МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x	f(x)	$\frac{1}{x}$	$f(\frac{1}{x})$
1	0	0	0
2	1		0
3	1		0
4	2		-1
5	2		-1
6	2		-1
7	3		-2
8	3		-2
9	2		-1
10	3		-2
11	5		-4
12	3		-2
13	6		-5
14	4		-3
15	3		-2
16	4		-3
17	8		-7
18	3		-2
19	9		-8
20	4		-3
21	4		-3

$1+2+10+4+4.$

21

22

$20+36+56+48+16+6=$

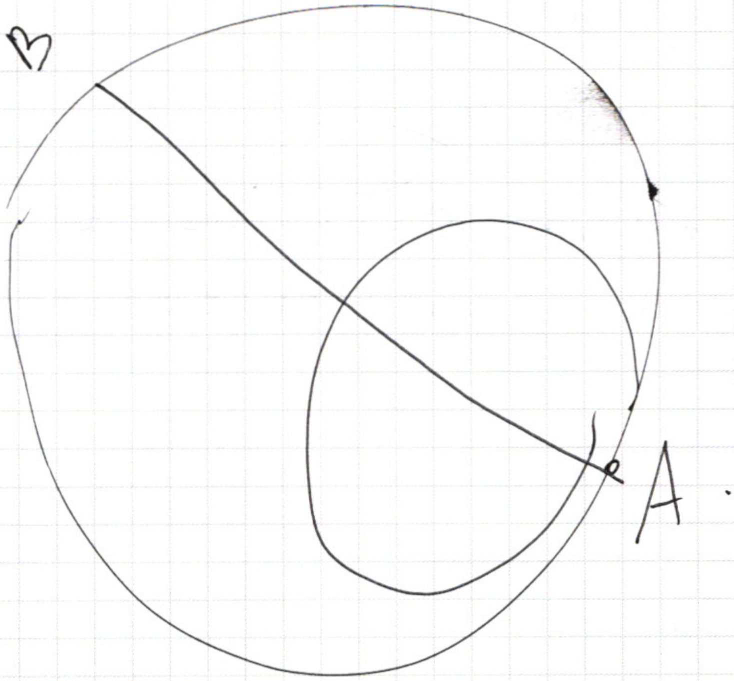
$=56\cdot 2+70=112+70=182.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

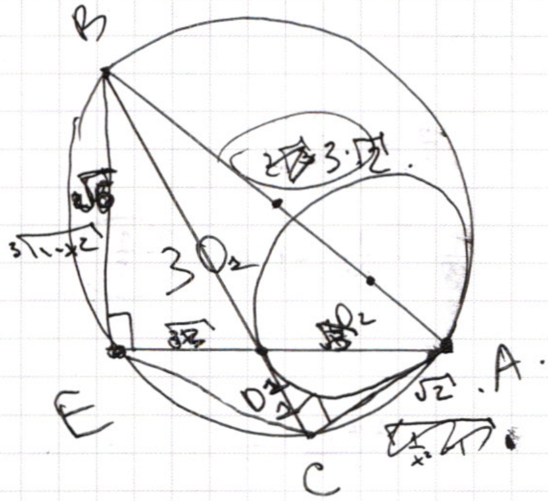

B
A

$\cancel{x(x+2r)} = 9,$

$2R(2R-2r) = 9.$

$\cancel{f(\tfrac{1}{2})} + f(2) = \underline{1}.$

$1.$



$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - 1 + 16 = 4R^2 \\ \left(3x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + 9 - 9x^2 = 4R^2. \end{cases}$$

