МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-6-6y+6=\sqrt{(x-6)y-(x-6)} \\ x^2-2\cdot 6x+6^2+2y^2-2\cdot 2\cdot y\cdot 1+1^2\cdot 2-6^2-2\cdot 1^2+20=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-36-2+20=0 \end{cases}$

обозначим $\begin{cases} x-6=a \\ y-1=b \end{cases}$ где $ab\geq 0$

тогда наша система преобретёт такой вид:

$\begin{cases} (a-6b)^2=(\sqrt{ab})^2 \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Big| :b^2;\ b\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2-13\cdot\frac{a}{b}+36=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$

введем новое обозночение $\frac{a}{b}=t$ и будем решать только первое уравнение

$t^2-13t+36=0$

$D = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 = 5^2$

$t_{1,2} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{5^2}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2}$ $t_1 = 9$ $t_2 = 4$

1) $\begin{cases} \frac{a}{b} = 9 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

$a = 9b$

$(9b)^2 + 2b^2 = 18$

$81b^2 + 2b^2 = 18$

$83b^2 = 18$

$b^2 = \frac{18}{83}$

$b = \pm \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

$a = \pm 9 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} = \pm \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

$x_{1,2} = \pm \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} + 6$

$y_{1,2} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} + 1$

2) $\begin{cases} \frac{a}{b} = 4 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

$a = 4b$

$(4b)^2 + 2b^2 = 18$

$16b^2 + 2b^2 = 18$

$18b^2 = 18$

$b^2 = 1$

$b = \pm 1$

$a = \pm 4$

$x_{1,2} = \pm 4 + 6$

$x_1 = 10$ $x_2 = 2$

$y_{1,2} = \pm 1 + 1$

$y_1 = 2$ $y_2 = 0$

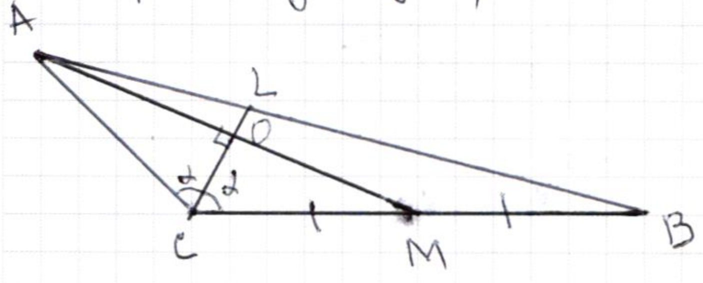
когда $b = 0$ то $\begin{cases} a - 6 \cdot 0 = \sqrt{a \cdot 0} \\ a^2 + 2 \cdot 0^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 18 \end{cases}$

противоречие поэтому этот случай не имеет решений.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\left(\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+6;\ \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+1\right);\ \left(-\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+6;\ -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+1\right);\ (10;2);\ (2;0)$

3.2. Какими свойствами обладает треугольник у которого медиана перпендикулярно одной из биссектрис. Мы это сейчас и выясним. Для этого сначала начертим треугольник ABC который удовлетворяет нашим условиям AM это медиана а CL это биссектриса перпендикулярная медиане AM.



Дано:
$AM \perp CL$
$CM = BM$
$\angle LCA = \angle LCB = \alpha$

~~Обозначим~~ Назовём точку их пересечение точкой O. Поскольку CO является и биссектрисой и высотой $\triangle ACM$ то $\triangle ACM$ равнобедренный, где $AC = MC$.

~~Обозначим AC =~~

Введём обозначение $AC = x$ $AB = y$ тогда
$BC = BM + CM = CM + CM = 2CM = 2AC = 2x$

$x + y > 2x$

$y > x$

$2x + x > y$

$x > \frac{y}{3}$

$x + 2x + y = 900$

$x = \frac{900 - y}{3} = 300 - \frac{y}{3}$

$\begin{cases} y > 300 - \frac{y}{3} \\ 300 - \frac{y}{3} > \frac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y > 900 - y \\ 900 - y > y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4y > 900 \\ 900 > 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 225 \\ 450 > y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 225 \\ y < 450 \end{cases} \Rightarrow$

$y \in (225; 450)$

$x \in \mathbb{Z}_{>0} \qquad x = 300 - \frac{y}{3} \qquad \frac{y}{3} \in \mathbb{Z}_{>0} \to y = 3k$

$y_1 = 228 \qquad y_n = 447 \qquad d = 3$

$447 = 228 + (n-1) \cdot 3$

$(n-1)3 = 447 - 228$

$n - 1 = \frac{219}{3}$

$n = 73 + 1 = 74$

Ответ: 74.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.4. а) Дано:

$\angle C = 90^\circ$

$AD : AC = 1 : 3$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 30^\circ$

$tg \angle BAC - ?$

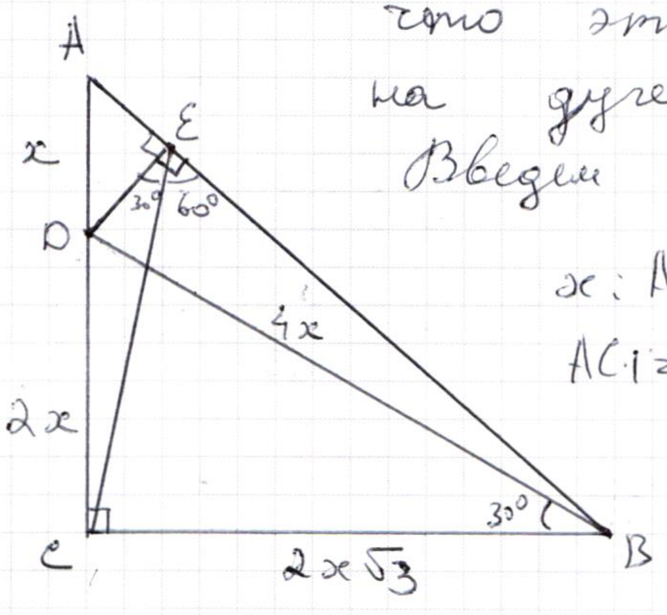
Решение

$\angle DEB + \angle ACB = 180^\circ$

Поскольку $\angle DEB$ и $\angle ACB$ противоположные углы четырёхугольника CBED то четырёхугольник вписанный.

$\angle CBD = \angle CED = 30^\circ$ потому что эти углы лежат на дуге CD.

Введем обозначение $AD = x$



$x : AC = 1 : 3$

$AC \cdot 1 = x \cdot 3$

$AC = 3x$

$CD = AC - AD = 3x - x = 2x$

$BD = 2CD = 2 \cdot 2x = 4x$

$BC^2 + CD^2 = BD^2$

$BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{(4x)^2 - (2x)^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} =$

$= \sqrt{12x^2} = 2x\sqrt{3}$

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$\cancel{AB = \sqrt{(3x)^2 + (2x\sqrt{3})^2} = \sqrt{9x^2 + 12x^2} = x\sqrt{21}}$

$$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

б) Введем обозночение $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$ и $\angle ADE = 90^\circ - \alpha$. Это означает что $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(3x)^2 + (2\sqrt{3}x)^2} = \sqrt{9x^2 + 12x^2} =$$

$$= x\sqrt{21}$$

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{21}} = \frac{ED}{2\sqrt{3}\cdot x} \rightarrow ED = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{21}} = \frac{2x}{\sqrt{7}}$$

~~$\angle EDC = \angle ADO$~~ $\angle EDC = 180^\circ - \angle ADE =$

$$= 180^\circ - 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \angle BAC$$

$$S_{\triangle CED} = \frac{DE \cdot CD \cdot \sin\angle EDC}{2} = \frac{2x}{\sqrt{7}} \cdot 2x \cdot \sin(90^\circ + \alpha) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{2x^2}{\sqrt{7}} \cos\alpha = \frac{2x^2}{\sqrt{7}} \cos\angle BAC =$$

$$= \frac{2x^2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{2x^2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{3x}{\sqrt{21}\cdot x} = \frac{2x^2 \cdot 3}{7\sqrt{3}} = \frac{2x^2\sqrt{3}}{7}$$

В пункте б нам известно что

$AC = \sqrt{7}$

$3x = \sqrt{7}$

$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$$S_{\triangle CED} = \frac{2x^2\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{7} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{7}} \cdot 2 \cdot \frac{\cancel{7}}{9} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $S_{\Delta CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

3.1. Обозначем знаменатель нашей геометрической прогрессии q тогда $b_1 = a$, $b_2 = b = aq$ и $b_3 = c = aq^2$.

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$
$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$
$$a(x^2 - 2\cdot x\cdot q + q^2) = 0$$
$$a(x-q)^2 = 0$$

1) $a = 0$ $b_4 = 0$

2) $a \neq 0$; $x = q$; $b_4 = q$ то есть b_4 равен знаменателю

Ответ: при $a=0$ $b_4 = 0$, а при $a \neq 0$ b_4 равен знаменателю прогрессии.

3.5 Дано:

$CD = 2$

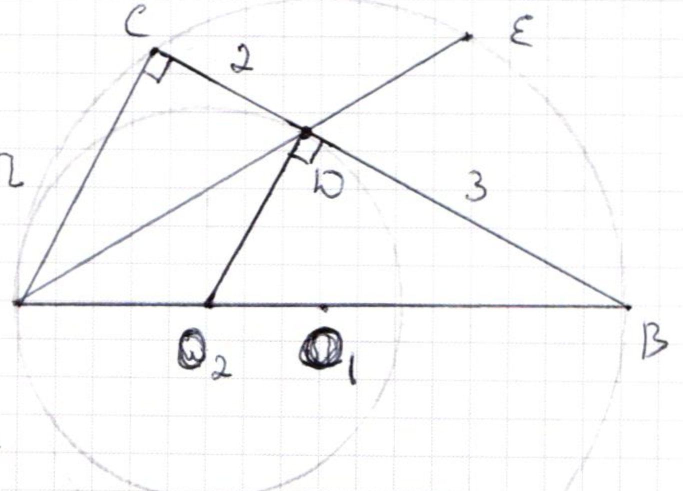
$BD = 3$

O_1 - центр окружности Ω

O_2 - центр окружности ω

S_{BACE} - ?

$R; r$ - ?



(R - радиус большой окружности; r - радиус меньшей окружности)

$\angle ACB = 90^\circ$ потому что он леж на диаметре.

$\triangle ABC \sim \triangle BDO_2$

$$\frac{O_2B}{AB} = \frac{BD}{BC}$$

$$\frac{AB - AO_2}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5}$$

$$10R - 5r = 6R$$

$$4R = 5r \Rightarrow R = \frac{5r}{4}$$

$$O_2B^2 = O_2D^2 + BD^2$$

$$(AB - AO_2)^2 = r^2 + 3^2$$

$$(2R - r)^2 = r^2 + 9$$

$$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 9$$

$$4 \cdot \left(\frac{5r}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{5r}{4} \cdot r = 9$$

$$\frac{25r^2}{4} - \frac{20r^2}{4} = 9$$

$$5r^2 = 36$$

$$r^2 = \frac{36}{5}$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{5r}{4} = \frac{1}{4_2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{6}^3}{\cancel{\sqrt{5}}_1} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BO_2^2 = O_2D^2 + BD^2$

$BO_2 = \sqrt{r^2 + 3^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + 9} = 3\sqrt{\frac{4}{5} + 1} =$

$= 3 \cdot \sqrt{\frac{9}{5}} = 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$

Обозначим угол $BO_2D = 2\alpha$, тогда

$\angle AO_2D = 180^\circ - 2\alpha$

$AO_2 = DO_2 = r$ $\triangle AO_2D$ равнобедренный

$\angle O_2DA = \angle O_2AD$

$\angle O_2DA + \angle O_2AD + \angle AO_2D = 180^\circ$

$\angle O_2DA + \angle O_2DA + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ$

$2\angle O_2DA = 2\alpha$

$\angle O_2DA = \alpha$

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$AC = \sqrt{(2R)^2 - 5^2} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 25} = \sqrt{45 - 25} = \sqrt{20} =$
$= 2\sqrt{5}$

$AD^2 = AC^2 + CD^2$

$AD = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 2^2} = \sqrt{20 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$x\sqrt{6} \cdot DE = 3 \cdot \cancel{2}$

$DE = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$S_{BACE} = \frac{AE \cdot CB \cdot \sin\angle ADB}{2} =$

$= \frac{(AD + DE) \cdot 5 \cdot \sin(\angle O_2DB + \angle O_2DA)}{2} =$

$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cdot 5 \cdot \sin(90^\circ + \alpha) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{6} + \sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \cos\alpha = \frac{5\sqrt{6} \cdot 5}{4} \cdot \cos\angle BO_2D =$

$= \frac{25\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{O_2D}{O_2B} = \frac{25\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} : \frac{9}{\sqrt{5}} =$

$= \frac{25\sqrt{6}}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\cancel{6}^3}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{5}}}{9} = \frac{75\sqrt{6}}{18} = \frac{25\sqrt{6}}{6} = \frac{25}{\sqrt{6}}$

Ответ: $S_{BACE} = \frac{25}{\sqrt{6}}$; $R = \frac{3\sqrt{5}}{6}$; $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$

3.7. При $p = 2$ $f(2) = 1$

При $p \geq 3$ $f(p) = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor = \frac{p-1}{2}$ потому что при $p \geq 3$ p всегда нечётное при делении на 2 ~~и в~~ остатке даёт 1 мы этот один ~~убираем~~ убираем от p и $\frac{p-1}{2}$ всегда целое число.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{3\sqrt{3}x}{\sqrt{43}}\right)^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9x^2$$

$$y^2 - x\sqrt{3} \cdot y + \frac{3\sqrt{3}x}{\sqrt{43}} - 9x^2 = 0$$

$\sin(\operatorname{arctg} x) =$

$$D = 3x^2 + 36x^2 - \frac{12\sqrt{3}x}{\sqrt{43}} =$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{\frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{43}} \cdot 3x \cdot \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}{2} =$$

$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$=$

$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg} 30^\circ$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f : Q \to Q$ $\quad Q > 0$

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$\frac{2}{12} = 0$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a \to \frac{1}{b}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} : \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$a \to \frac{a}{b^2}$ $\quad p = 2 \quad f(p) = 1$

$f\left(\frac{a}{b}\right) =$ $\quad p \geqslant 3 \quad f(p) = \frac{p-1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\sin(60^\circ) = \sin(\operatorname{arctg}\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$x = \operatorname{tg}(\arcsin y)$

$\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} = x$

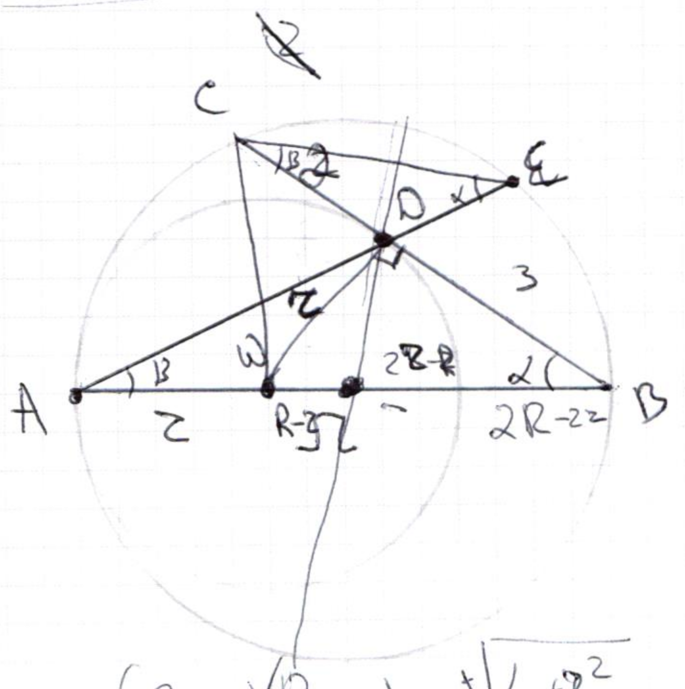
$y^2 = x^2 - x^2y^2$

$y^2(1+x^2) = x^2$

$y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{1+\frac{27}{16}}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{\cancel{4}}{\sqrt{43}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{43}$

$\dfrac{2\cdot 4}{\sqrt{43}} \cdot 3x \cdot \dfrac{3\sqrt{3}x}{\sqrt{43}} = \dfrac{12\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{43} = \dfrac{18\sqrt{21}}{43}$



$r - (R - r) = 2r - R$

$2R - 2r \quad 4R^2 - 8Rr + 4r^2 \geq 0$

$3^2 = 2(R-r)\cdot 2R \quad R \geq r$

$r^2 + 3^2 = (2R - r)^2$

$4R^2 - 2Rr = 9$

$\cancel{r^2} + 3^2 = 4R^2 - 2Rr + \cancel{r^2}$

$4Rr - 4r^2 = 9$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$r \cdot 3 = (R - x)(R + x)$

$\dfrac{\sqrt{4 + r^2}}{\sqrt{9 + r^2}} =$

$R^2 - x^2 = 6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)-18=0$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$$

$$y(x-6)-(x-6)=(y-1)(x-6) \to a;b$$

$$x^2-12x+2y^2-4y+20=0$$

$$(x-6y)^2=x^2+36y^2-12xy$$

$$a^2+2b^2=18$$

$$\sqrt{ab}=\cancel{x-6-6(y-1)}\ a-6b$$

$$x-6-6(y-1)$$

$$a^2+36b^2-13ab=0$$

$$a^2+2b^2=18$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\cdot\frac{a}{b}+36=0$$

$$D=169-144=25$$

$$\frac{a}{b}=\frac{13\pm25}{2}$$

1) $\frac{a}{b}=\frac{38}{2}=19$

2) $\frac{a}{b}=-6\ \varnothing$

$$19^2b^2+2b^2=18$$

$$a=19b$$

$$363b^2=18$$

$$b^2=\frac{18}{363}=\frac{6}{121}$$

$$b=\pm\frac{\sqrt6}{11}$$

$$a=\pm\frac{19\sqrt6}{11}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$b_1 = a \quad b_2 = b \quad b_3 = c \qquad b_4 = q$

$D = 4b^2 - 4ac$

$a \quad aq \quad aq^2$

$b = aq \quad c = aq^2$

$aq^3 = q$

$4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

$q(aq^2 - 1) = 0$

$q_1 = 0 \ \varnothing$

$x = \frac{2aq}{2a} = q$

$aq^2 = 1$

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

$a = \frac{1}{q^2}$

$\cancel{D = 4a^2q^2 - 4a^2q^2}$

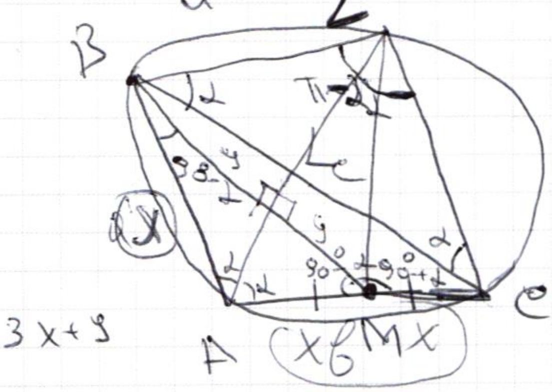
$\frac{1}{2^4} \quad \frac{1}{2^3} \quad \frac{1}{2^2} \quad \frac{1}{2}$

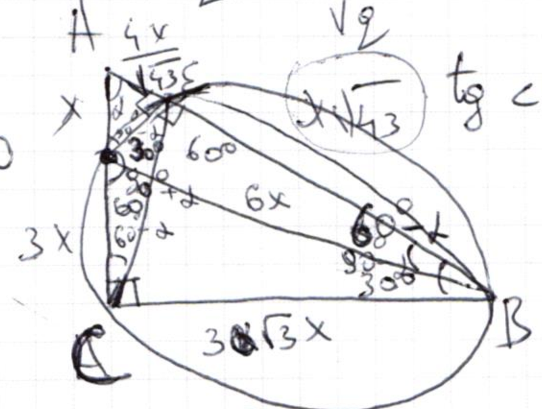
$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$aq^2 = 1 \qquad \frac{1}{2^3}$

$x = q$

$q = \pm\frac{1}{\sqrt{q}}$





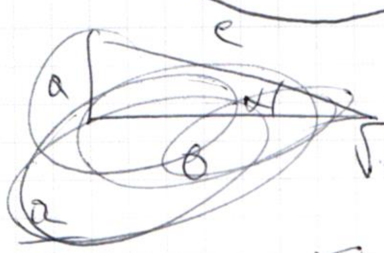
$\operatorname{tg}\angle BAC = ?$

$90° + \alpha$

$\angle LAB = \angle LAC$

$AM = MC$

$\frac{BC}{AC}$



$\sqrt{27+16} = x\sqrt{43}$

$\frac{\frac{3\sqrt{3}x}{\sqrt{43}}}{} \quad \frac{3\sqrt{3}x}{4x} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\frac{x}{x\sqrt{43}} = \frac{DE}{3\sqrt{3}x}$

$DE = \frac{3\sqrt{3}x}{\sqrt{43}}$

$\angle BAC = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

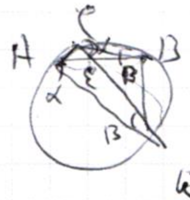
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2(R-z)\cdot 2z = 3^2 \\ z^2+3^2 = (2R-z)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4Rz-4z^2=9 \\ \cancel{z^2}+9 = 4R^2-4Rz+\cancel{z^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4R^2-4Rz = 4Rz-4z^2$$



$$R^2-2Rz+z^2=0$$

$$R=z$$

$$AE\cdot EB = CE\cdot ED$$

$$\frac{AD^2+DE^2}{2} \geq DE\cdot AD = 2\cdot 3$$

$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$$

$$\frac{CE}{2R} = \frac{z}{AD}$$

$$AD^2+DE^2 \geq 12 \geq \frac{12}{AD+DE}$$

$$\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha =$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{cases} ax+b \geq -8x^2+6x+7 \\ ax+b \leq 8x-6|2x-1| \end{cases} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x^2+(6-a)x+b-7\geq 0 \\ 6|2x-1| \leq (8-a)x-b \end{cases} \Rightarrow \quad = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = y$$

$$x^2y^2 = 1-x^2$$

$$x \leq \frac{6-b}{4+a} \qquad (x^2+1)y^2=1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$$

$$\Rightarrow D = (6-a)^2-32(b-7)$$

$$a \geq -4$$

$$\begin{cases} 12x-6 \leq (8-a)x-b \\ 12x-6 \geq (a-8)x+b \end{cases}$$

$$x(4+a) \leq 6-b$$

$$x(20-a) \geq 6+b$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x+y>2x$

$y>x$

$x+2x>y$

$x>\frac{y}{3}$

$2x+y>x$

$3x>y$

$y>x>\frac{y}{3}$

$16;49$

$3x+y=900$

$y>x=300-\frac{y}{3}>\frac{y}{3}$

$y>300-\frac{y}{3}$

$4y>900$

$y>\frac{900}{4}$

$x>\frac{300}{4}=75$

$y>\frac{900}{4}=225$

$3x+y=900$

$y=228;231\ldots 447$

$x=300-\frac{228}{3};$

$x=224;225;226;\ldots;151$

$224-149+1=076$

$151+(n-1)\cdot 1=224$

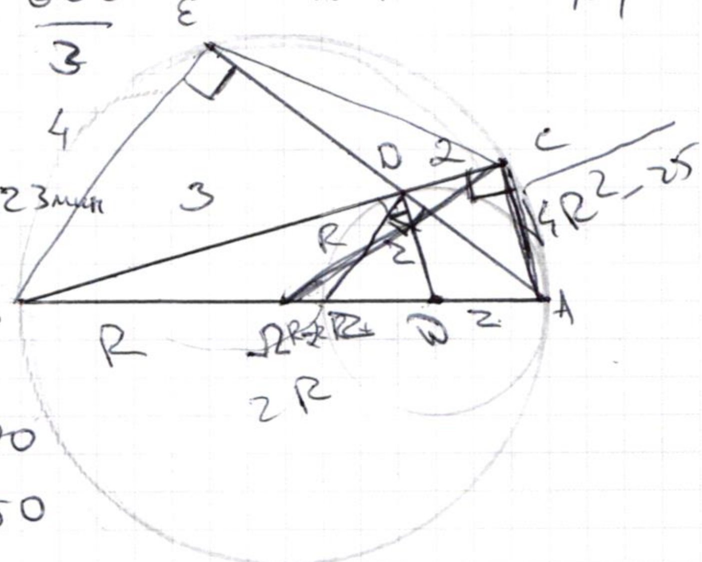
$n=224-150=74$

$3\cdot 100$

$300-\frac{600}{3}$

$2y<900$

$y<450$



$2(R-z)\cdot 2R=3^2$

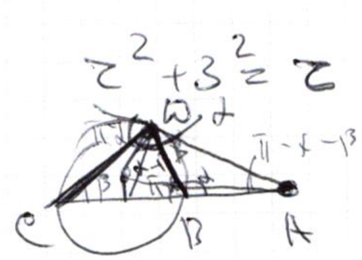
$z^2+3^2=(2R-z)^2$

$-4z^2+4Rz=9$

$4R^2-4Rz=9$

$R=2$

$z^2+3^2=z^2$



$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AD}$

$AB\cdot AC=AD^2?$ $\frac{AD}{AC}=$

- [x] черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD \cdot DE = 6$

$AE^2 + BE^2 = AC^2 + BC^2$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{4R^2-25}}{z} = \frac{5}{3} \\ 4R^2 - 4Rz = 9 \end{cases}$$

$225 \times 1 = 144$

$4R^2 - 4Rz$

$\frac{2R}{2(R-2z)}$

$\frac{2R}{2R-z} = \frac{5}{3}$

$3\sqrt{4R^2-25} = 5z$

$6R = 10R - 5z$

$36R^2 - 225 = 25z^2$

$5z = 4R$

$4R^2 = 9 + 4Rz$

$R = \frac{5z}{4}$

$81 + 36Rz - 225 = 25z^2$

$9 = 4 \cdot \frac{25z^2}{4z} - 4 \cdot \frac{5z}{4} \cdot z$

$25z^2 - 36Rz$

$36 = 25z^2 - 20z^2$

$R = \frac{25z^2+144}{36z}$

$z = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$R = \frac{\sqrt{5} \cdot 6}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$36\left(\frac{25z^2+144}{36z}\right)^2 - 225 = 25z^2$

$z^2 = x$

$25^2x^2 + 2 \cdot 25 \cdot 144x + 144^2 - 225 \cdot 36x = 25 \cdot 36x^2$

0

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $S_{DCED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

3.1. Обозначим знаменатель нашей прогрессии q тогда $b_1 = a$; $b_2 = b = aq$ и $b_3 = c = bq = aq\cdot q = aq^2$. Подставив их значение в уравнение $ax^2 + 2bx + c = 0$

$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$
$$a(x^2 - 2qx + q^2) = 0$$
$$a(x-q)^2 = 0$$

1) $a = 0$ $b_4 = 0$

2) $a \neq 0$ $x = q$, то есть b_4 равен знаменателю

Ответ: при $a = 0$ $b_4 = 0$, а при $a \neq 0$ b_4 равен знаменателю нашей геометрической прогрессии

$r = \frac{6}{\sqrt{5}}$ $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ $\frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{9} = \frac{2}{3}$

$$\sqrt{9 + \frac{36}{5}} = 3\sqrt{5 + \frac{4}{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{2\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot\cos\alpha} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{2}{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)