МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Решение:

1) ~~Пусть q~~ Т.к. a, b, c являются членами геометрической прогрессии, то $b = qa$, $c = q^2a$, где $q \neq 0$.

2) Пусть x_1 – корень уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$, тогда согласно условию $x_1 = q^3a$.

3) ~~Подставим~~ Выразим b, c и x_1 через a и q и подставим в ~~уравнение~~ равенство

$$ax_1^2 - 2bx_1 + c = 0.$$

$$a \cdot (q^3a)^2 - 2 \cdot qa \cdot q^3a + q^2a = 0 \quad (1)$$

Если $a = 0$, то $c = 0q^2 = 0$.

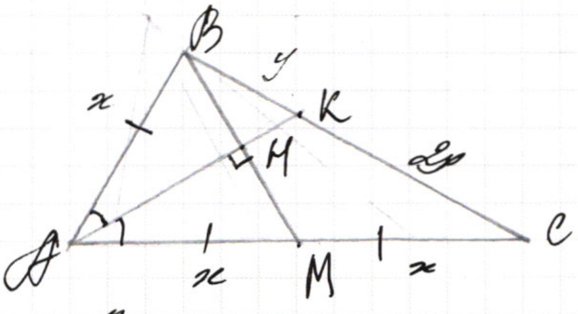
Если $a \neq 0$, то поделим все части уравнения (1) на q^2a, тогда

$$q^4a^2 - 2q^2a + 1 = 0$$

$$(q^2a - 1)^2 = 0, \text{ т.е. } q^2a = 1 = c$$

Ответ: если $a = 0$, то третий член 0,
если $a \neq 0$, то третий член 1.

№2.



Решение:

1) Пусть $\triangle ABC$: BM – медиана, AK – биссектриса. $AK \cap BM = H$. По усл. $AH \perp MB$

$\triangle ABM$: AH – высота и биссектриса, т.е $\triangle ABM$ – р/б с осн. BM, т.е. $BA = AM$

AM – медиана, т.е $MC = AM = BA = x$.

2) К т.е. $AC : AB = 2x : x = 2 : 1$

AK – биссектриса, т.е она делит сторону к которой она проведена – BC в отношении в каком две другие стороны, т.е.

$AB : AC = BK : KC = 1 : 2$.

Пусть $BK = y$, тогда $KC = 2y$.

3) $P = AB + AC + BC = x + 2x + 3y = 3(x+y)$ $\Rightarrow$

$P = 900$

$\Rightarrow x + y = 300$.

4) Если x, $2x$ и $3y$ это стороны треугольника и неравенства, то это достаточное условие, чтобы в треугольнике биссектриса была перпендик медиане, т.е нужно рассматривать только такие треугольники.

5) По неравенству треугольника: $2x + x > 3y$; $2x + 3y > x$; $3y + x > 2x$

~~т.е $3x > y$ | $+y$; $x + y > 2y$; по 3): $300 > 2y$; $150 > y$.~~

~~$3y > x$ | $+3x$; $3y +$~~

$2x + x > 3y$; $3x > 3y$, $x > y$ | $+x$; $2x > x + y$,

$2x > 300$; $x > 150$

$x > y$ | $+y$; $x + y > 2y$; $300 > 2y$; $150 > y$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$x+3y>x$; $x+3y>0$ — (истинно.

$3y+x>2x$; $3y>x$ $|+3x$; $3(x+y)>4x$

$900>4x$; $225>x$.

$3y>x$ $|+y$; $4y>x+y$; $4y>300$; $y>75$.

т.е. $150<x<225$. Для каждого x
$75<y<150$. сопоставляется $y=300-x$,

x — длина стороны AB, т.е $x\in\mathbb{N}$ — целое,
тогда $3x$ — целое, т.е. $3y$ — целое —
все стороны целые

т.е. нужный треугольник возможен
при любом целом x из $(150;225)$ —
т.е. таких треугольников $225-150-1=74$

Ответ: 74.

