МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c – г.п. $\Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow 4b^2 = 4ac$

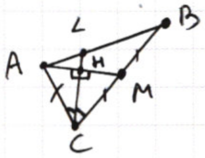
Корень ур-ния: $x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

$a, b, c, -\frac{b}{a}$ – г.п. $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{-b/a}{c} \Rightarrow \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} = -\frac{\cancel{b}}{\cancel{a}c} \Rightarrow 1 = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -1$

Ответ: -1.

№2

Поисследуем Δ с $P=1200$ и сторонами $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (и $\in \mathbb{N}$), вып. все условия:



Пусть есть ΔABC с CL – бисс. и AM – мед. Обозначим $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.
Рассмотрим ΔAMC — в нём (CL) явл. также высотой к AM из C. Обозначим их пер. за H. Посмотрим на ΔAHC и ΔMHC: $\angle AHC = \angle MHC = 90^\circ$, $\angle ACH = \angle MCH$, HC – общ. $\Rightarrow \Delta AHC = \Delta MHC \Rightarrow AC = MC = a/2$.

Вернёмся к задаче. Пусть мы имеем стороны a, $a/2$ и c. Тогда, если мы можем постр. Δ по этим числам, то он будет удовл. усл. о бисс. и мед. Действительно, построим такой ΔABC: $AC = a/2$, $CB = a$, $AB = c$. Проведём мед. AM и бисс. CL. ΔAMC – равноб. $\Rightarrow$ CL – бисс. = выс., т.е. $AM \perp CL$

Имеем, что все Δ из усл. должны иметь такие и только такие ст.: a, $a/2$ и c:

$$\begin{cases} a + a/2 + c = 1200 \\ a < a/2 + c \\ a/2 < a + c \text{ – всегда верно} \\ c < a + a/2 \\ a, a/2, c \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a/2 + c = 1200 \\ a/2 < c \\ c < 3a/2 \\ a \vdots 2,\ c \in \mathbb{N} \end{cases} \overset{a \to 2k,}{\underset{(k \in \mathbb{N})}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 3k + c = 1200 \\ k < c < 3k \\ k, c \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$c = 1200 - 3k \Rightarrow k < 1200 - 3k < 3k \Leftrightarrow \begin{cases} k < 300 \\ k > 200 \end{cases}$

При $k \in (200; 300)$, $\in \mathbb{N}$ однозн. задаются a и c такие, что все необх. усл. данной задачи удовл. Имеем кол-во вар. равное кол-ву $k \in [201; 299]$, $k \in \mathbb{N}$ т.е. 99 вар.

Ответ: 99.

№3

$y-2x = (y-2)-(2x-2)$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$
$\Updownarrow$
$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$xy-2x-y+2=(y-2)(x-1)$

Имеем сист.: $\begin{cases}(y-2)-2(x-1)=\sqrt{(y-2)(x-1)}\\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3\end{cases}$

Для удобства:
$y-2 \to a$
$x-1 \to b$

$\begin{cases}a-2b=\sqrt{ab}\\ 2a^2+b^2=3 \;*\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}(a-2b)^2=ab\\ a\geq 2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-5ab+4b^2=0\\ a\geq 2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-4b)(a-b)=0\\ a\geq 2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=4b\\ a=b\end{array}\right.\\ a\geq 2b\end{cases} \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{ll}a=4b\geq 0 & ①\\ a=b\leq 0 & ②\end{array}\right.$

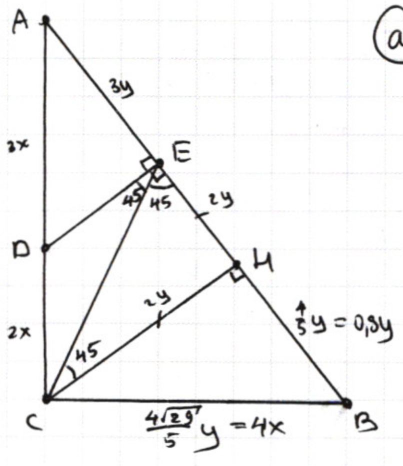
* ① $32b^2+b^2=3$
$33b^2=3 \Leftrightarrow b^2=\frac{1}{11} \Leftrightarrow b=\frac{\pm 1}{\sqrt{11}}$, но $b\geq 0 \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{11}}$ и $a=\frac{4}{\sqrt{11}}$

② $2b^2+b^2=3$
$3b^2=3 \Leftrightarrow b^2=1 \Leftrightarrow b=\pm 1$, но $b\leq 0 \Rightarrow b=-1$ и $a=-1$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=\frac{4}{\sqrt{11}}=y-2\\ b=\frac{1}{\sqrt{11}}=x-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=y-2=-1\\ b=x-1=-1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1+\frac{1}{\sqrt{11}}=\frac{11+\sqrt{11}}{11}\\ y=\frac{4}{\sqrt{11}}+2=\frac{4\sqrt{11}+22}{11}\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $\left(1+\frac{1}{\sqrt{11}};\ 2+\frac{4}{\sqrt{11}}\right)$, $(0;1)$.

