МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

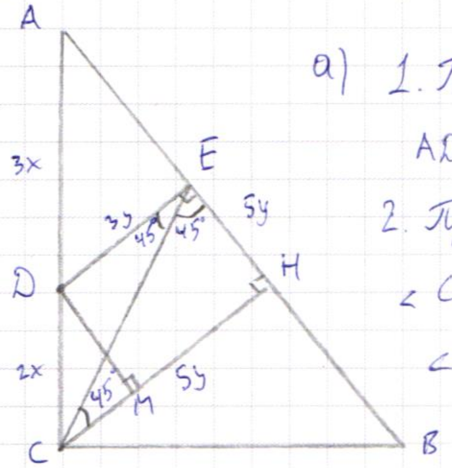
$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



а) 1. Пусть x – коэфф. пропорциональности, тогда $AD = 3x$, $AC = 5x$, $DC = 2x$

2. Проведём $CH \perp AB$, т.к. $DE \perp AB$, то $DE \parallel CH$

$\angle CED$ и $\angle ECH$ – внутренние накрест лежащие

$\angle CED = \angle ECH = 45^\circ$, $\angle CEH = 90^\circ - \angle ECH = 45^\circ$

3. $\triangle CAH \sim \triangle DAE$ (по 2 углам)

Пусть y – коэффициент пропорциональности, то

$DE = 3y$, $CH = 5y$

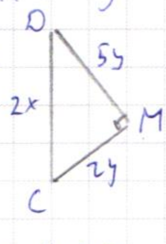
4. $\triangle CEH$ – равнобедренный, $CH = EH = 5y$, $CE = 5\sqrt{2}y$

5. Проведём $DM \perp CH$, то $MDEH$ – прямоугольник, $MD = EH = 5y$

$DE = MH = 3y$, $DM \parallel AB$

$CM = CH - MH = 2y$

6. $\triangle CDM$:



$tg \angle CDM = \frac{2y}{5y} = \frac{2}{5}$

7. т.к. $DM \parallel AB$, то $\angle CDM = \angle BAC$ как соответственные, тогда

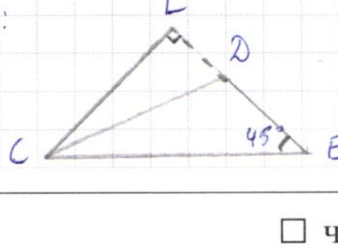
$tg \angle BAC = \frac{2}{5}$

б) 1. $AC = \sqrt{29}$, $5x = \sqrt{29}$ $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

2. $\triangle CDM$: $DC = \frac{2\sqrt{29}}{5} = 2x$

Из теоремы Пифагора: $DC^2 = CM^2 + DM^2$, $\frac{4 \cdot 29}{25} = 29y^2$, $y = \frac{2}{5}$

3. $\triangle CDE$:



$CE = 5\sqrt{2}y = 2\sqrt{2}$, $DE = 3y = \frac{6}{5} = 1{,}2$

Проведём $CL \perp DE$, $\angle CED = 45^\circ$, то $CL = LE = \frac{CE}{\sqrt{2}} = 2$, $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CL \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}2 = 1{,}2$

Ответ: $\frac{2}{5}$; $1{,}2$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

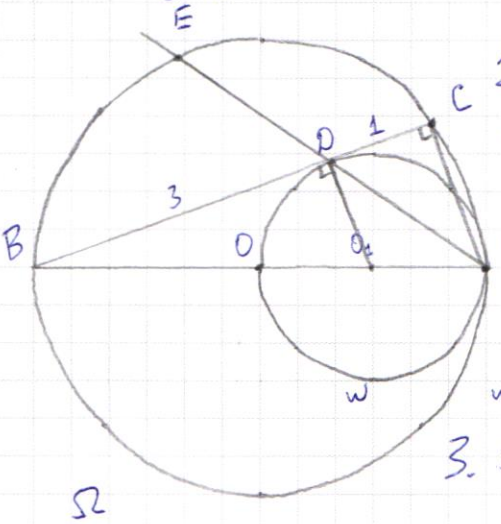
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Ответ: $\frac{2}{5}$, 1,2

