МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Т.к, числа a, b, c, и d образует геом. прогрессию, то их можно записать a, $a\cdot q$, $a\cdot q^2$, $a\cdot q^3$, где q - знаменатель прогрессии, а d, 4-ый член прогрессии.

тогда

$ax^2+2bx+c = ax^2+2aqx+aq^2 =$
$=(\sqrt{a}\,x)^2+2(\sqrt{a}\cdot x)\cdot(\sqrt{a}\cdot q)+(\sqrt{a}\,q)^2=(\sqrt{a}\,x+\sqrt{a}\,q)^2=$
$=(\sqrt{a}\,(x+q))^2=0. \Rightarrow x=-q$, а, т.к, корень уравнения $ax^2+2bx+c$ - является число d, то.

$a\cdot q^3=-q \Rightarrow a=-\frac{1}{q^2}$

тогда число c (3-ий член прогрессии), это

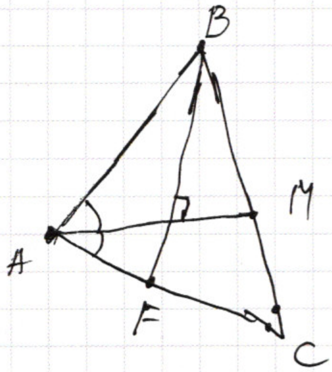
$a\cdot q^2=-\frac{1}{q^2}\cdot q^2=-1$

Ответ: -1.

~~30~~ №2.

Рассмотрим произвольный треугольник, у которого биссектриса $\perp$ медиане.

Пусть угол $\angle BAM = x$, $\angle CAM = x$, тогда, углы $\angle BFA$ и $\angle ABF$ равны $90-x$, из-за ~~не~~ $\perp$ биссектрисы и медианы,



, значит $\angle ABF = \angle AFB \Rightarrow AB = AF$,

$AF = \frac{1}{2} AC \Rightarrow AC = 2AB$,

Отсюда получаем, чтобы Δ, имел бисс. $\perp$ медиане, надо, чтобы одна из сторон была в два раза больше друг.

Пусть. стороны ~~тре.~~ Δ равны a, b, c, но по выше сказанному, мы определили, что одна из сторон в 2-раза больше другой;

т. е. $b = 2a$.

Вспоминая неравенство Δ получаем систему.

$$\begin{cases} 3a + c = 1200 & (1) \\ a < 2a + c & (2) \\ 2a < a + c & (3) \\ c < 2a + a & (4) \\ a, c \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Неравенство (2) выполняется всегда, т.к $2a > a$.

Из неравенств (3) и (4) выводим, что

$c > a$; $c < 3a \Rightarrow c \in (a; 3a)$

Подставим эти значения в (1) и получим.

$a + 3a = 1200 \Rightarrow a = 300$

$3a + 3a = 1200 \Rightarrow a = 200$

т.к $a > 0$; $\mathbb{N}$, то при увеличении c, a будет меньше и меньше, значит нам подходят значения $a \in [200; 300)$; $a \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ 99 вариантов т.к на одно знач. a, прихад. одно зн. c. Ответ: 99