№4 (1 часть)



(а) Опустим высоту CH.

$\angle ECH = 180^\circ - \angle CEH - \angle CHE = 45^\circ = \angle CEH \Rightarrow \Delta$ равнобед. $\Rightarrow EH=CH$

$\Delta DEA \sim \Delta CHA \Rightarrow \frac{AC}{AD}=\frac{AH}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{DC}=\frac{AE}{EH}$

Пусть $AE=3y \Rightarrow EH=2y=CH$

Т.к. CH – высота в пр. $\Delta \Rightarrow \frac{AH}{CH}=\frac{CH}{HB} \Rightarrow$

$HB=\frac{CH^2}{AH}=\frac{4y^2}{5y}=\frac{4}{5}y$

По т. Пиф.: $CB^2=CH^2+HB^2=4y^2+\frac{16}{25}y^2=\frac{100+16}{25}y^2$

$CB=\sqrt{\frac{116}{25}}y=\frac{4\sqrt{29}y}{5}$

По т. Пиф.: $CH^2+AH^2=AC^2 \Rightarrow 4y^2+25y^2=25x^2 \rightarrow y^2=\frac{25}{29}x^2 \Rightarrow y=\frac{5}{\sqrt{29}}x$

$CB=\frac{4\sqrt{29}}{5}y=\frac{4\sqrt{29}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{\sqrt{29}}}x=4x$

$tg\angle BAC = \frac{CB}{AC}=\boxed{\frac{4}{5}}$

(б) $AC=\sqrt{29} \Rightarrow CB=\frac{4}{5}AC=\frac{4\sqrt{29}}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4 (2 часть)

$5{,}8 \times 5 = 29{,}0$

(б) $S_{CED} = S_{ACB} - S_{ADE} - S_{CEB}$

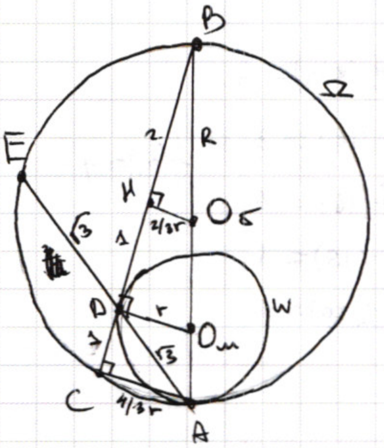
$S_{ADE} = S_{ACB}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5{,}8} = S_{ACB}\cdot\frac{9}{29}$ $\qquad S_{CEB} = S_{ACB}\cdot\frac{2{,}8}{5{,}8} = S_{ACB}\cdot\frac{14}{29}$

$S_{CED} = S_{ACB}\left(1-\frac{9}{29}-\frac{14}{29}\right) = S_{ACB}\cdot\frac{6}{29} = \frac{AC\cdot CB}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{6}\,3}{29} = \cancel{\sqrt{29}}\cdot\frac{4\cancel{\sqrt{29}}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{29}}$

$= \frac{12}{5} = \boxed{2{,}4}$

Ответ: (а) 0,8, (б) 2,4.

N5 (1 часть)



(1) Хорда $BC=4$. Опустим на неё высоту $O_бH$ ($O_б$ – ц. Ω, $O_м$ – ц. ω). Видим $\triangle BHO_б \sim \triangle BDO_м \Rightarrow$