№3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0. \end{cases}$$

Пусть $a=x-6$; ~~$y-1$~~
$b=y-1$,

тогда $x-6y=(a+6)-6(b+1)=a-6b$.

$x-6y\geq0$, т.е. $a-6b\geq0$, тогда:

$$\begin{cases} a-6b\geq0 \\ a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq6b \\ a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ \left(a - \frac{13}{2}b\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 b^2 + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ \left(a - \frac{13}{2}b\right)^2 = 6{,}5^2 b^2 - 6^2 b^2 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ \left(a - \frac{13}{2}b\right)^2 = 0{,}5b \cdot 12{,}5b \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ \left(a - \frac{13}{2}b\right)^2 = \frac{25}{4}b^2 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} a - \frac{13}{2}b = \frac{5}{2}b \\ a - \frac{13}{2}b = -\frac{5}{2}b \end{array}\right. \\ a^2 + 2b^2 = 18. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} a = 9b \\ a = 4b. \end{array}\right. \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9b \\ 81b^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4b \\ 16b^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9b \\ b^2 = \frac{18}{83} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4b \\ b^2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 6b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b = \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b = -\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b = -\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -4 \\ b = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

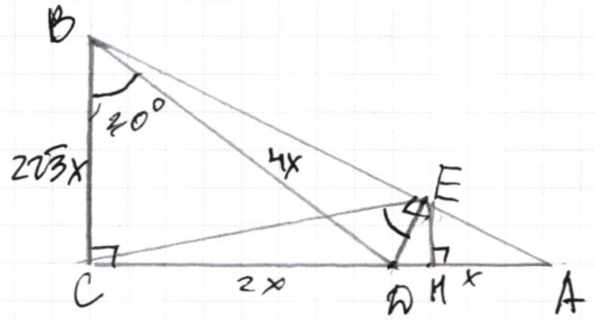
Если $\begin{cases} a = -9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b = -\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$, то $\begin{cases} x = 6 - 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y = 1 - \sqrt{\frac{18}{83}}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 27\sqrt{\frac{2}{83}} \\ y = 1 - 3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases}$

Если $\begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases}$, то $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Ответ: $\left(6 - 27\sqrt{\frac{2}{83}}; 1 - 3\sqrt{\frac{2}{82}}\right), (2; 0)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Решение:

1) Пусть $DA = x$, тогда $CD = 2x$

2) $\square CDEB$: $\angle BCD = \angle BED = \cancel{180}\ 90^\circ$, т.е. их сумма 180°, значит $\square CDEB$ — вписанный, по признаку впис. четырёхуг. о сумме противоп. углов,

т.е. $\angle CBD$ и $\angle CED$ вписанные, опир. на CD,
т.е. $\angle CBD = \angle CED = 30^\circ$

3) $\triangle BCD$: $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $CD = 2x$, т.е. $BD = 4x$
$BC = 2\sqrt{3}x$.

4) $\triangle ABC$: $AC = 3x$, $BC = 2\sqrt{3}x$, тогда
$\operatorname{tg} \angle BAC = BC : AC = \cancel{3x : 2\sqrt{3}x}$
$= 2\sqrt{3} : 3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5). $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$,

т.е. $\cos^2\angle BAC = \frac{1}{1+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{3}{7}$,

тогда $\sin^2\angle BAC = \frac{4}{\sqrt{7}}$.

т.к $\angle BAC$ — прямоуг. угол треуг., т.е. $\cos\angle BAC = \sqrt{\frac{3}{7}}$,
$\sin\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

6) $CA = \sqrt{7}$, т.е. $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

7) $\triangle DEA$: $\angle DEA = 90^\circ$, $EA = DA \cdot \cos\angle A = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8) $H \in CA$, $EH \perp AC$.

9) $\triangle AEM$: $\angle AME = 90^\circ$: $ME = AE \cdot \sin\angle A =$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$.