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

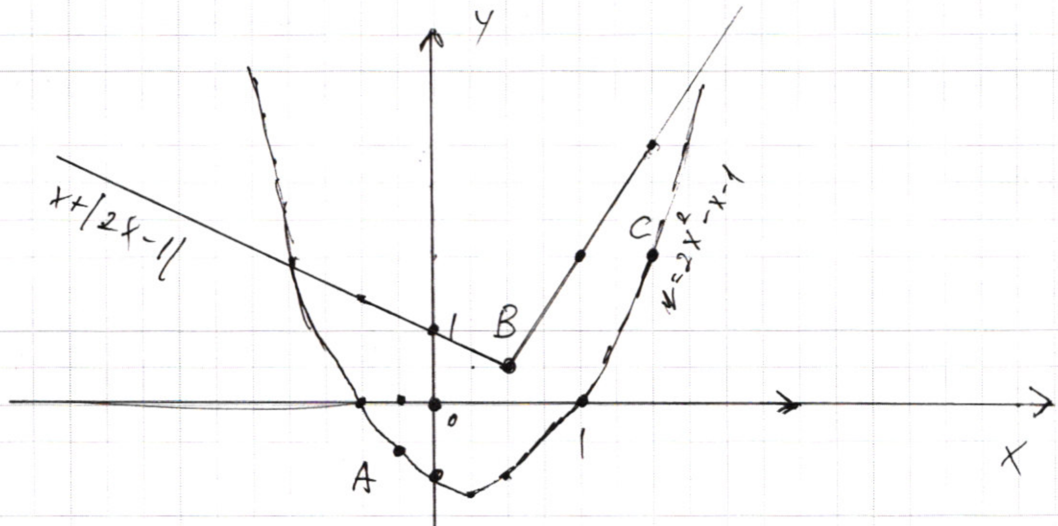
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.

Начертим графики $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x - 1|$

1) $y = 2x^2 - x - 1$, ветви вверх, вершина в точке
$\left(\frac{1}{2 \cdot 2}; 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$, корни в точках
$(1; 0)$ и $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

2) $y = x + |2x - 1|$;
а) если $x > \frac{1}{2}$; $y = 3x - 1$
б) если $x \le \frac{1}{2}$; $y = -x + 1$.



Заметим, что $y = ax + b$
должна быть выше прямой
AC (или быть ей) и
ниже точки B (или проходить через нее).

Найдем эти точки

точка A: $x = -\frac{1}{4}$; $y = 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$

точка B: $x = \frac{1}{2}$ $y = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

точка C:

$x = \frac{3}{2}$ $y = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 = 2$.

подставим эти точки под $y = ax + b$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + b = -\frac{5}{8} \quad (1) \\ \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \quad (2) \\ \frac{3}{2}a + b = 2. \quad (3) \end{cases}$$

$-\frac{1}{4}a + b = -\frac{5}{8}$

$\Rightarrow a + \cancel{b} = \frac{3}{2}. \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$;

~~последние~~ 2 (1); (2) удовлетворяют ~~точки~~ знач. $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{1}{4}$.

но. $-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$, то, есть

точки A, B, C, лежат на одной прямой,

значит др. значений ~~a и b~~ a и b быть не может.

~~Также заметим, что если $a = 0$,~~

~~то~~ ~~зн~~ Отсюда Ответ: $a = \frac{3}{2}$; $b = -\frac{1}{4}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Докажем, что $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$; при $b \neq 0$

$f\left(\frac{a}{b}\right) + f(b) = f(a)$, но $a = \frac{a}{b} \cdot b$, что дано

в условии задачи, значит $f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$, ч.т.д.

, т.к $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, то $f(y) > f(x)$

Теперь распишем все возможные значения $f(y)$, при y от 1 до 21, используя $f(p) = [p/2]$, при p – простое.

$f(1) = f\left(\frac{2}{2}\right) = f(2) - f(2) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2.$

$f(5) = 2$

$f(6) = f(3) + f(2) = 2.$

$f(7) = 3$

$f(8) = f(2) + f(2) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(5) + f(2) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = f(2) + f(2) + f(3) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = f(2) + f(7) = 4$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = f(8) + f(2) = 4$

$f(17) = 8$

$f(18) = f(9) + f(2) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = f(10) + f(2) = 4$

$f(21) = f(7) + f(3) = 4.$

Тоесть.

$f(y) - 0$ – 1 случай

$f(y) = 1$ – 2 случая

$f(y) = 2$ – 4 случая

$f(y) = 3$ – 6 случаев.

$f(y) = 4$ – 4 случая

$f(y) = 5$ – 1 случай

$f(y) = 6$ = 1 случай

$f(y) = 8$ – 1 случай $f(y) = 9$ – 1 случай.

Все тоже самое с $f(x)$, тогда.