$HO_б = \frac{BH}{BD}\cdot DO_м = 2/3\cdot DO_м = 2/3\, r$

По теор. Пифаг.: $HB^2+HO_б^2 = BO_б^2 \Rightarrow 4+\frac{4}{9}r^2 = R^2$

$\deg_\omega B = BD^2 = 9 = BA\cdot(BA-2r) = 2R(2R-2r) \Rightarrow$

$4R^2-4Rr=9$

Имеем сист. ур-ний: $\begin{cases} 4+4/9\,r^2 = R^2 \\ 4R^2-4Rr=9 \end{cases}$

$4Rr = 4R^2-9 \Leftrightarrow r = \frac{4R^2-9}{4R} = \frac{R^2-9/4}{R}$

$4+\frac{4}{9}\left(\frac{R^2-9/4}{R}\right)^2 = R^2 \Leftrightarrow 4+\frac{4(R^4-9/2R^2+81/16)}{9R^2} = R^2 \Leftrightarrow$

$4R^2+4/9\,R^4-2R^2+9/4 = R^4 \Leftrightarrow \frac{5}{9}R^4-2R^2-9/4=0$

$R^2 \to a \Rightarrow 20a^2-72a-81=0$

т.к. $a=R^2\geq 0$

$R^2 = a = \frac{72\pm\sqrt{72^2+80\cdot81}}{40} = \frac{72\pm9\sqrt{8^2+80}}{40} = \frac{72\pm9\cdot12}{40} = \frac{72\pm108}{40} = \frac{180}{40} = \frac{9}{2}$

$R = \frac{3}{\sqrt2}\ \boxed{\frac{3\sqrt2}{2}} \Rightarrow r = \frac{R^2-9/4}{R} = \frac{9/2-9/4}{3/\sqrt2} = \frac{\frac{\cancel{9}\,3}{4}}{\frac{\cancel{3}}{\sqrt2}} = \boxed{\frac{3\sqrt2}{4}}$

(2) $CA = 4/3\,r = \sqrt2$ ($\triangle DBO_м \sim \triangle CBA$)

$DA = \sqrt{\frac{16}{9}r^2+1} = \sqrt{\frac{16}{9}\cdot\frac{18}{16}+1} = \sqrt3$ (т. Пиф.)

$\deg_\Omega D = CD\cdot \underbrace{DB}_{=3} = AD\cdot DE \Rightarrow DE = \frac{3}{AD} = \frac{3}{\sqrt3} = \sqrt3$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

N5 (2 часть)

$\sin\angle CDA = \frac{CA}{DA} = \frac{4/3\,r}{\sqrt3} = \frac{4/3 \cdot 3\sqrt2/4}{\sqrt3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$S_{CABE} = \frac{EA\cdot CB}{2}\cdot \sin\angle CDA = \frac{2\sqrt3\cdot 4}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt2$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt2}{2}$, $r = \frac{3\sqrt2}{4}$, $S_{CABE} = 4\sqrt2$.

N7

Лемма $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$f\left(\frac1y\right) = f\left(\frac1y\right) + f(2y) - f(2y) = f\left(\frac{2y}{y}\right) - f(2y) = f(2) - f(2y) =$

$1 - f(2y) = 1 - (1+f(y)) = \cancel{1}-\cancel{1}-f(y) = -f(y)$

$\left(f(2y) = f(2) + f(y) = 1 + f(y)\right)$

Имеем: $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac1y\right) = f(x) - f(y) < 0 \iff f(x) < f(y)$

Найдем $f(n)$ для $n \in [1;21]$:

$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(5) = 2$
$f(7) = 3$
$f(11) = 5$
$f(13) = 6$
$f(17) = 8$
$f(19) = 9$
$f(4) = f(2) + f(2) = 2$
$f(6) = 2$
$f(8) = 3$
$f(9) = 2$
$f(10) = 3$
$f(12) = 3$
$f(14) = 4$
$f(15) = 3$
$f(16) = 4$
$f(18) = 3$
$f(20) = 4$
$f(21) = 4$

$f(1) + \cancel{f(2)} = \cancel{f(2)} \Rightarrow f(1) = 0$

Имеем: ② $f(2) = f(3) = 1$ $\quad f(5) = f(6) = f(4) = f(9) = 2$ ④

① $f(1) = 0$ $\quad f(7) = f(8) = f(10) = f(12) = f(15) = f(18) = 3$ ⑥

④ $f(14) = f(16) = f(20) = f(21) = 4$

① $f(11) = 5$ ① $f(13) = 6$ ① $f(17) = 8$ ① $f(19) = 9$

Для каждого x подойдут все y: $f(x) < f(y)$:

$f(x) = 0$ — 20 в. y
$f(x) = 1$ — 18 в. y
$f(x) = 2$ — 14 в. y
$f(x) = 3$ — 8 в. y
$f(x) = 4$ — 4 в. y
$f(x) = 5$ — 3 в. y
$f(x) = 6$ — 2 в. y
$f(x) = 8$ — 1 в. y
$f(x) = 9$ — нету в. y

Всего: $20 + \underbrace{18 + 14 + 8}_{40} + \underbrace{4 + 3 + 2 + 1}_{10} = 70$

Ответ: 70.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

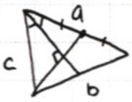
N1

a, b, c – г.п. $\Rightarrow$ $b^2 = ac$ (an, an²)

$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{a}$.