$\dfrac{1}{x^2} - 1 + 16 = 9 - 9x^2 + \left(3x + \dfrac{1}{x}\right)^2.$

$f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{y}\right).$

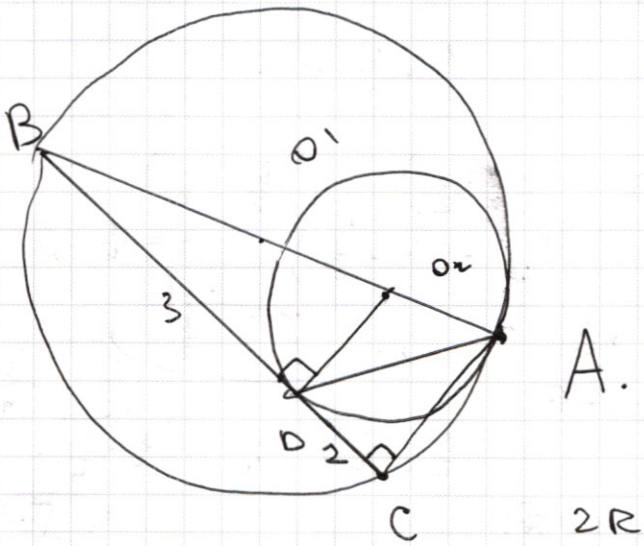
$\cancel{\dfrac{2R - r}{2R} = 3}$

$\dfrac{2R - r}{r} = 3$

$\dfrac{2R}{r} = 2$

$\dfrac{2R}{r} = 4.$

$R = 2r.$



$2R(R) = 2R^2.$

$3\sqrt{2}.$

$CA = \sqrt{2}.$

4

$18 - 16 = 2.$

$f(2) = 3$

$f(3) = 3$

$f(5) = 2$

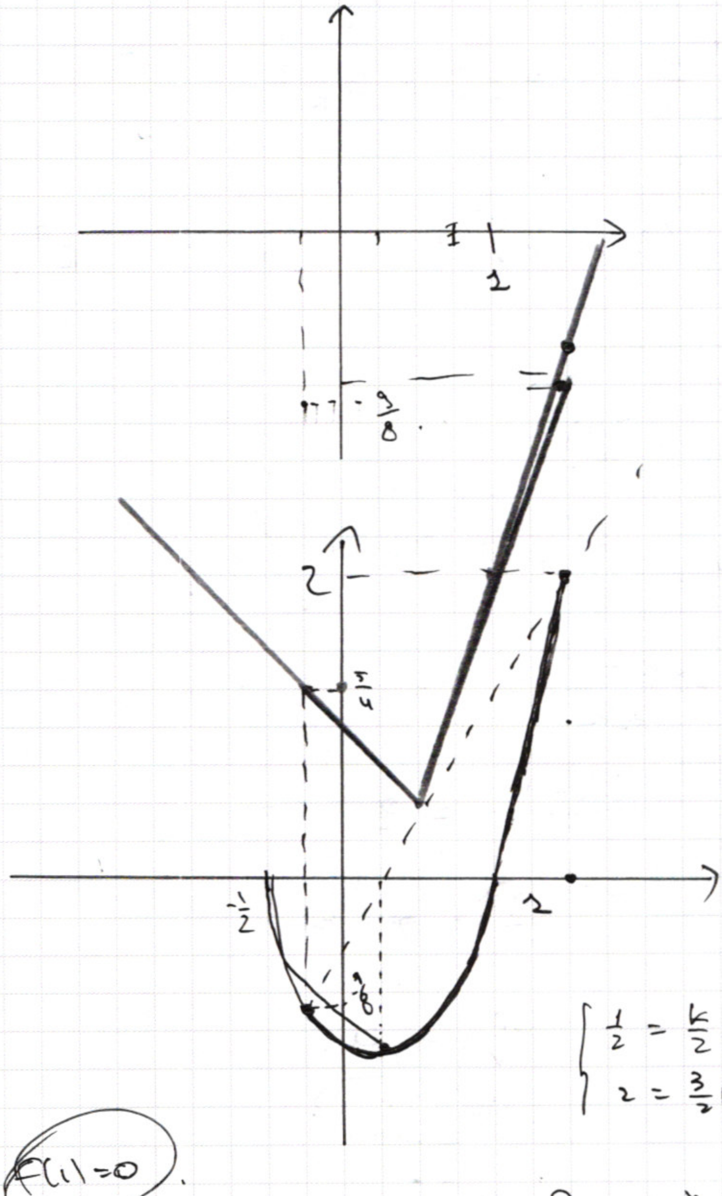
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}.$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}.$

$\frac{1 \pm 3}{4} =$

$-\frac{1}{2}.$

$\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 =$

$= 2.$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 =$

$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{3}{2}; 2\right).$

$\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + b.$

$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{k}{2} + b \\ 2 = \frac{3}{2}k + b \end{cases}$