если $f(y) = \phi \Rightarrow f(x)$ может принимать зн. 0

в 1 случае. $\Rightarrow 2 \cdot 1 = 2$ сл.

если $f(y) = 2 \to f(x) \in [0; 1] \to 4 \cdot 3 = 12$ сл

если $f(y) = 3 \to f(x) \in [0; 2] \to 6 \cdot 7 = 42$

~~если~~ $f(y) = 4 \to f(x) \in [0; 3] \to 4 \cdot 13 = 52$.

$f(y) = 5 \to f(x) \in [0; 4] \to 1 \cdot 17 = 17$

$f(y) = 6 \to f(x) \in [0; 5] \to 1 \cdot 18 = 18$.

$f(y) = 8 \to f(x) \in [0; 7] \to 1 \cdot 19 = 19$

$f(y) = 9 \to f(x) \in [0; 8] \to 1 \cdot 20 = 20$.

Все это с учетом, что $1 \leq x \leq 21$; $1 \leq y \leq 21$;

$x, y \in N$.

Тогда количество пар. это

$2 + 12 + 42 + 52 + 17 + 18 + 19 + 20 = 56 + 87 + 39 = 95 + 87 =$

$= 182$ пары

Ответ: 182.

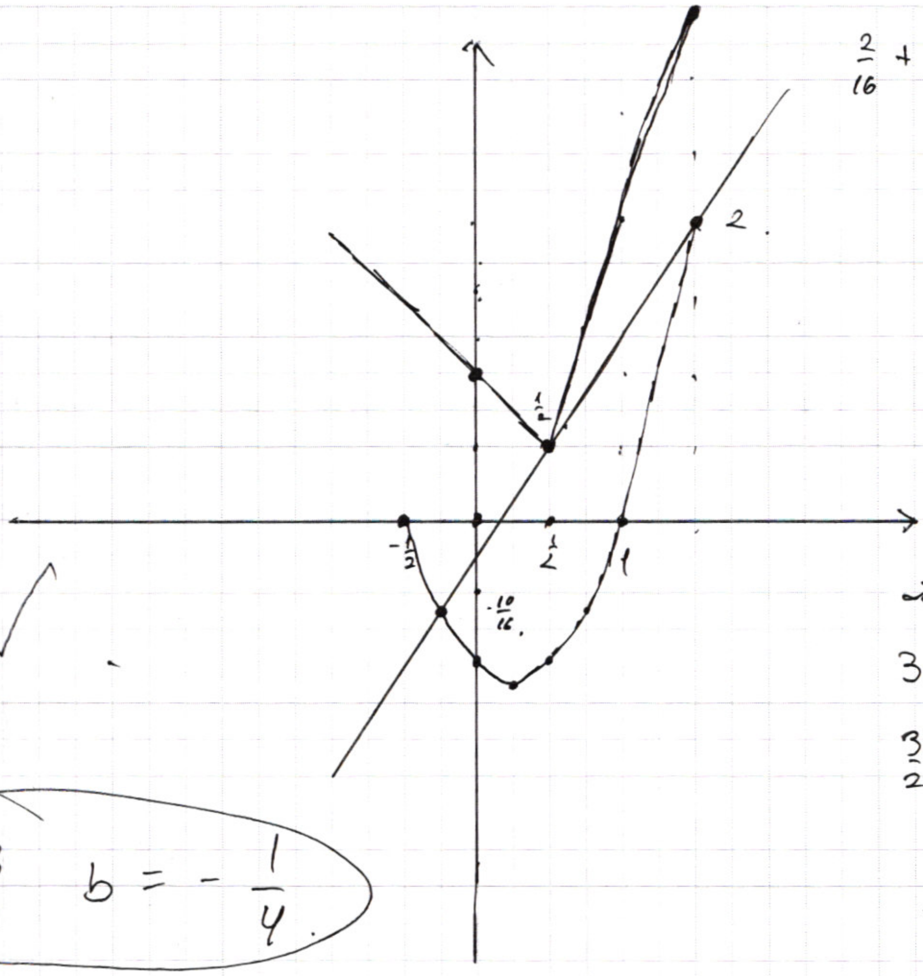
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{2}{16}+\frac{4}{16}-\frac{16}{16}$