$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{-b/a}{c} = -\frac{b}{ac} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = -\frac{1}{ac} \Rightarrow -ac = a \Rightarrow c = -1$

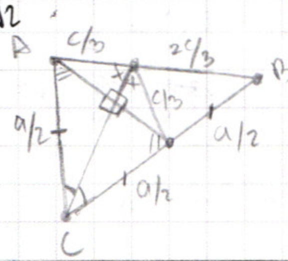
N2

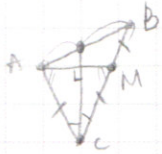


$a+b+c=120$

~~[illegible]~~ $a < b + c$ и т.д.

N2





для люб. a/2, a и c делящ. ... [illegible]

N2

$a \to 2k$

$\begin{cases} 3k + c = 1200 \\ k < c < 3k \end{cases}$

$k, c \in \mathbb{N}$

$c = 1200 - 3k$

$k < 1200 - 3k < 3k$

$4k < 1200 < 6k$

$\begin{cases} k < 300 \\ k > 200 \end{cases}$

$200 < k < 300$

N3

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$ ($3 = 2 + 4 - 3$)

$\longrightarrow y(x-1) - 2(x-1) = (y-2)(x-1)$

$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 = 3$

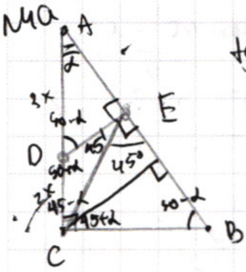
$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

$2x^2 + 3xy + y^2 = (2x+y)(x+y)$

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{cases}$

$3 = 2(x-1)^2 + (y-2)^2 \geq \sqrt{2}(x-1)(y-2)$

N4a



tg BAC – ? $= \frac{AC}{CB}$

N3

$(y-2) - (2x+2) = y - 2x$

$y - 2 \to a$

$x - 1 \to b$

$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases}$

$a \geq 2b$

$a^2 - 4ab + 4b^2 - ab = 0$

$a^2 - 4ab ... = 0$

$(a - 4b)(a - b) = 0$

$\begin{cases} a = 4b \quad (1) \\ a = b \quad (2) \end{cases}$

(2) $3b^2 = 3$, $b = \pm 1$, $a = \pm 1$

$y \geq 2x$: $(y-2x)^2 = (y-2)(x-1)$

$(2(x-1) + (y-2))((x-1)(y-2)) = 3 + 3(y-2x)^2$

$(2x - 2 + y - 2)\cancel{...}(y-2x)^2 - 3(y-2x)^2 = 3$

$(2x + y - 4 - 3)(y - 2x)^2 = 3$

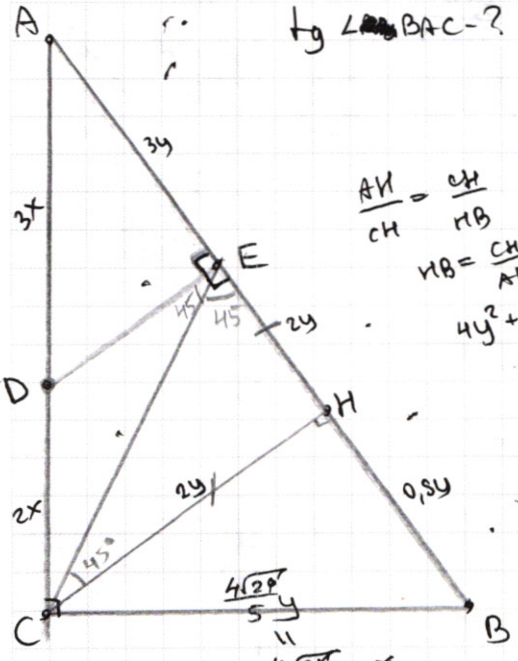
(1) $33b^2 = 3$

$b^2 = \frac{1}{11}$

$b = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}$

$a = \pm \frac{4}{\sqrt{11}}$

tg ∠BAC – ?