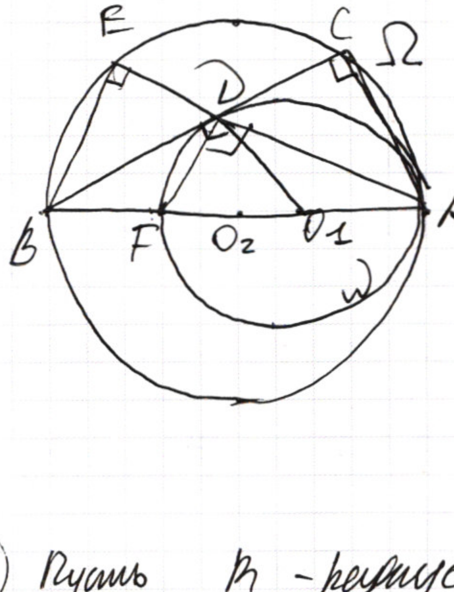
10) $\cancel{S_{CA}}$ $\cancel{AD:DC=}$ $S_{\triangle CED} = \frac{\cancel{EM} \cdot DC}{2} =$

$= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} \cdot 2\frac{\sqrt{7}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: а) $2\sqrt{3}$

б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

№5.



Решение:

O_1, O_2 — центры ~~[illegible]~~ ω и Ω.

1) Запишем степень точки D:

$BD \cdot DC = ED \cdot DA$.

2) O_1D — радиус пров. в т. кас., то есть $O_1D \perp BC$.

3) AB — диаметр Ω, т.е. $\angle BCA = 90^\circ$ — как впис. опир. на диаметр, $CA \perp BC$ т.е. $O_1D \parallel CA$, т.е. $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$.

4) Пусть R — радиус Ω, r — радиус ω, тогда

$\frac{BD}{BO_1} = \frac{BC}{BA}$; $\frac{3}{2R-r} = \frac{5}{2R}$; $6R = 10R - 5r$;

$4R = 5r$.

5) $AB \cap \omega = F$; AF — диаметр (т.к. A — ~~общая~~ точка касания, $A \in O_1O_2$; $B \in AO_2$; $O_1 \in AB$, т.к. $F \in AB$, т.е. $F \in O_1A$), тогда $\angle FDA = 90^\circ$ т.к. опир. на диам. $DF \perp AE$ т.к. опирается на диаметр.

6) $\angle BEA = 90^\circ$, т.к. $BE \perp EA$, т.е. $BE \parallel DF$, $\triangle ADF \sim \triangle AEB$; $\frac{AD}{AF} = \frac{AE}{AB}$; $\frac{AD}{2r} = \frac{AE}{2R}$; $\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} = \frac{4}{5}$, т.е. $\frac{AD}{DE} = \frac{4}{1}$.

7) По 1) $ED \cdot DA = 3 \cdot 2 = 6$. $\Big\} \Rightarrow 4DE^2 = 6 \Rightarrow DE^2 = 1{,}5$, $DE = \sqrt{1{,}5}$

тогда $DA^2 = 24$, $DA = \sqrt{24}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8) $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ по 3), т.е. $\frac{DO_1}{BO_1} = \frac{CA}{BA}$.

$\frac{r}{2R-r} = \frac{CA}{2R}$; $CA = \frac{2Rr}{2R-r} = \frac{4Rr}{4R-2r}$,

но $4R = 5r$, т.е. $CA = \frac{5r^2}{3r} = \frac{5}{3}r$.

9) $\triangle CAD$: $\angle D = 90°$, т.е. $AD^2 = CD^2 + CA^2$;

$CA^2 = AD^2 - CD^2 = 24 - 2^2 = 20$

$(\frac{5}{3}r)^2 = 20$; $r = \frac{\sqrt{20}\cdot 3}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$,

тогда $R = \frac{\sqrt{20}\cdot 3}{5}\cdot\frac{5}{4} = \frac{\sqrt{20}\cdot 3}{4} = \frac{6\sqrt{5}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$.