$-\frac{10}{16}=-\frac{5}{8}$

$\frac{9}{2}-\frac{3}{2}$

$\frac{9}{2}-\frac{3}{2}=\frac{6}{2}$

$x>\frac{1}{2}$

$3x-1$

$\frac{3}{2}\cdot 3=4$

$x<\frac{1}{2}$

$-x+1$

$\frac{1}{4}$

$a=\frac{3}{2} \quad b=-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}a+b=-\frac{10}{16}$

$3x-1$

$\frac{1}{2}a$

$\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}a+b=2$

$a=\frac{3}{2} \Rightarrow a=3 \quad -\frac{3}{4}-1$

$b=-1$

$-\frac{7}{4}=$

$a=\frac{3}{2} \quad b=-\frac{1}{4}$

$\frac{9}{4}$

$-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}+ \quad -\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=$

☒ черновик ☐ чистовик

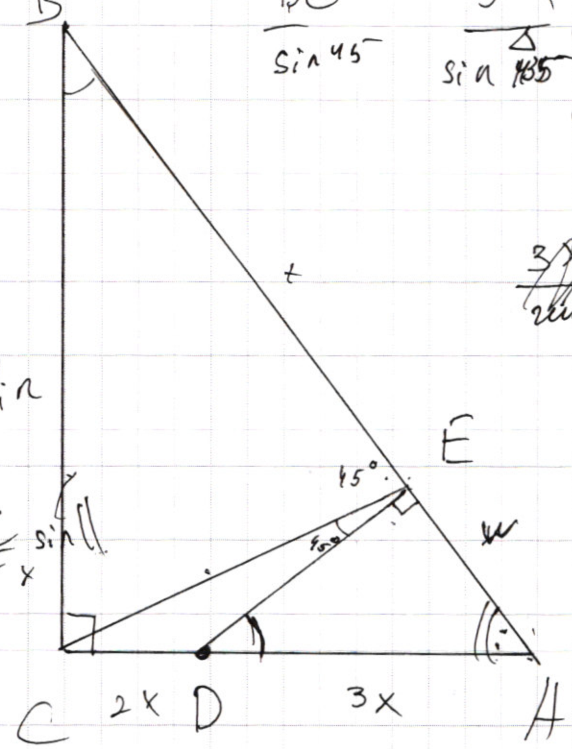
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{BC}{\sin 45}$ $\frac{5x}{\sin 135}$ $\triangle CBA \sim \triangle EDA$.

$\frac{CB}{ED} = \frac{BA}{DA} = \frac{AC}{AE}$



$\frac{5x}{BC}$ sin

$\sin (= \frac{BC}{5x} \sin (($

$\frac{3x}{un}$. $\frac{un}{3x} = \frac{5x}{AE}$

$un \cdot AE = 15x^2$.

$w \cdot (w+t) = 15x^2$

$w^2 + wt = 15x^2$.

$tg \angle A = \frac{ED}{EA} = \frac{BC}{AC}$

$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2}$

$BC = un^2 - AC^2$

$\frac{5x}{\sin (} = \frac{BC}{\sin ((}$

$\sqrt{(AD^2 - AE^2) \cdot (un^2 - AC^2)} = EA \cdot BC$.

$\sqrt{xy - 2x - y + 2} = -2x^2 - y^2 + 2x + 5y - 3 = 0$

$2x^2 + y^2 - 2x - 5y + 3 = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$.

$(2x^2 + y^2 - 2x - 5y + 3)^2 = xy - 2x - y + 2$

$4x^4 + 2x^2y^2 - 4x^3 - 10x^2y + 6x^2 + 2x^2y^2 + y^4 - 2xy^2 - 5y^3 +$
$+ 3y^2 - 4x^3 - 2xy^2 + 4x^2 + 10xy - 6x - 10x^2y - 5y^3 + 10xy +$
$+ 25y^2 - 15y + 6x^2 + 3y^2 - 6x - 15y + 9 - xy + 2x + y - 2 = 0$.