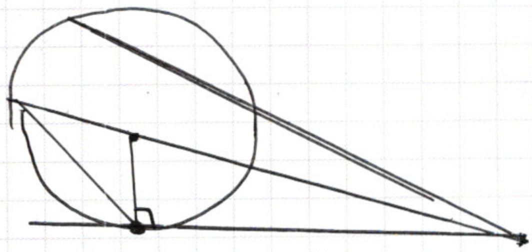
$\Rightarrow k = \frac{3}{2}$

$b = -\frac{1}{4}.$

$\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{5}{8}.$

$f(1) = 0.$

$\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3} = \sqrt{2}.$



$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4}.$

$2R - r = \frac{3}{2}r$

$9 = 2R^2 \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2R = \sqrt{2} \cdot 3.$ $\frac{1}{2}R = r$ $\quad R = 2r.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$(x-1)(y-2)\geq 0$$
$$\begin{cases} y \geq 2x \\ y^2+4x^2-4xy = (x-1)(y-2). \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3. \end{cases}$$

$y-2x=$

$x\geq \frac{1}{2}$:

$x<\frac{1}{2}$: $1-x$.

$$\begin{cases} (b-2a)^2=ba \\ 2a^2+b^2=3. \end{cases}$$

$b^2+4a^2-4ba=ba.$

$$\begin{cases} 5ba=3+a^2 \\ 5ba=6-b^2. \end{cases}$$

$2a^2=\cancel{b^2-3}$ $3-b^2$

$b^2-5ba+4a^2=0 \iff b=\frac{5a\pm 3a}{2}=4a;\ a.$

$3a^2=3 \iff a^2=1 \iff b^2=1$

$a^2=\frac{1}{2}$ $b^2=2.$

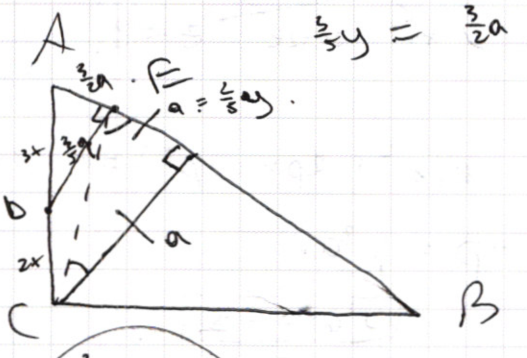
$(b-4a)(b-a)=0.$

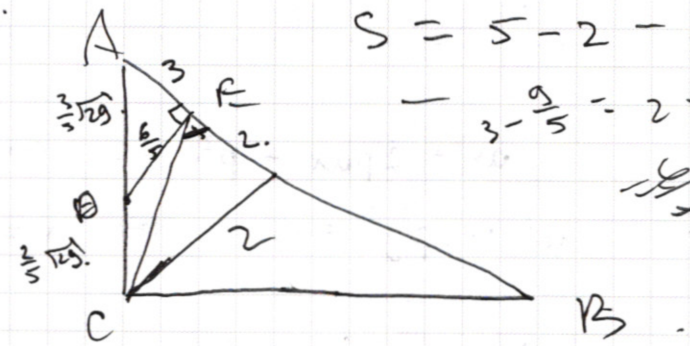
$y-2x=b-2a\geq 0.$

$x=2 \quad y=3.$

$2=9+16-24$

$\frac{3}{5}y=\frac{3}{2}a.$





$S=5-2-$

$-\ 3-\frac{9}{5}=2\frac{4}{5}$

$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{5}$

$tg\alpha=\frac{2}{5}.$ $5\sin\alpha=2\cos\alpha.$

$\cos=\frac{5}{2}\sin\alpha.$

$\cos^2+\sin^2=1 \iff \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+1\right)\sin^2=1.$

$$\boxed{\sin=\frac{2}{\sqrt{29}} \quad \cos=\frac{5}{\sqrt{29}}.}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$xy-2x-y+2=(1-x)(2-y)$

$6x>1200 \Leftrightarrow$

$\boxed{x>200}$.

$(y-2)^2+2x^2-4x+1=0$.

$16+8=24 \quad \frac{4\pm\sqrt{24}}{4}$

x 2x z

x+l 2x+2l z−3l.

$\boxed{z<600}$

$2(x-1)^2+y^2-4y+1=0$.

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$.

$x\in[\cancel{2};3]$. $y\in[0;4]$.

$\cancel{z=400}$.

$\boxed{\begin{matrix} z=300 \\ x=300\end{matrix}}$.

$y-2x=\sqrt{(1-x)(2-y)}$

$\begin{cases} y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2. \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$

z - большая.

2x - большая.

$|z_1=2x|$

x+l.

x 2x z

x+l 2x+2l z−3l.

a

pa

pa

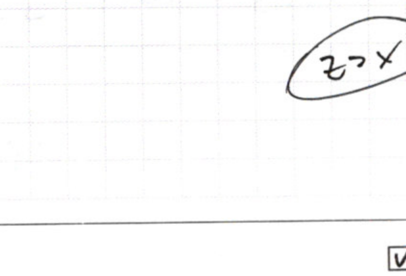
p³a.

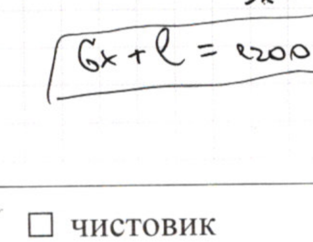
$ax^2+2pax+p^2a=0 \Leftrightarrow a(x^2+2px+p^2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(x+p)^2=0. \Leftrightarrow x=-p=p^3a.$

$\boxed{p^2a=-1}$.

$2(z-3l)=x+l$.





$3x+l=z$.

z>x.

$\boxed{6x+l=1200.}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

Пусть q - знаменатель прогрессии. $(q \neq 0)$.

$b = aq$, $c = aq^2$. Тогда из ус-я:

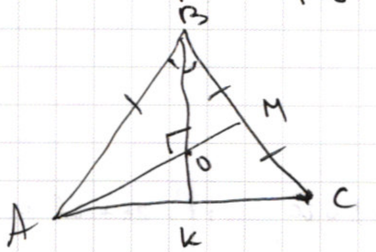
$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0 \Leftrightarrow a(x+q)^2 = 0$.

Корнем ур-я является $x = -q \overset{\text{(по усл.)}}{=} aq^3 \Rightarrow aq^2 = -1 = c$.

Ответ: $c = -1$. при $q \neq 0$ (при $q = 0$ $c = 0$).

Задача №2.

Рассмотрим треугольник, в котором выполнено условие:

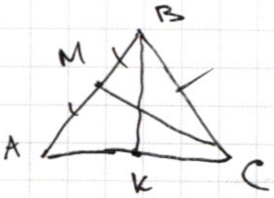


AM - медиана, BK - бис.

$BK \cap AM = O$ $\quad \Delta ABM$ - р/б по признаку $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = BM = MC$.

Рассмотрим произвольный Δ, в котором ~~один~~ выполнено соотношение сторон: $\frac{AB}{BC} = 2$. Пусть CM - медиана.



$MB = BC$ из предположения. BK - бис.

в ΔBMC: BK - бис. р/б $\Delta \Rightarrow BK \perp MC$.

Значит для существования такого треугольника достаточно и необходимо выполнение неравенств треугольника и соотношение двух сторон $= 2$.

Тогда пусть есть треугольник со сторонами x, $2x$ и z.

Запишем систему:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x+2x+z=1200 \\ x+2x>z \\ 2x+z>x \\ x+z>2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+z=1200. \ (1) \\ 3x>z. \ (2) \\ z>x. \ (3) \end{cases} \Rightarrow$$

(из (1) и (3))

$\Rightarrow$ $6x>1200$ $\Leftrightarrow$ $x>200.$ $\Rightarrow$ (из (1)) $z<600.$ Заметим, что при

$z\leq 300$ (из (1)) $x\geq 300$, но $z>x$ противоречие $\Rightarrow$ $z>300.$ и $x<300.$

При $x\in(200;300)\wedge x\in\mathbb{Z}$:

(из (1))

$300<z<600$ $\Rightarrow$ $z>x$ $\wedge$ $3x>z.$ Выполнено.

Значит подходит любой целый $x\in(200;300).$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего 99 треугольников

Ответ: 99.

(треугольник задаётся тремя сторонами $\Rightarrow$ для каждого x - единственный и свой Δ, т.к. $x\neq 2x$)

Пусть вышло, что какие-то 2 треугольника совпали:

стороны первого: x, $2x$, z, стороны второго $x+l$, $2x+2l$ и $z-3l$.

