МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

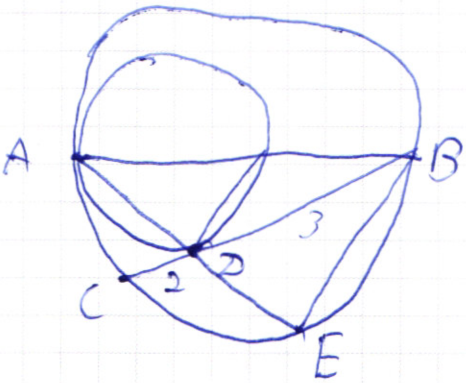
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2-18=0 \\ a\geq 6b \end{cases}$$



$x\cdot\frac{R-r}{r}\cdot x=6;$

$x^2\cdot\frac{R-r}{r}=6;$

$x^2=AC^2+4=(2R)^2-25+4=$

$=4R^2-21;$

$(4R^2-21)\cdot\frac{R-r}{r}=6;$ $\quad (R-r)\cdot\frac{4R^2-21}{r}=6$

$2R\cdot 2(R-r)=9;$ $\quad (R-r)\cdot 4R=9$

$\cancel{12R^2=}$

$4R^2-4Rr=9;$

$\frac{4R^2-21}{4Rr}=\frac{6}{9};$

$\frac{4R^2-21}{4R^2-9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3};$

$12R^2-63=8R^2-18;$

$4R^2=81;$

$R=4{,}5;$

$4\cdot 4{,}5(4{,}5-r)=9;$

$4{,}5-r=0{,}5;$

$r=4;$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(x) = f(x/y) + f(y);$ $\qquad x \in [0,5; 1];$

$f(x) \le f(y);$ $\qquad 8x - \cancel{x}\, 12x + 6 \le ax + b$

$\qquad x(-4-a) \le b;$

x	$f(x)$
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	2
10	3
11	5
12	3
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 2 3 4 5 6

$a=a;\ b=aq;\ c=aq^2;$

$a(aq^3)^2-2\cdot aq\cdot aq^3+aq^2=0;$

$\cancel{a^2q^3-2a^2q^4+aq^2=0;}$

$\cancel{aq^2(aq-2aq^2+1)=0;}$

$\cancel{aq-2aq^2+1=0;}$

$a^3q^6-2a^2q^4+aq^2=0;$

$(aq^2)^3-2(aq^2)^2+aq^2=0;$

2.

$a\quad 2a\quad 900-3a;$

$900-3a\le 3a$

$900\le 6a;$

$a\ge 150;$

$2a\le a+900-3a;$

$4a\le 900;\ a\le 225.$

3.

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0; \end{cases}$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-17=0;$

$x^2-12xy+36y^2-xy+6y+x-6=0;$

$x^2-11xy+36y^2+6y+x-6=0.$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0;$

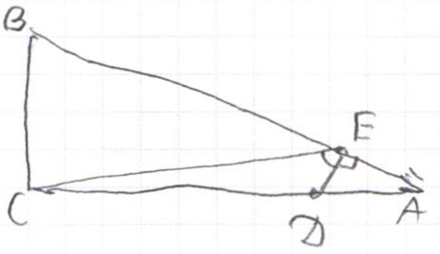
$-11xy+34y^2+10y+13x-26=0;$

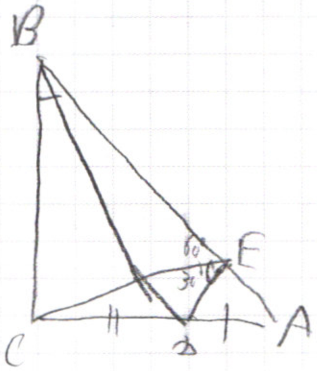
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





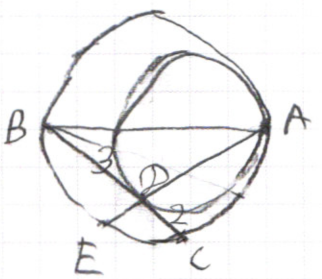
$x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}$