$4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 10x + y^4 - 10y^3 + 31y^2 - 29y + 4x^2y^2 -$
$- 20x^2y - 4xy^2 + 19xy + 7 = 0$. $(2x^2 + y^2)^2$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(1) - 0$ ~~$f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) + f($~~

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2 - 1.$

$f(7) = 3$

$f(8) = 3$

$f(9) = 2.$

$f(10) = 3.$

$f(11) = 5$

$f(12) = 3.$

$f(13) = 6$

$f(14) = 4.$

$f(15) = 3$

$f(16) = 4.$

$f(17) = 8$

$f(18) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = 6.$

$f(21) = 4.$

1 – 2
2 – 4
3 – 6
4 – 3
5 – 1
6 – 2
7 – 1
8 – 1
9 – 1.

$f\left(\frac{2}{2}\right) = f(2)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(x) < 2\cdot f(y)$; $f(x+0)$ то.

~~если~~

~~если $f(x) = 2$, то~~

~~$4\cdot 2 = 8$ (вар.)~~

~~если $f(x) = 3$, то~~

~~$6\cdot(4+2) = 36.$~~

если $f(x) = 4$ то.

$f(y) = 1 \to 2\cdot 1 = 2$

$f(y) = 2 \to 4\cdot(2+1) = 12$

$f(y) = 3 \to 6\cdot 7 = 42$

$f(y) = 4 \to 3\cdot 13 = 39$

$f(y) = 5 \to 16$

$f(y) = 6 \to 2\cdot 17 = 34.$

$f(y) = 8 \to 19$

$f(y) = 9 \to 20$

$$2 + 12 + \overbrace{42 + 39}^{81} + \overbrace{16 + 34}^{50} + 19 + 20 = 184$$

$\cdot 100$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(2x^2+y^2)^2+(4x+2y)^2$

$2+y^2$

$3xy.$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(21)$ – макс аргум.

$f\left(\frac{1}{21}\right)$ – мин

$\cancel{1=3-2}$

1

$2 = \cancel{2+1}$

$3 = 2+1$

$4 = \cancel{2+2}.\ 2\cdot 2$

$5 = \cancel{2+3}$

$6 = \cancel{3+3}\ \ 3\cdot 2$

$7 = \cancel{3+2+2}$

$8 = 2\cdot 2\cdot 2$

$9 = 3\cdot 3$

$10 = 2\cdot 5$

$11 = 11$

$12 = 2\cdot 3\cdot 2.$

$13 =$

$14 = 2\cdot 7$

$15 = 5\cdot 3$

$16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

$17 =$

$18 = 2\cdot 3\cdot 3$

$19 =$

$20 = 5\cdot 5\cdot 2\cdot 2$

$21 = 7\cdot 3.$

$\boxed{\begin{matrix} 2 & 5 & 11 & 17 \\ 3 & 7 & 13 & 19 \end{matrix}}$

$f(2) =$

$f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b).$

$\cancel{\frac{5}{7}}\ \frac{3}{11}+f(1)=f(a)^3$

$3 = \frac{3}{11}\cdot 11.$

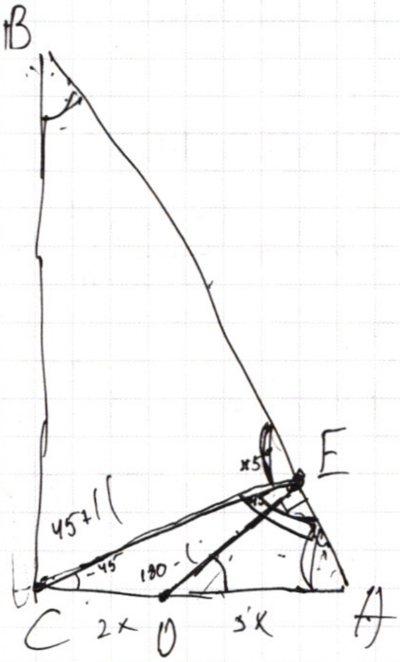
$f\left(\frac{a}{b}\right).$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$3x \cdot 2 \cdot \alpha$