$2x+2l\neq x$ и $2x+2l\neq 2x$ $\Rightarrow$ $\underline{2x+2l=z}$. $x\neq x+l$ $\Rightarrow$ $x=z-3l \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$z=x+l$~~ $2x=x+l$

Тогда: $z-2x=x+l$ $\Leftrightarrow$ $z=3x+l.$

Тогда: $x+2x+z=6x+l=1200$ $\Rightarrow$ $x<\frac{1200}{6}=200.$

(!!), т.к. $x>200.$ Значит такого не может быть.

Задача №3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2x)^2=(x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \\ y\geq 2x \\ (x-1)(y-2)\geq 0. \end{cases}$$

Замена: $a=x-1$; $b=y-2$:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y - 2x = b - 2a.$

Из нашей системы следует:

$$\begin{cases}(b-2a)^2 = ba\\ 2a^2+b^2=3.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 5ba + 4a^2 = 0 \\ 2a^2+b^2=3\end{cases} \Leftrightarrow$$

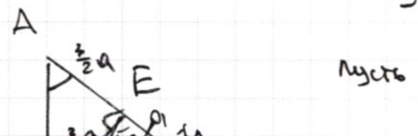
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(b-4a)(b-a)=0\\ 2a^2+b^2+3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=4a\\6a^2=3\end{cases}\\ \begin{cases}b=a\\3a^2=3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2=\frac12\\ b^2=2.\end{cases}\\ \begin{cases}a^2=1\\ b^2=1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

При этом $\begin{cases}ab\geq 0\\ b\geq 2a\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\frac{1}{\sqrt2}\\ b=\sqrt2\end{cases}\\ \begin{cases}a=-\frac{1}{\sqrt2}\\ b=-\sqrt2\end{cases}\\ \begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.\\ b\geq 2a\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\frac{1}{\sqrt2}\\ b=\sqrt2\end{cases}\\ \begin{cases}a=-\frac{1}{\sqrt2}\\ b=-\sqrt2.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt2}+1\\ y=\sqrt2+2\end{cases}\\ \begin{cases}x=1-\frac{1}{\sqrt2}\\ y=2-\sqrt2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt2}+1; \sqrt2+2\right); \left(1-\frac{1}{\sqrt2}; 2-\sqrt2\right)\right\}.$

Задача №4.

a). 

Пусть CH - высота $\triangle ABC$. $\angle CED = 45^\circ$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CEH = 90^\circ - \angle CED = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow EH = CH.$

$\triangle ADE \sim \triangle ACH$ по 1-ому признаку ($\angle CAB$ - общ., $\angle AED = \angle AHC = 90^\circ$). Коэф. подобия $= \frac35$, т.к. $AD/AC = \frac35$.

Пусть $CH = a. = EH$. Тогда $DE = \frac35 a$.

$EH = \frac25 AH = a. \Rightarrow AE = \frac35 AH = \frac32 a$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

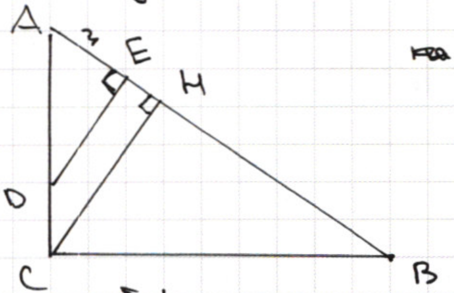
Страница №3

(Нумеровать только чистовики)

из $\triangle DAE$: $tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{3}{5}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{5}$.

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$.

б)



$\angle BAC = \alpha$

Найдём $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

$$\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{5} \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{5}{2}\sin\alpha \\ \frac{29}{4}\sin^2\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \end{cases}$$

$AE = AD \cdot \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{29} = 3$.

$AH = AC \cdot \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{29} = 5$.

$CH = AC \cdot \sin\alpha = \sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = 2$.

$DE = AD \cdot \sin\alpha = \frac{3}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$.

$S_{\triangle CDE} = S_{AHC} - S_{CEH} - S_{ADE} = \frac{AH \cdot HC}{2} - \frac{EH \cdot CH}{2} - \frac{AE \cdot DE}{2} =$

$= \frac{5 \cdot 2}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot \frac{6}{5}}{2} = 5 - 2 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $S_{\triangle CED} = \frac{6}{5}$.

Задача №6.

$y = ax + b$ - прямая

Рассмотрим графики функций $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x - 1|$

на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

$y = 2x^2 - x - 1$: $x_в = \frac{1}{4}$. $y_в = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$.

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = -\frac{1}{2}; 1$.

при $x = -\frac{1}{4}$: $y = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$

при $x = \frac{3}{2}$: $y = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 2$.

$y = x + |2x - 1|$: при $x \geq \frac{1}{2}$ $y = 3x - 1$.

при $x < \frac{1}{2}$ $y = 1 - x$.

при $x = \frac{1}{2}$: $y = \frac{1}{2}$. при $x = -\frac{1}{4}$ $y = \frac{5}{4}$.

при $x = \frac{3}{2}$: $y =$

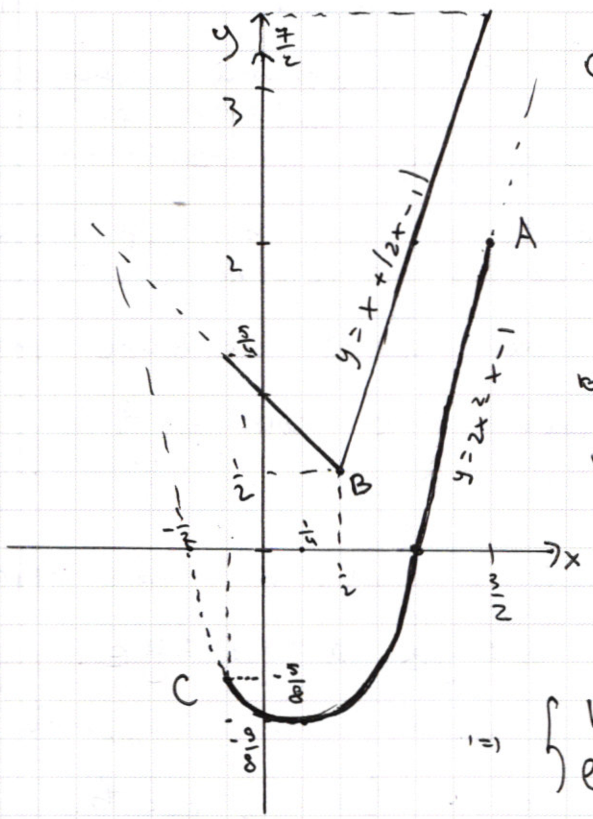
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Обозначим точки A $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

B $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

C $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$

Рассмотрим прямую, ~~через~~ ~~которую~~ проходящую через т. A и B.

ур-е прямой: $y = kx + l$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{k}{2} + l \\ 2 = \frac{3}{2}k + l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ l = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$. Рассмотрим значение ~~в~~ при $x = -\frac{1}{4}$:

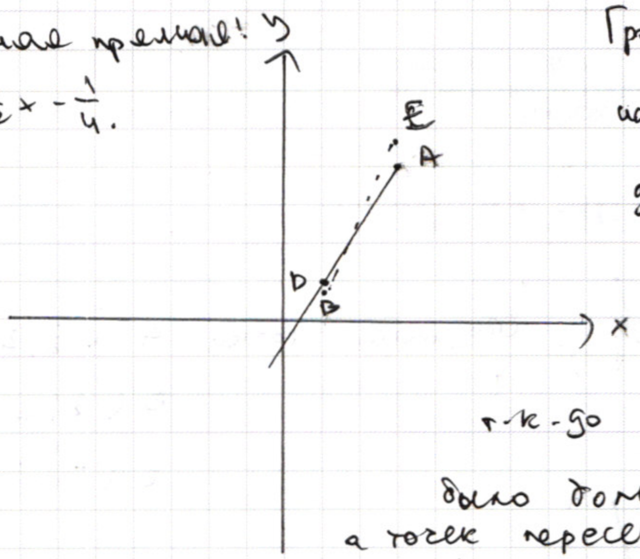
$y = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{8}$. $\Rightarrow$ $C \in$ нашей прямой.