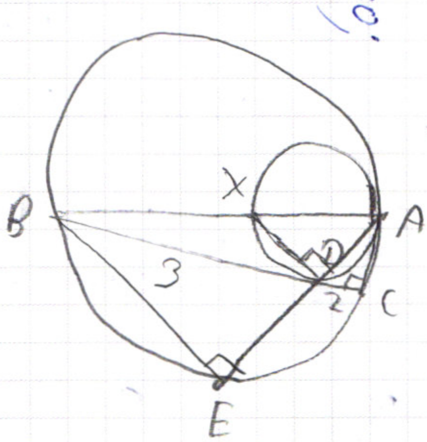
$x-6y=\sqrt{x-6}\cdot\sqrt{y-1}$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

$a^2+2b^2-18=0$

$a-6b=\sqrt{ab}$





$x-6y=(x-6)-6(y-1)$

$(2R-2r)\cdot 2R=9$

$(R-r)R=\frac{9}{4}$

$(2R)^2=AC^2+5^2$

$(2R)^2=9+(ED+DA)^2$

$4R^2=9+ED^2+2\cdot 6+DA^2$

$\cancel{4R^2=21+}$ $AE=\frac{R}{r}\cdot AD$

$25+AC^2=4R^2$

$4+AC^2=AD^2$

$AD\cdot\frac{R-r}{r}\cdot AD=6$

$AD^2\cdot\frac{R-r}{r}=6$

$(4R^2-21)\cdot\frac{R-r}{r}=6$

$(R-r)R=\frac{9}{4}$

$(R-r)\cdot\left(3\frac{4R^2-21}{r}-8R\right)=0$

$12R^2-63-8Rr=0$

$8R^2-8Rr=18$

$4R^2-63=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

1). Т.к. a, b, c – члены геометр. прогрессии, то $a=a$; $b=a\cdot q$; $c=aq^2$, где q – показатель прогрессии

2). Четвертый член это aq^3, тогда т.к. он корень $ax^2-2bx+c=0$, то

$a\cdot(aq^3)^2-2\cdot aq\cdot(aq^3)+aq^2=0$;

$a^3q^6-2a^2q^4+aq^2=0$;

$c^3-2c^2+c=0$;

$\left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=1 \end{array}\right.$; но 0 c равняться не может,

тогда $c=1$.

Ответ: 1.

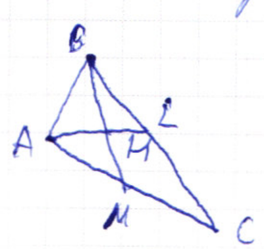
№2.

1). Бисс. и медиана, исходящие из 1 вершины не могут быть перпендикулярны:

AL – бисс.; AM – медиана

$\angle BAC = 2\angle BAL = 2\cdot(\angle BAM + \angle MAL) = 2\cdot(\angle BAM + 90^\circ) = 180^\circ + 2\angle BAM > 180^\circ$, чего быть не может;

2). Бисс. и медиана из разных вершин.



BM – медиана, AL – биссектриса

($\Rightarrow$) $\boxed{AL \perp BM}$ тогда в $\triangle ABM$ совпадают биссектриса и высота тогда $AB=AM=\frac{1}{2}AC$, т.е. $\boxed{AC=2AB}$

($\Leftarrow$) $\boxed{AC=2AB}$, тогда $AB=\frac{1}{2}AC=AM$;

$\triangle ABM$ – р/бс осн. BM. AH – биссектриса, тогда AH – высота, т.е. $\boxed{AL \perp BM}$

3). Т.е. перпендикулярность ~~каких-то двух~~ каких-то биссектрисы и медианы равносильна тому, что одна сторона в 2 раза больше другой;

4). Тогда в треугольнике есть стороны a, $2a$ и $900-3a$;

5). Чтобы такой треугольник существовал

$$\begin{cases} a>0 \\ 900-3a>0 \\ a+2a>900-3a \\ a+900-3a>2a \\ 900-3a+2a>a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a<300 \\ 6a>900 \\ 4a<900 \\ \cancel{2a}>2a<900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a<300 \\ a>150 \\ a<225 \\ a<450 \end{cases} \Leftrightarrow 150<a<225;$$

все стороны целые, тогда $a\in\mathbb{Z}$; тогда $2a\in\mathbb{Z}$, $900-3a\in\mathbb{Z}$;

~~По целым чи~~ a целых чисел ~~от~~ на $(150; 225)$

$224-151+1=224-150=74$.