$\frac{14}{\frac{2,8}{5,8}}{}_{29}$

$\times \frac{5{,}8}{5} = 29{,}0$

$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$

$HB = \frac{CH^2}{AH} = \frac{4y^2}{5y} = 0{,}8y$

$4y^2 + 25y^2 = 25x^2$

$y^2 = \frac{25x^2}{29}$

$y = \frac{5x}{\sqrt{29}}$

$\frac{4}{5}\sqrt{29}\,y$

$\cancel{\sqrt{4y^2 + 0{,}64y^2}} = \sqrt{\frac{116}{25}}\,y$

$\cancel{...}$

$\sqrt{4y^2 + (\frac{4}{5}y)^2} = \sqrt{\frac{100+16}{25}}\,y$

$\frac{4\sqrt{29}}{5}\,y = \frac{4\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{5x}{\sqrt{29}} = 4x$

$\text{tg } BAC = \frac{AC}{CB} = \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$

(5) $5x = \sqrt{29}$

$S_{CED} = S_{ACB} - S_{ADE} - S_{CEB}$

$S_{ADE} = S_{ACB} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5{,}8} = S_{ACB} \cdot \frac{9}{29}$

$S_{CEB} = S_{ACB} \cdot \frac{2{,}8}{5{,}8} = S_{ACB} \cdot \frac{14}{29}$

$S_{CED} = S_{ACB}\left(1 - \frac{9}{29} - \frac{14}{29}\right) = S_{ACB} \cdot \frac{6}{29}$

$= \frac{AC \cdot CB}{2} \cdot \frac{6^3}{29} = \frac{\sqrt{29} \cdot 0{,}8\sqrt{29} \cdot 3}{29} = 2{,}4$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

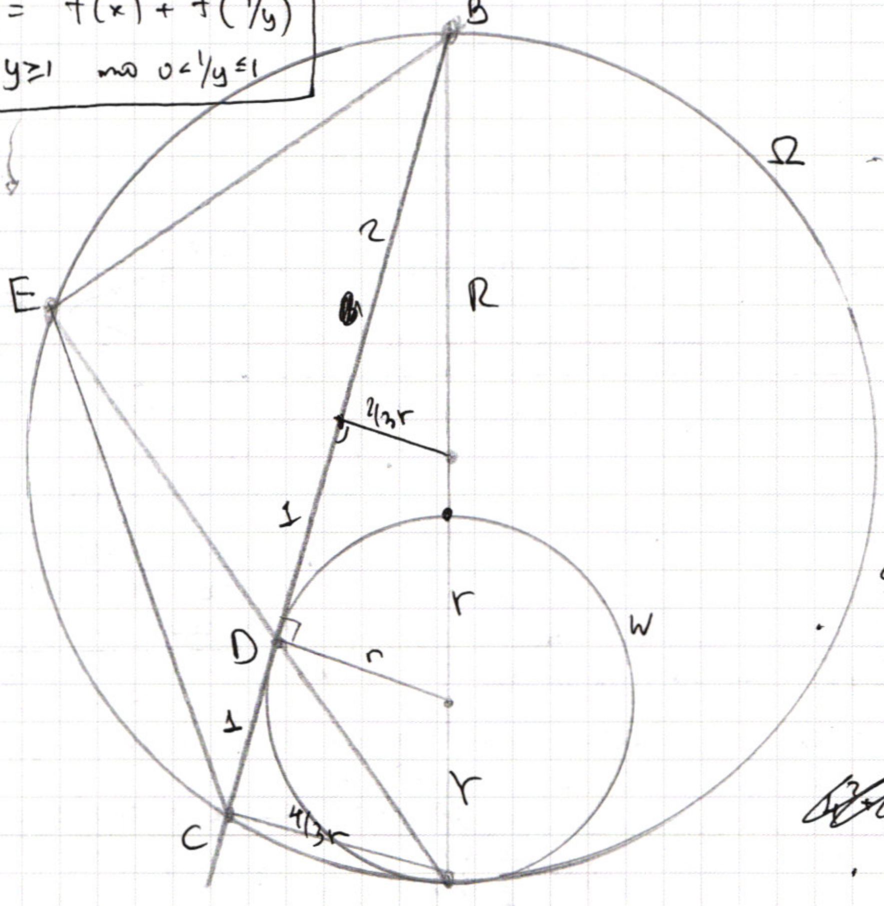
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