Тогда под условие подходит $a = \frac{3}{2}$ и $b = -\frac{1}{4}$, т.к. это будет прямая, лежащая не выше графика $y = x + |2x-1|$ и не ниже графика $y = 2x^2 - x - 1$, т.е.:

$\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow 2x^2 - x - 1 \le \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \le x + |2x-1|$.

Пусть $\exists$ другие a и b. ~~другие~~ Это значит, что эта прямая не пройдёт хотя бы через одну из точек A и B (т.к. иначе коэфф.-ты совпали с найденными). Пусть она не совпала с A: При этом прямая должна иметь значение при $x = \frac{3}{2}$: $y > 2$ (пусть точка E), т.к. иначе невыполн. условие или предположение. При этом значение при $x = \frac{1}{2}$: $y \le \frac{1}{2}$ (пусть т. D), т.к. иначе невыполнено условие.

исходная прямая! $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$.

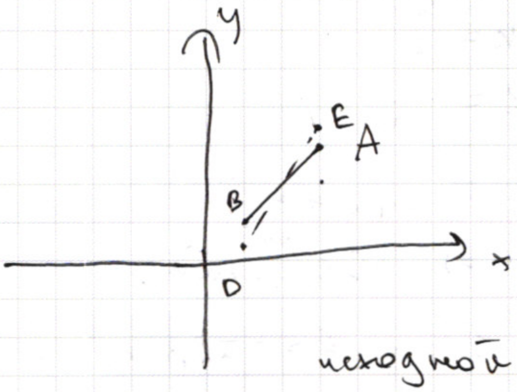


Графически, прямая пересекает исходную => при ~~$x < \frac{1}{2}$~~ для любого $x < \frac{1}{2}$ значение функции будет меньше значения исходной прямой (при $x > x_0$, где x_0 - пересеч.) т.к. до точки пересечения значение было больше, т.к. $y_E > y_A$ по предп., а точек пересеч. не больше 1.

Значит и при $x = -\frac{1}{4}$ она имеет меньшее значение, но тогда не выполнено условие, т.к. при $x_0 = -\frac{1}{4}$:

$2x_0^2 - x_0 - 1 > ax + b$.

Если прямая не совпала с B, то снова есть точка пересеч. с исходной прямой, т.к. $y_D < y_B$, а $y_A \leq y_E$, где D и E - точки прямой с коорд. по x $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$ соотв.



Значит значение при $x = -\frac{1}{4}$ снова меньше значения исходной прямой => условие невыполн.

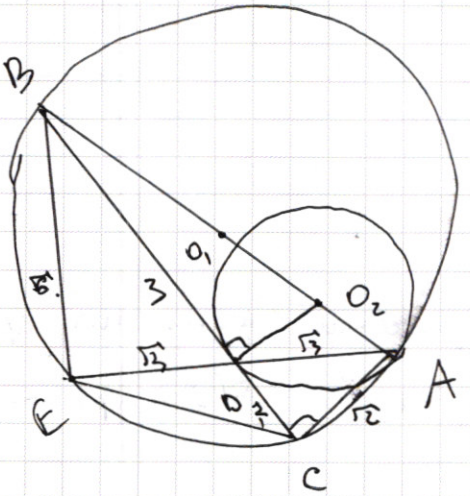
А значит подходит только исходная прямая.

Ответ: $\{(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})\}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача №5.

$O_2 \in BA$, т.к. окружности касаются.



$O_2D \perp BD$ по с-ву касат. (радиус к т. касания).

$\angle BCA = 90^\circ$ по с-ву впис. углов, т.к. BA – диаметр.

$\triangle BCA \sim \triangle BDO_2$ по 1-ому признаку: $\angle CBA$ – общ., $\angle BDO_2 = \angle BCA = 90^\circ$ $\Rightarrow$

$\frac{BD}{DC} = \frac{BO_2}{O_2A} = 3 = \frac{2R-r}{r}$, где r – радиус ω, R – радиус Ω.

$3 = \frac{2R-r}{r} \Leftrightarrow 4 = \frac{2R}{r} \Leftrightarrow \underline{R = 2r} \Rightarrow O_1 \in \omega$.

~~По с-ву кас~~ степень т. B отн. ω:

$BD^2 = BO_1 \cdot BA \Leftrightarrow 9 = R \cdot 2R \Leftrightarrow R^2 = \frac{3^2}{2} \Leftrightarrow R = \frac{3}{\sqrt2}$.

$r = \frac{3}{2\sqrt2}$.

т. Пифагора в $\triangle BCA$: $CA = \sqrt{18-16} = \sqrt2$. $\Rightarrow DA = \sqrt3$ (из т. Пифагора в $\triangle DCA$).

ст. т. D отн. Ω: $BD \cdot DC = ED \cdot DA \Leftrightarrow ED = \sqrt3$.

из т. Пифагора в $\triangle BED$ ($\angle BED = 90^\circ$, т.к. впис. опир. на диаметр.):

$BE = \sqrt6$.

$\sin\angle BDE = \frac{\sqrt6}{3} = \sqrt{\frac23} = \sin\angle EDC$.

$S_{BACE} = S_{BED} + S_{BCA} + S_{EDC} = \frac{\sqrt6\cdot\sqrt3}{2} + \frac{\sqrt2\cdot 4}{2} + \frac{\sqrt3\cdot 1\cdot \sin\angle EDC}{2} =$

$= \frac{3\sqrt2}{2} + 2\sqrt2 + \frac{\sqrt3\cdot\sqrt{\frac23}}{2} = \frac{7\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2} = 4\sqrt2$.

Ответ: $r = \frac{3}{2\sqrt2}$; $R = \frac{3}{\sqrt2}$; $S_{BACE} = 4\sqrt2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x	$f(x)$	$f(\frac{1}{x})$
1	0	0
2	1	-1
3	1	-1
4	2	-2
5	2	-2
6	2	-2
7	3	-3
8	3	-3
9	2	-2
10	3	-3
11	5	-5
12	3	-3
13	6	-6
14	4	-4
15	3	-3
16	4	-4
17	8	-8
18	3	-9
19	9	-9
20	4	-4
21	4	-4.

Задача №7.

Составим таблицу значений функции при $x \in [1;21] \wedge x \in \mathbb{Z}$ а также $f(\frac{1}{x})$, при тех же x.

Из условия сразу заполняются простые числа.

$f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \Leftrightarrow f(1) = 0$.

Аналогично из условия заполняются оставшиеся ~~деления~~ места для составных чисел: $f(4) = f(2) + f(2) = 2$.

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$.

$f(18) = f(9) + f(2) = 3$

$f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = \cancel{f(2)}0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = -f(\frac{1}{x})$.

Значит заполняется и ~~в~~ столбец с $f(\frac{1}{x})$.

Найти все x и y:

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f(\frac{1}{y}) > f(x)$.

Посчитаем, сколько значений и каких есть:

Всего 21 число.

$f(x) = 0$ достигается при 1 числе.

$f(x) = 1$ достигается при 2 числах.

$f(x) = 2$ достигается при 4 числах.

$f(x) = 3$ достигается при 6 числах.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x)=4$ достигается при 4 числах

$f(x)=$ 5

6

8

9

достигается при 1 числе.

способы – кол-ва x, при которых можно получить $f(x)=y$.

Тогда при $f(x)=0$ 20 вариантов получить отриц. $f\left(\frac{x}{y}\right)$ (одним способом).

20 вар., т.к. всеми последующими.

при $f(x)=1$ 18 вариантов получить отриц. $f\left(\frac{x}{y}\right)$ (двумя способами).

при $f(x)=2$ 14 вариантов получить отриц. $f\left(\frac{x}{y}\right)$ (4-мя способами).

при $f(x)=3$ 8 вариантов получить отриц. $f\left(\frac{x}{y}\right)$ (6-ю способами).

т.к. $f(x)=3$ достиг. при 6 числах.

при $f(x)=4$ 4 варианта получить отриц. $f\left(\frac{x}{y}\right)$ (4-мя способами).

при $f(x)=5, 6, 8$ и 9 соотв. 3, 2, 1 и 0 вар. получить отриц. $f\left(\frac{x}{y}\right)$ одним способом.

Значит всего вариантов:

$20+18\cdot 2+14\cdot 4+8\cdot 6+4\cdot 4+3+2+1+0=$

$=182.$

Ответ: 182 пары.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 9
(Нумеровать только чистовики)