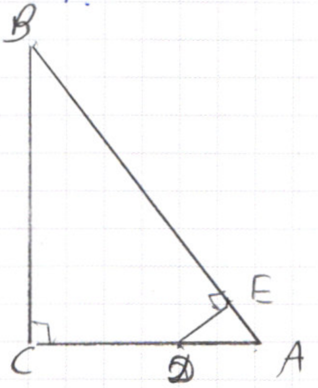
т.е. таких треугольников 74.

Ответ: 74.

□ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Решение.

а). 1) $\angle BCD + \angle BED = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, тогда $BCDE$ – впис, тогда $\angle CBD = \angle CED = 30^\circ$.

2). $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{\frac{3}{2}CD} = \frac{2}{3}\cdot\frac{BC}{CD} = \frac{2}{3}\cdot ctg\,30^\circ = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б). 1) $ctg\angle CBA = tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

2). $\sin\angle CDE = \sin(180^\circ - \angle CBE) = \sin\angle CBE =$
$= \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\angle CBA}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

3). $CD = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{7} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$;

4). $\sin\angle DAE = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\angle DAE}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\angle DAE}}} =$
$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$;

5). $DE = AD\cdot\sin\angle DAE = \frac{AC}{3}\cdot\sin\angle DAE = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{3}$;

6). $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}\cdot CD\cdot DE\cdot\sin\angle CDE = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} =$
$= \frac{2\cdot2\cdot2}{2\cdot3\cdot3} = \frac{4}{9}$.

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ б) $\frac{4}{9}$

№3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{y(x-6)-(x-6)} \\ x^2-2\cdot 6\cdot x+36+2(y^2-2y+1)-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases};$$

Пусть $x-6=a$, $y-1=b$, тогда

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12a+36b^2=ab \\ a^2+2b^2-18=0 \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\cancel{(4+9)}(4b+9b)a+4b\cdot 9b=0 \\ a^2+2b^2-18=0 \\ a\geq 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right. \\ a^2+2b^2-18=0 \\ a\geq 6b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ 16b^2+2b^2=18 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ 81b^2+2b^2=18 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b=+\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b=-\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b=\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \end{array}\right.$$

тогда если $a=-4$, $b=-1$; $x=a+6=-4+6=2$;
$y=b+1=-1+1=0$;

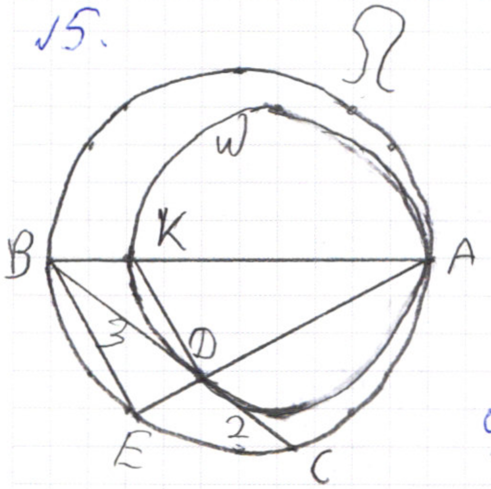
если $a=9\sqrt{\frac{18}{83}}$, $b=\sqrt{\frac{18}{83}}$, $x=a+6=6+9\sqrt{\frac{18}{83}}$;
$y=b+1=1+\sqrt{\frac{18}{83}}$;

Ответ: $\left\{(2;0);\ \left(6+9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1+\sqrt{\frac{18}{83}}\right)\right\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



Решение.

1). Пусть R — радиус Ω; r — радиус ω;

2). $BA \cap \omega = K$;

3). Как опир. на диаметр: $\angle KDA = \angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$;

4). ~~$BK \cdot KA$~~ $BK \cdot KA = BD^2$;

$(2R - 2r) \cdot 2r = 3^2$;

$\boxed{4R(R-r) = 9}$

5). $BE \perp EA$; $KD \perp EA$, тогда $BE \parallel KD$, тогда по т. о пропорц. отрезках $\frac{ED}{DA} = \frac{BK}{KA} = \frac{2R-2r}{2r} = \frac{R-r}{r}$;

тогда $ED = \frac{R-r}{r} \cdot AD$;

6). $AD^2 = DC^2 + AC^2 = 4 + (BA^2 - BC^2) = 4 + (2R)^2 - 25 = 4R^2 - 21$.

7). $ED \cdot DA = BD \cdot DC$; $\frac{R-r}{r} \cdot AD \cdot AD = 3 \cdot 2$;

$\boxed{\frac{R-r}{r} \cdot (4R^2 - 21) = 6}$

8). $\begin{cases} \frac{R-r}{r} \cdot (4R^2-21) = 6 \\ 4R(R-r) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cancel{4}R(R-r) \cdot r \cdot 4R}{(R-r)\cdot(4R^2-21)} = \frac{9}{6} \\ \cancel{4R(R-r)=9}\ 4R^2 - 9 = 4Rr \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4R^2-9}{4R^2-21} = \frac{3}{2} \\ 4R(R-r) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12R^2 - 63 = 8R^2 - 18 \\ 4R(R-r) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4R^2 = 81 \\ 4R(R-r) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 4{,}5 \\ 4 \cdot 4{,}5(4{,}5 - r) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 4{,}5 \\ r = 4. \end{cases}$

9). $\cancel{AC^2 - 9}$ $AC^2 = 9^2 - 5^2 = \cancel{81}\ 81 - 25 = \cancel{66};\ 56;$

$AD^2 = 9^2 - 21 = 81 - 21 = 60;$

$AC = \sqrt{56} = 2\sqrt{14};\quad AD = 2\sqrt{15};$

10). $ED = 2 \cdot 3 \;/\; AD = \frac{6}{2\sqrt{15}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}};$

11). $\angle CDA = \alpha;\ \sin\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}};$

12). $\sin\angle BDE = \sin\angle BDA = \sin\angle CDA = \sin\angle EDC = \sin\alpha =$

$= \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}};$

~~14)~~ 13). $S_{BACE} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle DAC} + S_{\triangle BDA} + S_{\triangle EDC} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\cdot(BD\cdot DE + BD\cdot DA + DA\cdot DC + DC\cdot DE) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}\left(3\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 3\cdot 2\sqrt{15} + 2\sqrt{15}\cdot 2 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{14}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}}\cdot(3+2) + 2\sqrt{15}\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}(3+2)\right) =$

$= \frac{\sqrt{14}}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot 5 + 2\cdot 5\right) = \frac{\sqrt{14}}{2}\cdot 11 = \frac{11\sqrt{14}}{2}.$

Ответ: ~~N~~ $4{,}5;\ 4;\ \frac{11\sqrt{14}}{2}.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

1). $f(y \cdot \frac{x}{y}) = f(y) + f(\frac{x}{y})$

$f(x) = f(y) + f(\frac{x}{y})$,

тогда $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$;

2). Найдем знач. $f(x)$ для всех нат. чисел от 2 до 22

x	$f(x)$	как считаем
2	1	$[\frac{2}{2}] = 1$
3	1	$[\frac{3}{2}] = 1$
4	2	$f(2) + f(2) = 2$
5	2	$[\frac{5}{2}] = 2$
6	2	$f(2) + f(3) = 2$
7	3	$[3,5] = 3$
8	3	$f(4) + f(2)$
9	2	$f(3) + f(3) = 2$
10	3	$f(5) + f(2)$
11	5	$[5,5] = 5$
12	3	$f(6) + f(2)$
13	6	$[6,5] = 6$
14	4	$f(7) + f(2)$
15	3	$f(5) + f(3)$
16	4	$f(8) + f(2)$
17	8	$[8,5] = 8$
18	3	$f(9) + f(2)$
19	9	$[9,5] = 9$
20	4	$f(10) + f(2)$
21	4	$f(7) + f(3)$
22	6	$f(11) + f(2)$

итого имеем

2 числа „1"

4 числа „2"

6 чисел „3"

4 числа „4"

1 число „5"

2 числа „6"

1 число „8"

1 число „9"

тогда кол-во способов выбрать $x, y \in \mathbb{N}$, что $x, y \in [2; 22]$ и $f(x) < f(y)$

~~2 · 19 + 4.~~

$2 \cdot (4+6+4+1+2+1+1) +$
$+ 4 \cdot (6+4+1+2+1+1) +$
$+ 6 \cdot (4+1+2+1+1) +$
$+ 4 \cdot (1+2+1+1) +$
$+ 1 \cdot (2+1+1) +$
$+ 2 \cdot (1+1) +$
$+ 1 \cdot 1 =$

$= 2 \cdot 19 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$
$= 38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 = 181.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Откуда 181 – это кол-во ~~пара~~ пар (x, y), где $2 \le x \le 22$, $2 \le y \le 22$; $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$; $x, y \ne 21$.

Ответ: 181.