10) $\triangle BED$: $BE^2 + ED^2 = BD^2$; $BE^2 = 9 - 1{,}5 = 7{,}5$,

$BE = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$.

11) $\triangle AFD \sim \triangle ABE$ по 6), т.е. $\frac{DF}{2r} = \frac{BE}{2R}$,

$DF = \frac{r}{R}\cdot BE = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$.

12) $\triangle DAF$: $\angle D = 90°$, т.к. опир. на диаметр

тогда высота h провед. к гипот. $(FA = 2r)$ равна: $\frac{DF\cdot DA}{FA} =$

$= \frac{2\sqrt{6}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{10}}}{2\cdot\frac{3\cdot 6\sqrt{5}}{5}} = 2$.

13) Тогда $S_{\triangle BDA} = \frac{h\cdot BA}{2} = \frac{2\cdot(2R)}{2} = 2\cdot\frac{6\sqrt{5}}{4} = 3\sqrt{5}$.

14) $S_{\triangle CAD} = \frac{CA\cdot CD}{2} =$

$= \frac{\sqrt{20}\cdot 2}{2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

15) $S_{\triangle BED} = \frac{BE\cdot ED}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

16) ~~В~~ $BD:DC = 3:2$, т.е. $S_{\triangle BED} : S_{\triangle EDC} = 3:2$, т.е. $S_{\triangle EDC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt5}{4} = \frac{\sqrt5}{2}$.

17) Тогда $S_{BECA} = S_{\triangle EDB} + S_{EDC} + S_{CAD} + S_{BAD} =$

$= \frac{\sqrt5}{2} + \frac{3\sqrt5}{4} + 2\sqrt5 + 3\sqrt5 = \frac{2\sqrt5 + 3\sqrt5 + 8\sqrt5 + 12\sqrt5}{4} =$

$= \frac{25\sqrt5}{4}$ Ответ: $\frac{6\sqrt5}{5}$; $\frac{3\sqrt5}{20}$; $\frac{25\sqrt5}{4}$.

№6

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$.

$f(x) = -8x^2 + 6x + 7$ — парабола, ~~те~~ ветви которой направлены вниз., $x_в = \frac{-6}{-2 \cdot 8} = \frac{3}{8}$,

т.е. $f(x) \nearrow$ на $[-\frac{1}{2}; \frac{3}{8}]$, $f(x) \searrow$ на $[\frac{3}{8}; 1]$.

$f(1) = -8 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 = 5$

$f(-\frac{1}{2}) = -8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot (-\frac{1}{2}) + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$.

$g(x) = ax + b$, $g(x) \le f(x)$, т.е.

$g(1) \le f(1)$ и $g(-\frac{1}{2}) \le f(-\frac{1}{2})$.

$h(x) = 8x - 6|2x-1|$.

Если $x \ge \frac{1}{2}$: $h(x) = 8x - 6(2x-1) = -4x + 6$, т.е. на $[\frac{1}{2}; 1]$ $h(x) \searrow$,

Если $x \le \frac{1}{2}$, $h(x) = 8x + 6(2x-1) = 20x - 6$, т.е. на $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ $h(x) \nearrow$.

$h(1) = 8 \cdot 1 - 6|2 \cdot 1 - 1| = 2$

$h(-\frac{1}{2}) = 8 \cdot (-\frac{1}{2}) - 6(2 \cdot (-\frac{1}{2}) - 1) = -16$.

$h(\frac{1}{2}) = 4$.

$h(x) \le g(x)$, т.е. $g(1) \ge h(1)$; $g(\frac{1}{2}) \ge h(\frac{1}{2})$,

$g(-\frac{1}{2}) \ge h(-\frac{1}{2})$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BE^2 + 1{,}5^2 = 3^2$

$BE^2 = 7{,}5 = \frac{75}{10} = \frac{5\sqrt3}{\sqrt{10}}$

$DO_1 = \frac{4\sqrt3}{\sqrt{10}}$

$S_1 = \frac{5\sqrt3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt3}{2} =$

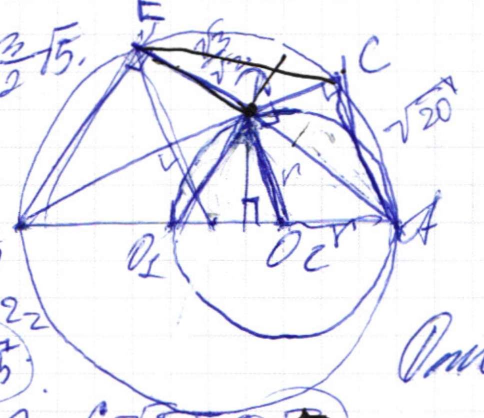
$= \frac{15\sqrt3}{2\sqrt{...}} = \frac32\sqrt5$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE = R^2 - d^2$

$\deg D = r^2 - d^2 = (d+r)(r-d)$

$BE^2 + ED^2 = BD^2$

$h = \frac{\frac{4\sqrt3}{\sqrt{10}} \cdot 2\sqrt6}{2\cdot\sqrt{20}\cdot 3} =$



$AD : \cancel{AE} = r_1 : r_2$

$= \frac{4\sqrt2 \cdot 5}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt2}{\sqrt2} =$

$S_2 = \sqrt{20} \cdot 2 = 2\cdot 4\sqrt5$

Ответ: $11{,}5\sqrt5$

$\frac{BD}{2R-r} = \frac{DC}{2R}$

$\frac{AD}{r} = \frac{AE}{R}$

$AE \cdot DE = BD \cdot DC$

$\cancel{DA^2 = DC^2 + 2rR(2R-r)}$

$S_3 = 2 \cdot \frac{6\sqrt5}{2} = 6\sqrt5$ 5

$\frac{DO_2}{BO_2} = \frac{CA}{BA}$

$\frac{r}{2R-r} = \frac{CA}{2R}$

$\frac{r}{2R-r} = \frac{CA}{2R}$

$\frac{2Rr}{2R-r} = CA$

$CA = 2Rr(2R-r) = \cancel{2{,}5r(2{,}5r-r)} =$

DA^2

$\frac{4Rr}{4R-2r} = CA$

$R =$

$\frac54 \cdot \frac{6\sqrt5}{5} = \frac{6\sqrt5}{4}$

$\frac{5rr}{5r-2r} = \frac53 r = CA$

$AE \cdot AD = 6$

$\frac{3}{2R-r} = \frac{5}{2R}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} = \frac45$

$\cancel{6R = 4R - 2r}$

$6R = 10R - 5r$

$4R = 5r$

$\frac{R}{r} = \frac54$

$\frac{AD}{AE} = \frac41$

$\frac{AD}{AE} = 4$

$\left(\frac53 r\right)^2 + 2^2 = DA^2$

$\left(\frac53 r\right)^2 = 20$

$a > b$

$b < 3$

$a < 2$

$a > 4$

A 4 D 1 E

$AD \cdot AE = 6$

$4AE = 6$

$AE^2 = 1{,}5$

$AD^2 = 24$

$AE = 1{,}5 = \frac32; \frac{\sqrt6}{2}$

$2\sqrt6$

$AD \cdot$

$r = \frac{\sqrt{20}\cdot 3}{5} =$

$\frac{25}{9} r^2 = 20$

$= \frac{6\sqrt5}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18. \end{cases}$$

$a=x-6$; ~~$x=a+6$~~

$b=(y-1)$; ~~$6(b+1)$~~

$x=6+a$

$y=b+1$

$6y=6(b+1)$

$x-6y=6+a-6(b+1)=$

$=a-6b.$

$$\boxed{\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab. \\ a^2+2b^2=18 \;|+2ab \end{cases}$$

$a^2+2ab+b^2+b^2=18+2ab$

$(a+b)^2+b^2=18+$

$2a^2-13ab+38b^2=18.|\cdot 2.$

$4a^2-26ab+76b^2=36.$

$(2a-\frac{13}{2}b)^2-\frac{13}{2}b^2+76b^2=36.$

$(2a-\frac{13}{2})^2$

$a^2-13ab+36b^2=0.$

$(a-\frac{13}{2}b)^2-(\frac{13}{2})^2b^2+36b^2=0$

$x=2.$

$y=0.$

$(a-\frac{13}{2}b)^2-6{,}5^2b^2+36b^2=$

$=0{,}5b\cdot 12{,}5b=$

$83|$

$6{,}5b^2-6b^2=$

$=\frac{25}{4}b^2.$

$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$$\left[\begin{array}{l} 16b^2+2b^2=18 \\ 81b^2+2b^2=18 \end{array}\right.$$

$b=1$,

$(a-\frac{13}{2}b)=\frac{5}{2}b$

$b^2=\frac{18}{83}$

$$\left[\begin{array}{l} a-\frac{13}{2}b=-\frac{5}{2}b. \\ a-\frac{13}{2}b=\frac{5}{2}b. \end{array}\right.$$

$a=-4$

$x=2$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=4b. \\ a=9b. \end{array}\right.$$

4.

$b=-1, a=-4.$

$a>6b.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

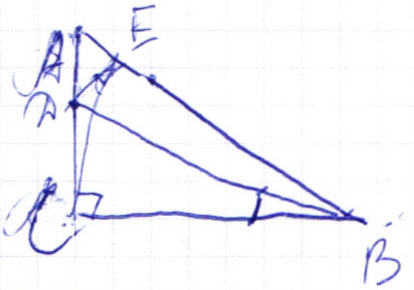
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

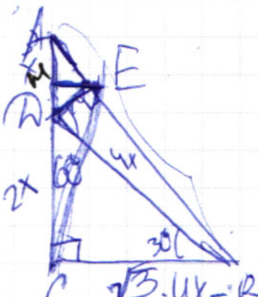
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4x = B$

$= 2\sqrt{3}x$

$tg = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$AB^2 = x^2 + 16x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4x\cdot x =$

$AB^2 = 21x^2$

8)

$8x - 6|2x-1| = ax + b$

$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$tg = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{7}{9}$

$21\cdot\frac{7}{9} = \frac{49}{3}$

$\boxed{x = \frac{\sqrt{7}}{3}}$

$1 + tg^2 = \frac{1}{cos^2}$

$cos^2 = \frac{1}{1+tg^2}$

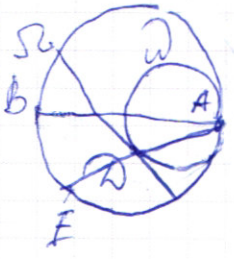
$cos^2 = \frac{1}{1+\frac{4\cdot 3}{9}} =$

$= \frac{1}{1+\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}$

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}$

$\boxed{sin = \frac{2}{\sqrt{7}}}$

$tg = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

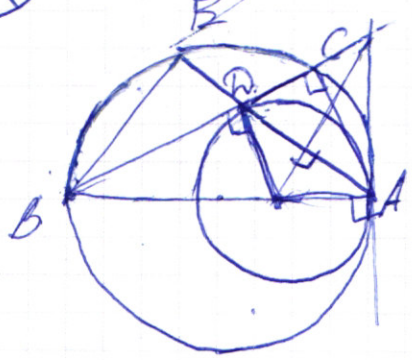


$AE = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot cos =$

$= \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$CD\cdot DB = ED\cdot DA$

$h = AE\cdot sin = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$



$S = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{2}{3} =$

$= \frac{4\sqrt{3}}{27}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1. a $b = qa$ $c = q^2a$ $b = \sqrt{ac}$. $a =$ $b = qa$ $c = q^2a$ $x = q^3a$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$a(q^3a)^2 - 2 \cdot qa \cdot q^3a + q^2a = 0$.

$q^6a^3 - 2q^4a^2 + q^2a = 0$

$q^4a^2 - 2q^2a + 1 = 0$.

$(q^2a - 1)^2 = 0$.

$q^2a = 1 = c$

Ответ: 1.

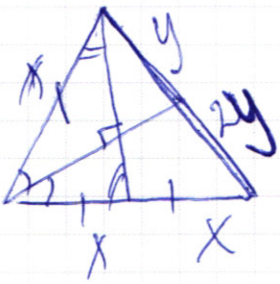
$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18) = 0$

$(x-6)^2 + 2y$.

$(x-6) + 2(y-1)^2 = 18$

№2



$x + 3y > 2x$

$3x > 3y$

$2x + 3y > x$

$3y > x \; | + 3x =$

$= 900 > 4x$

$x > y \; | + y \quad x < 225$

$300 > 2y$

$y < 150$

$900 | 4$
$-8 \quad 225.$
10
-8
20

$3x + 3y = 900$

$x + y = 300$.

$x < 225$, $y > 75$.

$y < 150$. $x > 150$.

$\begin{cases} 150 < x < 225 \\ 75 < y < 150. \end{cases}$

От 150 до 225

74 вариантов.

$\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

0 5
1234

№3

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}. \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12y + 36^2$.

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 - 36 + 20 + 2(y-1)^2 - 2 = 0. \end{cases}$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$.

$\begin{cases} \cancel{x^2 - 12yx + 36y^2 = (x-6)(y-1)} \quad xy - 6y - x + 6 \\ \cancel{x^2 - 12x} \end{cases}$

$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) - 18 = 0$

$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 - 18 = 0$

$a > 6b$. $x - 6y > 0$

$x > 6y + 6 - 6$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x-1\geq 0 \quad 2x\geq 1$

$x\geq 0,5.$

$-8x^2+6x+7$

$\frac{D}{4}=9+8\cdot 7=56+9=65.$

$x_в=\frac{-6}{2\cdot -8}=\frac{3}{8}.$

$-8x^2+6x+7=ax+b$

$-8x^2+(6-a)x+7-b=0.$

$D=(6-a)^2-4\cdot(-8)(7-b)\leq 0.$

$a+b<5$

$-\frac{1}{2}a+b<2$

$\frac{1}{2}a+b>4$

$3b<9$

$b<3$

$\frac{1}{2}a+b>4$

$\frac{1}{2}a>1$

$a>2.$

$-8+6+7=5.$

$x=0 \; ; 7$

$x=1. \; 5$

$x=-1. \; -7.$

$x=\frac{1}{2}$

$-2+3+7=8.$

$x=-\frac{1}{2}=$

$=-2-3+7=2.$

Если $x\geq 0,5.$

$8x-2x+6=$

$=-4x+16$

$x=\frac{1}{2}; \; -2+1=-1$

$x=-\frac{1}{2} \; 2;$

8

$10x-6$

-10

$x=-\frac{1}{2}$

$4-6\cdot 2=-16$

$1;$

$\boxed{\begin{matrix} 1 & 5 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2. & -16. \\ \frac{1}{2} & & >4 \end{matrix}}$

$-16<b<4$

$2<a+b<5$

$-16<-\frac{1}{2}a+b<2$

$4<\frac{1}{2}a+b.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№6.

Т.е. $2 \le a \cdot \cancel{1} + b \le 5$

$4 \le a \cdot \frac{1}{2} + b$

$\cancel{-16} \le a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b \le 2$.

$2 \le a + b \le 5$

$4 \le \frac{1}{2}a + b$

$-16 \le -\frac{1}{2}a + b \le 2$, т.е. a и b удовлетв. этим нерав.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)