N7

$f(x/y) = f(x) + f(1/y)$

т.к. $y \geq 1$ то $0 < 1/y \leq 1$

N5



r_Ω, r_w, S_{BACE}

$CD = 1$

$BD = 3$

$2R \cdot (2R - 2r) = 9$

$\sqrt{\ } R^2 - Rr = \frac{9}{4}$ $\quad Rr = R^2 - \frac{9}{4}$

$r = \frac{R^2 - \frac{9}{4}}{R}$

$9 + r^2 = (2R - r)^2$

$9 + r^2 = \underbrace{4R^2 - 4Rr}_{9} + r^2$

$\sqrt{\ }$ $4 + \frac{4}{9}r^2 = R^2$

$4 + \frac{4}{9}\left(\frac{R^2 - 9/4}{R}\right)^2 = R^2$

$4 + \frac{4}{9}\left(\frac{R^4 - 9/2 R^2 + \frac{81}{16}}{R^2}\right) = R^2$

$4R^2 + 4/9 R^4 - 2R^2 + \frac{9}{4} = R^4$

$2R^2 + 4/9 R^4 + 9/4 = R^4$

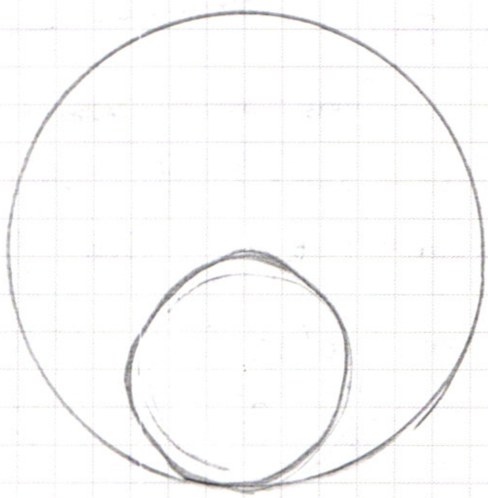
$\times \begin{array}{r} 72 \\ 72 \\ \hline 144 \\ 504 \\ \hline 5184 \end{array}$

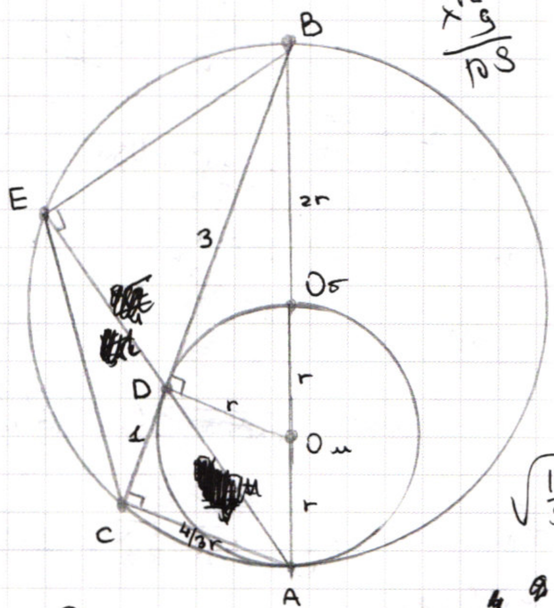
$\frac{80 \cdot 81}{9 \cdot 4} = 20 \cdot 9$

$\times \begin{array}{r} 12 \\ 9 \\ \hline 108 \end{array}$

$\begin{array}{r} 64 \\ 180 \\ \hline 144 \end{array}$

$+\begin{array}{r} 108 \\ 72 \\ \hline 180 \end{array}$





$\sqrt{\frac{16}{9}r^2 + r^2} = \sqrt{\frac{25r^2}{9}} = \frac{5}{3}r$

$\frac{3}{\frac{5\sqrt{2}}{4}} = \frac{12}{5\sqrt{2}}$

$5/3 r = 5/3 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6

$(2x+1)(x-1) \le ax+b \le x+|2x-1|$

$f(2)+f(y)=1+f(y)$

N7

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{2y}{y}\right) - f(2y) = f(x) - f(2y) + 1 < 0$

$f(x)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) - f(2y) + f(2y) = f\left(\frac{2y}{y}\right) - f(2y) = f(2) - f(2y) = 1 - f(2y)$

$f(2y) = f(2) + f(y) = 1 + f(y)$

$1 - 1 - f(y) = -f(y)$

$f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА