 =$

$= 2 \cdot \frac{133 \cdot 134}{2} - 133 =$

$= 133^2$



201



597

(a; b) ? ура!

b: 134…

$3 \cdot 199 = 597$

черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

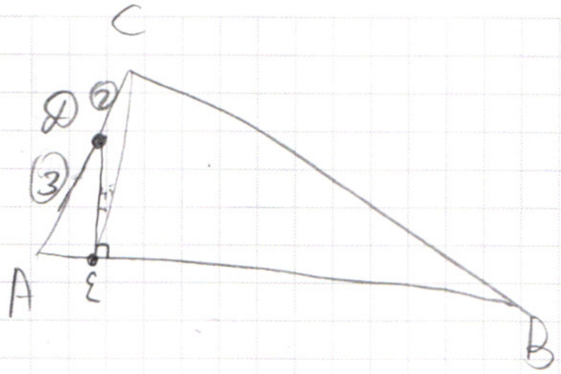
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

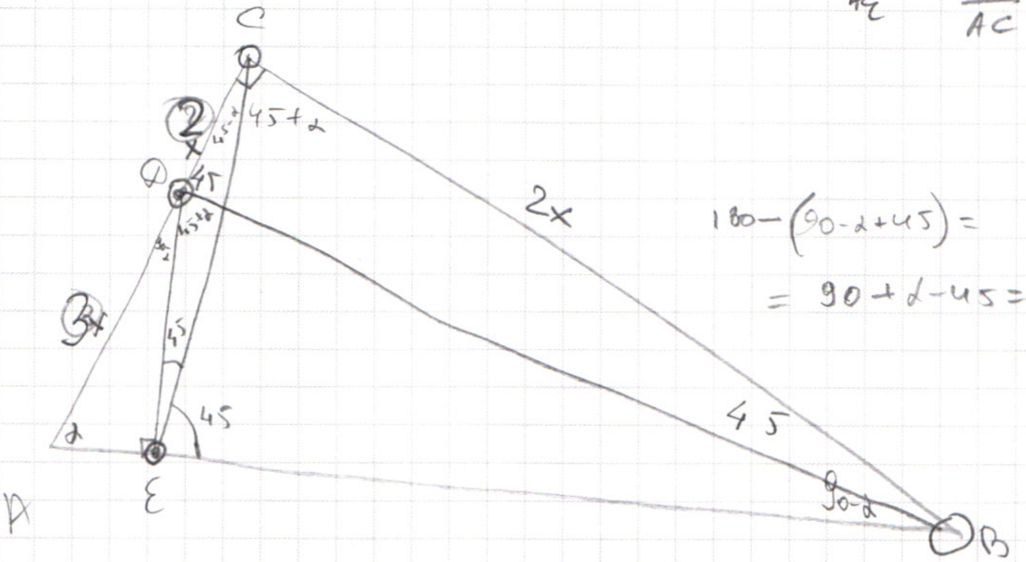


$tg BAC - ?$

OK

$tg BAC =$

$= \frac{DE}{AE} = \frac{CB}{AC}$



$180 - (90 - α + 45) =$

$= 90 + α - 45 = 45 + α$

а)

$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x}$

$15x^2 = AE \cdot AB$

$tg BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

$AC = \sqrt{29}$

$[CED] - ?$

$5x = \sqrt{29}$

$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$DE^2 = \frac{9}{25} \cdot 29 - 9 =$

$= \frac{9 \cdot 29 - 9 \cdot 25}{25} = \frac{9 \cdot 4}{25} = \frac{36}{25} \Rightarrow DE = \frac{6}{5}$

$1 + tg^2 BAC = \frac{1}{\cos^2 BAC}$

$\frac{29}{25} = \frac{1}{\cos^2 BAC}$

$\cos BAC = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\cos BAC = \cos DAE = \frac{AE}{AD} = \frac{AE \cdot 5}{3\sqrt{29}}$

$DA = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

$\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{AE \cdot 5}{3\sqrt{29}}$

$AE = 3$

$DA \cdot \cos = AE = 3$

$DE^2 = \frac{9 \cdot 29}{25} - 9 =$

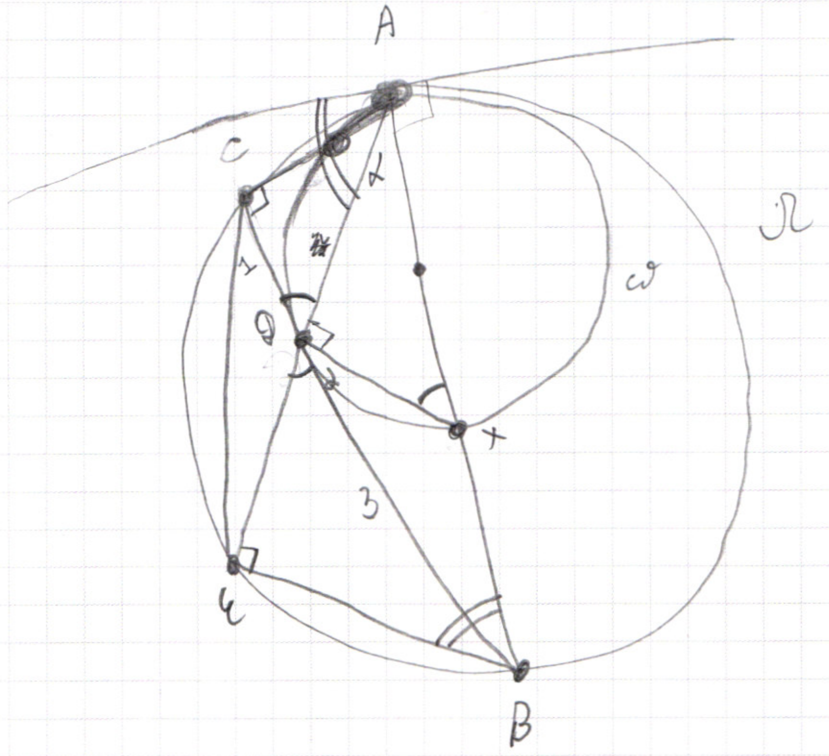
$= \frac{4}{25} \Rightarrow DE = \frac{2}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$r, R - ?$

$[BACE] - ?$

$AB = 2R$

$BD \cdot DE = AD \cdot DE = 3$

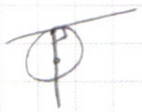
$BD^2 = BX \cdot BA = 9$

$\frac{EB}{\sin\alpha} = AB$

$\sin\alpha = \frac{EB}{AB}$ BAY!

$\frac{AX}{AB} = \frac{DX}{BE}$

$AX = AB \cdot \frac{DX}{BE}$



$\frac{DX}{\sin\alpha} = 2r$

$\frac{BE}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{DX}{BE} = \frac{r}{R}$

$\frac{3}{AD^2} = \frac{R-r}{r} \Big| \cdot rR$

$\frac{3rR}{AD^2} = \frac{9}{4}$

$\frac{rR}{AD^2} = \frac{3}{4}$

$ED \cdot AD = 1 \cdot 3$

$AD^2 \cdot \frac{R-r}{r} = 3$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$

$\frac{R}{r} = \frac{AE}{AD}$

$BD^2 = \left(AB - AB \cdot \frac{DX}{BE}\right) \cdot 2R$

$9 = \left(2R - 2R \cdot \frac{r}{R}\right) \cdot 2R$

$9 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$\frac{9}{4} = R^2 - rR$

$\cancel{R^2 - rR - \frac{9}{4} = 0}$

$\cancel{D = r^2 + 9}$

$\cancel{R = \frac{r + \sqrt{r^2+9}}{2}}$

$\cancel{\frac{AD}{ED} = \frac{AD}{AD - AE} = \frac{AD - AE + AE}{AD - AE} = 1 + \frac{AE}{AD - AE}} = 1 - \frac{AE}{DE} =$

$= 1 - \frac{AE}{AE - AD} = \cancel{\frac{AE - AD + AD}{AE - AD}} = \cancel{1 - 1 +} \frac{AD}{DE}$

$AD = \frac{rAE}{R}$

$AE = x$

$AD = \frac{r}{R}x$

$\frac{ED}{AD} = \frac{x - \frac{r}{R}x}{\frac{r}{R}x} = \frac{R-r}{r}$

☑ черновик ☐ чистовик

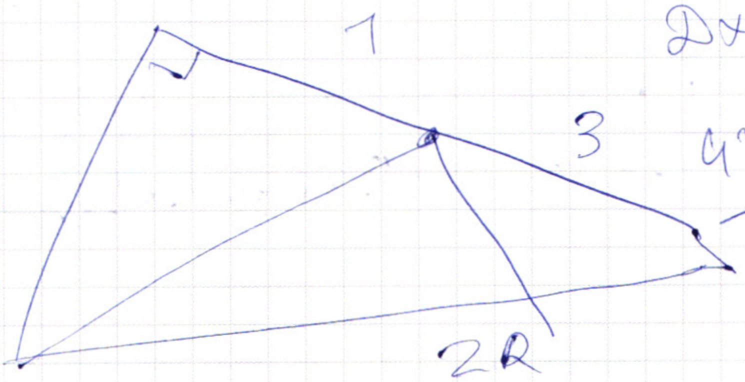
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

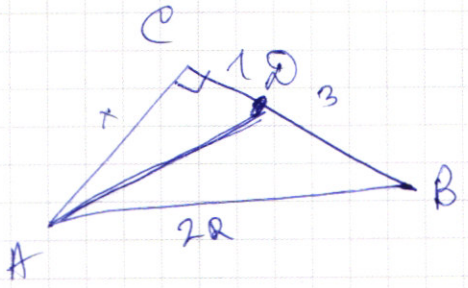
(Нумеровать только чистовики)

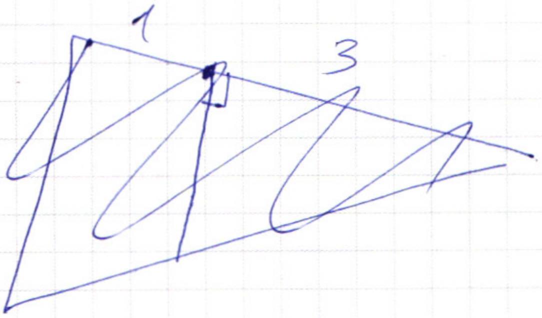
$DX^2 = \sqrt{4r^2 - 4R^2 + 3}$

$DX^2 = (2r)^2 \cdot \sin^2\alpha$



$4r^2 \cdot \sin\alpha = 4r^2 - 4R^2 + 3$





$x^2 = 4R^2 - 4 = 4(R-1)(R+1)$

$AD^2 = 1 + 4R^2 - 4 = \frac{(4R^2-3)}{4R^2}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5
кол-во больших	20	18	18	14	14	14	8	8	14	8	3

x	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f(x)$	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4
кол-во больших	8	2	4	8	4	1	8	0	4	4

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \iff f(x) < f(y)$$

Ответ: $\overset{8}{4+4}+0+8+1+4+8+4+2+8+3+8+14+8+8+14+14+14+18+18+20 =$

21, 29, 33, 35, 43, 46, 54, 68, 76, 84, 98, 112, 126, 144, 162, 182

$= \underline{182}$

2 4 4 5 5 5 5

30

16

9

7

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

341

$f: Q^+$

кол-во $(x;y) \in N$

$1 \le x \le 21$

$1 \le y \le 21$ и $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(a;b) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(7) = 3$

$f($

2 3 5 7 11 13 17 19

$f(6) = 1$

$f(14) = 4$

$9+6+4\times3+2+2+1+1+1+1 = \boxed{29}$

$f(19) = 9$

$\cancel{f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right)}$

$f(20) = f(2) + f(10) = f(2) + f(2) + f(5) = 1 + 1 + 2 = 4 < 9$

$f\left(\frac{3}{8}\right) = \underbrace{f(3)}_{>0} + \underbrace{f\left(\frac{1}{8}\right)}_{<0} =$

$f(1 \cdot 2) = f(1) + f(2) = f(2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) = 0$

$= f(3) - f(8) =$

$= f(1)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = f\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = f(1) = 0$

$-1 \quad 1$

$f\left(p \cdot \frac{1}{p}\right) = f(1) = 0$

$f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) = [p] + f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -[p]$

$x \in N, x \ge 2$

$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = N + (-N)$

$> 0 \quad < 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

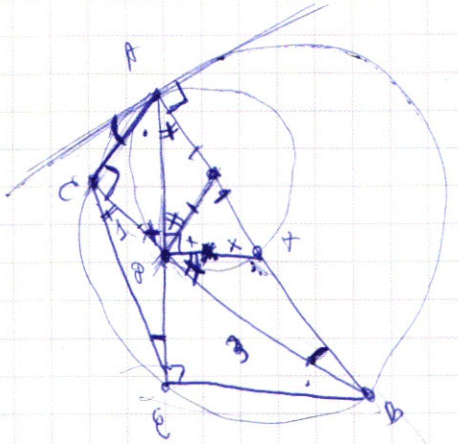
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$R-?$ $r-?$ $[CABE]$

$(2R-2r)\cdot 2R = 9$

$\frac{9}{4} = R^2 - Rr$

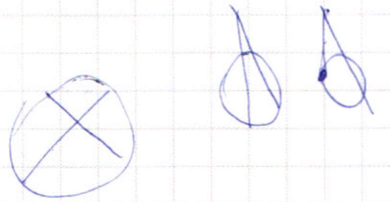
$AD\cdot DE = CD\cdot DB$

$\frac{AD}{AE} = \frac{Dx}{EB} = \frac{2r\sin A}{2R\sin A} = \frac{r}{R}$

$AD = AE\cdot\frac{r}{R}$

$DE = AE - AE\cdot\frac{r}{R} = \frac{R-r}{R}\cdot AE$

$\frac{AD}{DE} = \frac{AE\cdot\frac{r}{R}}{AE\cdot\frac{R-r}{R}} = \frac{r}{R-r}$



$DE^2\cdot\frac{r}{R-r} = 3$

$(a;b)=1$

$\frac{a}{b}$

$f(a) - f(b)$

$f(p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}) - f(q_1^{\beta_1}\cdots q_m^{\beta_m}) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{2}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{2}\right] + \dots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{2}\right] - \beta_1\left[\frac{q_1}{2}\right] - \beta_2\left[\frac{q_2}{2}\right] - \dots - \beta_m\left[\frac{q_m}{2}\right]$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

11 12 13 14 15

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$ $\quad \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le 3x - 1$ $\quad 2x - 1 \ge 0$

$x\in\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ $\quad 2x \ge 1$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le 1 - x$ $\quad x\in\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ $\quad x \ge \frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)