№5



1. Пусть R - радиус Ω, а r - радиус w. Проведём AC, $\angle BCA = 90°$, т.к. опирается на диаметр AB в окружности Ω

2. Пусть O - центр Ω, O_1 - центр w. Проведём $O_1D \perp BC$, D - точка касания BC и w, т.к $O_1D \perp BC$ и $AC \perp BC$, то $O_1D \parallel AC$

3. По обобщённой теореме Фалеса: $\frac{BD}{DC} = \frac{BO_1}{O_1A}$ ($\angle ABC$)

4. $BO_1 = 2R - r$, $O_1A = r$, тогда $3 = \frac{2R - r}{r}$, $R = 2r$

5. $\triangle O_1BD \sim \triangle ABC$ (по 2 углам), тогда $\frac{BD}{BC} = \frac{O_1D}{AC} = \frac{3}{4}$

$AC = \frac{4}{3}r$.

6. $\triangle ABC$: $\angle BCA = 90°$, По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$(2R)^2 = \left(\frac{4}{3}r\right)^2 + 4^2$

$16r^2 = \frac{16}{9}r^2 + 16$

$8r^2 = 9$, $r = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

7. $\angle BAE$: По обобщённой теореме Фалеса: $\frac{BO}{AO} = \frac{ED}{AD}$, т.к. $OD \perp AD$ (опирается на диаметр w), $BE \perp AE$ (опирается на диаметр Ω)

$\frac{ED}{AD} = \frac{1}{1}$, BD - медиана $\triangle ABE$, CD - медиана $\triangle ACE$, $S_{ABD} = S_{EBD}$,

$S_{ACD} = S_{ECD}$, значит $S_{BACE} = 2 \cdot (S_{ABD} + S_{ACD}) = 2 \cdot S_{ABC}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$ Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $4\sqrt{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

Подставим вместо $a \to 1$

$f(b) = f(1) + f(b)$, то $f(1)=0$

Подставим вместо $b \to \frac{1}{a}$

$f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$, то $f(a) = -f(\frac{1}{a})$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$

Значит для каждого $x \in N$, $x \in [1;21]$, количество пар решений $f(x/y)<0$, будет количеством $y \in N$, $y \in [1;21]$, таких, что $f(y) > f(x)$

Найдём значение $f(x)$ для всех x от 1 до 21 и посчитаем количество пар для каждого значения x

$f(1) = 0 \longrightarrow 20$ пар

$f(2) = [1] = 1 \longrightarrow 18$ пар +

$f(3) = [1,5] = 1 \to 18$ пар +

$f(4) = f(2)+f(2) = 2 \to 14$ пар +

$f(5) = [2,5] = 2 \to 14$ пар +

$f(6) = f(2)+f(3) = 2 \to 14$ пар +

$f(7) = [3,5] = 3 \to 8$ пар +

$f(8) = f(2)+f(4) = 3 \to 8$ пар +

$f(9) = f(3)+f(3) = 2 \to 14$ пар +

$f(10) = f(2)+f(5) = 3 \to 8$ пар +

$f(11) = [5,5] = 5 \to 3$ пары +

$f(12) = f(2)+f(6) = 3 \to 8$ пар +

$f(13) = [6,5] = 6 \to 2$ пары +

$f(14) = f(2)+f(7) = 4 \to 4$ пары

$f(15) = f(3)+f(5) = 3 \to 8$ пар +

$f(16) = f(2)+f(8) = 4 \to 4$ пары +

$f(17) = [8,5] = 8 \to 1$ пара +

$f(18) = f(2)+f(9) = 3 \to 8$ пар +

$f(19) = [9,5] = 9 \to 0$ пар +

$f(20) = f(2)+f(10) = 4 \to 4$ пары +

$f(21) = f(3)+f(7) = 4 \to 4$ пары $= 182$ пары +

Ответ: 182

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть q - знаменатель прогрессии, что $b = a\cdot q$, $c = a\cdot q^2$, $q \neq 0$

$ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2aqx+aq^2=0$

$D=4a^2q^2-4a^2q^2=0$

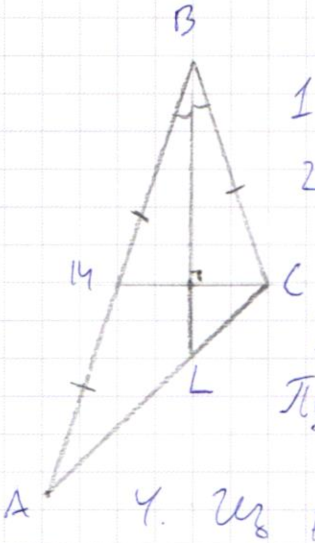
$x=-\frac{2aq}{2a}=-q$ - четвёртый член прогрессии

$-q=aq^3$, т.к. $q\neq 0$

$-1=aq^2=c$

$c=-1$ Ответ: -1

№2



1. BL - биссектриса, CM - медиана

2. $\triangle MBC$: BL - высота и биссектриса, значит $MB=BC$

3. Пусть $BC=x$, тогда $AB=2x$

Пусть $AC=y$.

4. Из неравенства треугольника

$2x+x>y$

$x+y>2x$, что $x<y<3y$

$P=3x+y=1200$, значит

$x>200$, и $x<300$, тогда всего треугольников возможно 99

Ответ: 99

№6

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1+3}{4} = 1 \\ x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2}) = (x-1)(2x+1)$

$2x^2 - x - 1 \le x + |2x-1|$ $\quad 2x-1 \ge 0$

$I: (x-1)(2x+1) \le 3x-1$ $\quad x \ge \frac{1}{2}$

$2x^2 - 4x \le 0$

$2(x-2)x \le 0$

$+ \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad - \quad 2 \quad +$

$2x^2 - (a+1)x - (b+1) \le x + |2x-1|$

$2x^2 - (a+2)x - (b+1) \le |2x-1|$

1) $2x^2 - (a+2)x - (b+1) \le 2x - 1$ $\quad$ 2) $2x^2 - ax - (b+2)$

$D = a^2 + 8b - 16$

$2x^2 - (a+4)x - b \le 0$

$D = a^2 + 8a + 16 + 8b \ge 0$

~~$x = a+4$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

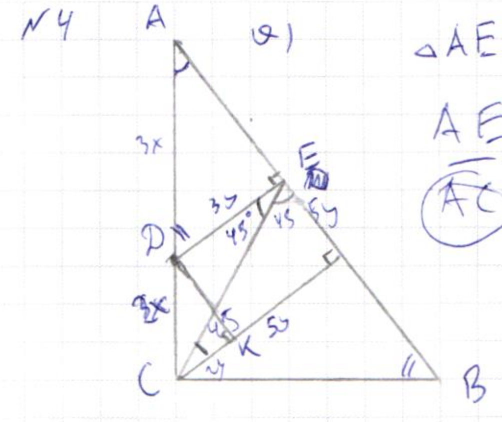
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 а)



$\triangle AED \sim \triangle ACB$ Найти $DE : AE$

$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$ $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$AC \cdot AD = AE \cdot AB = 15x^2$

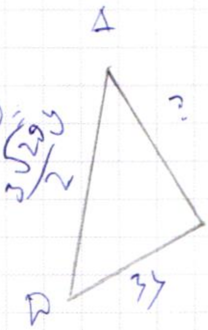
$\frac{AE}{5x} = \frac{3x}{AB}$.

$4x^2 = 4y^2 + 25y^2 = 29y^2$

$2x = \sqrt{29}y$

$x = \frac{\sqrt{29}}{2}y$

$\triangle AED$:



$AE^2 = \left(\frac{9 \cdot 29}{4} - 9\right)y^2 =$

$= y^2\left(\frac{9}{4}(29-4)\right)$

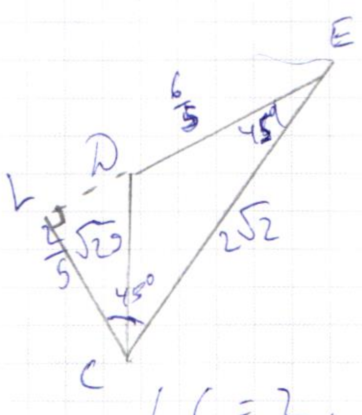
$AE = y\left(\frac{15}{2}\right)$

$\frac{DE}{AE} = \frac{3y}{\frac{15}{2}y} = \frac{2}{5}$.

ОТВЕТ

б) $AC = 5x = \sqrt{29}$ $x = \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{\sqrt{29}}{2}y$

$y = \frac{2}{5}$



$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$

ОТВЕТ

$LC = 2$, $LE = 2$

№7 $f(2) = 1$, $f(3) = 1$, $f(5) = 2$, $f(7) = 3$, $f(11) = 5$, $f(13) = 6$, $f(17) = 8$, $f(19) = 9$

$f(1) = 0$, $f(6) = 2$, $f(10) = 3$, $f(14) = 4$ $f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$ $f(1) = f(p) + f(\frac{1}{p})$

$f(4) = 2$, $f(8) = 3$, $f($ $f(p) = -f(\frac{1}{p})$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $b = aq$, $c = aq^2$, $q \neq 0$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

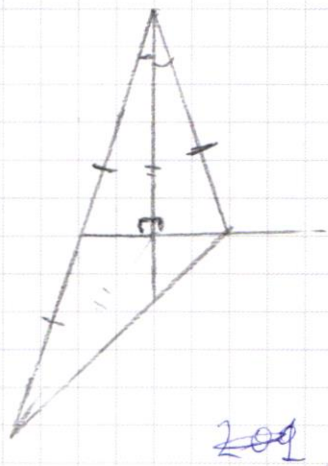
$D = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

$x = \frac{-2aq}{2a} = -q$

$aq^3 = -q$ Найти aq^2

$aq^2 = -1$ ОТВЕТ

№2. $P = 1200$



$2x + x > y$

$2x < x + y$

$x < y < 3x$.

$P = 3x + y = 1200$

$x < 300$

$x > 200$

~~201~~ $300 - 200 - 1 = 99$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3 $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$xy-2x-y+2\geq 0$

$(y-1)y-2(y-1)-y+2\geq 0$

$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$y^2-4y+4\geq 0$, верно

$\left(\frac{y+2}{4}\right)y-\frac{y+2}{2}-y+2\geq 0$

$(2)x^2-(4)x+(y^2-4y+3)=0$

$\frac{y^2+2y-2y+4-4y+8}{4}$ $y^2-4y+12\geq 0$ верно!

$D=\cancel{16-8y^2+16y+24}=4^2-8(y^2-4y+3)=4^2-8(y+1)(y+3)$

$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2+x\cdot(6-5y)+5(y-1)=0$

$D=36+25y^2-60y-40y+40=25y^2-100y+76$

$4x^2-5xy+2x+y-2+y^2=0$

$4x^2+x(2-5y)+(y^2+y-2)=0$

$D=4+25y^2-20y-16y^2-16y+32=9y^2-36y+36=9(y-2)^2$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{5y-2+3y-6}{8}=y-1 \\ x=\frac{2y+4}{8}=\frac{y+2}{4} \end{array}\right.$ $y\geq 2x$

~~$4x=y+2$~~

$2(y-1)^2+y^2-4y+4-4y+3=0$

$2\left(\frac{y+2}{4}\right)^2+y^2-y-2-4y+3=0$

$2y^2-4y+2+y^2-4y+4-4y+3=0$

$\frac{y^2+4y+4}{8}+y^2-y-2-4y+3=0$

$3y^2-12y+9$

$y^2+4y+4+8y^2-8y-16-32y+24=0$

y^2-4y+3 $y=-1$ $x=0$

$y=-3$ $x=-2$

$9y^2-\cancel{28}\,36y+12$

$3y^2-12y+4$

$D=\cancel{144}-12\cdot 8=96$

$y=\cancel{\frac{12\pm 4\sqrt{6}}{6}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

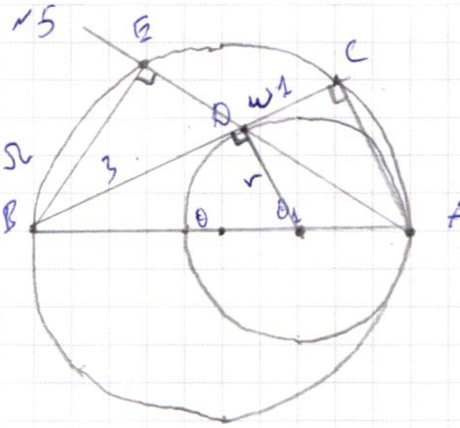
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



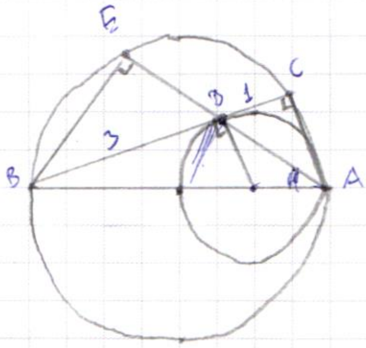
$AB = R$

$O_1D = r = O_1A = \cancel{O_1O}$

$\cancel{3(AB - r)} =$

$AB - r = 3y$ $\quad AB = 4r$

$r = y$ $\quad R = 2r$



$AB^2 = AC^2 + 16$ $\quad AC = \frac{4}{3}r$

$\left(\frac{3}{4}AB\right)^2 = r^2 + 9$

$\frac{9}{16}AB^2 = r^2 + 9$

$\cancel{AB^2 = \frac{16}{9}r^2 + 16}$

$16 + \left(\frac{4}{3}r\right)^2 = (4r)^2$

$16 + \frac{16}{9}r^2 = 16r^2$

$9 + r^2 = 9r^2$

$r^2 = \frac{9}{8}$. $\quad r = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{8}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$AE = 2\cdot\sqrt{3}$

$BE = \sqrt{6}$ $\quad |\sqrt{18 - 12}|$

$S_{BDA} = \sin\alpha \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$S_{EDC} = \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\quad \frac{S_{BDA}}{S_{EDC}} = \frac{3}{1}$.

$S_{BED} = S_{BDA} = 3S_{EDC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad S_{DCA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$S = \underline{4\sqrt{2}}$ ОТВЕТ

№7
$f(1) = 0 \to 20$
$f(2) = 1 \to 18$
$f(3) = 1 \to 18$
$f(4) = 2 \to 14$
$f(5) = 2 \to 14$
$f(6) = 2 \to 14$
$f(7) = 3 \to 8$
$f(8) = 3 \to 8$
$f(9) = 2 \to 14$
$f(10) = 3 \to 8$
$f(11) = 5 \to 3$
$f(12) = 3 \to 8$
$f(13) = 6 \to 2$
$f(14) = 4 \to 4$
$f(15) = 3 \to 8$
$f(16) = 4 \to 4$
$f(17) = 8 \to 1$
$f(18) = 3 \to 8$
$f(19) = 9 \to 0$
$f(20) = 4 \to 4$
$f(21) = 4 \to 4$

$38 + 32 + 28 + 16 + 22 + 11 +$
$+ 6 + 12 + 9 + 4 + 4 =$
$= 70 + 44 + 33 + 18 + 17$
182 ОТВЕТ

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)