$\cancel{3x \cdot 2 \cdot \alpha}$

135

$f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + f(b)$

$\sin 135 = \sin 45$

$\frac{5x}{\sin} = \frac{EA}{3x} \Rightarrow$ $\frac{DE}{EA}$

$\frac{5x}{BC}$

$EA = \frac{15x^2}{\sin}$

$\frac{DE}{3x} = \frac{BC}{\sin} = \frac{3x\,BC}{\sin} = DE$

$\sin$

$\frac{A}{\sin} = \frac{B}{\sin}$ $\frac{5x}{\sin 135}$; $\frac{BC}{\sin 45}$

$\frac{5x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{CE}{\sin(}$ $\frac{CE}{\sin(}$ $\frac{CE}{\sin((}$

$\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{CE}{\sin((}$

$5x \cdot \sin(= BC \cdot \sin(($

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 решено

2 – решено, но не уверен.

3 – ?

4 – ~~решено~~

5 – ?

6 – решено, но не полностью

7 – ?

$$2x^2+\frac{(2x+5)^2}{(5x-1)^2}-4\frac{(2x+5)}{(5x-1)}-4x+3=0.$$

$$2x^2(5x-1)^2+(2x+5)^2-4(2x+5)(5x-1)-$$
$$-4x(5x-1)^2+3(5x-1)^2=0.$$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \quad -2xy.$$

$$x^2+2xy+y^2+x^2-2x+1-4y+2=0.$$

$$\cancel{(x+y)^2+(x-1)^2+2(2y+2xy+1)=0.}$$

$$2x^2-4x+2+y^2-2y+1-2y=0.$$

$$\underbrace{2(x-1)^2+(y-1)^2}-2y=0. \quad \Rightarrow y \geq 0.$$

$$x \geq 0.$$

$$y^2-4xy+4x^2-xy+2x+y-2=0.$$

$$2x^2+4x+2+y^2+2y+1-5xy-2x-y-5=0$$
$$\underbrace{2(x-1)^2+(y-1)^2}-(5xy+2x+y+5)=0$$

$$2y=5xy+2x+y+5$$

$$5xy-2y+y=2x+5$$
$$y(5x-2+1)=2x+5$$
$$y=\frac{2x+5}{5x-1}.$$

$-2x$

$\sqrt{xy-2x-y+2} - y = 2x^2+y^2-\cancel{2}6x-4y+3$

$\sqrt{xy-2x-y+2} = 2x^2+y^2-6x+-3y+3.$

$2(x^2-2x+1)+y^2-2y+1 = (2x-y) =$

$2(x^2-1)+(y-1)^2 - (2x+y) \cancel{\leq 0}\ \cancel{2x}$

$2x = y - \sqrt{xy-2\ldots}\ \sqrt{}$

$2x = 2x^2+y^2-2x-4y+3 \ldots$

$-2x^2-y^2+2x+5y-3 = \sqrt{}$

$-(2x^2+y^2+2x+5y-3) = \sqrt{}$

$2\cdot(x^2 \cancel{+} - \cancel{2}x + \cancel{2}) + (y + \cancel{3}y + 2) =$

$-2x+y-7 = y-2x \cancel{0}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{y^2 + 4x^2 =}$

$y^2 - 4yx + 4x^2 = xy - 2x - y + 2.$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 4xy - 2x^2 + xy - 6x - 5y + 5 = 0$

$2x^2 + 5xy - 6x - 5y + 5 = 0.$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0.$

$y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0.$

$x(5y - 2) = y^2 + y - 2.$

$x = \frac{y^2 + y - 2}{5y - 2}.$ $\qquad \frac{-2}{-2} = 1.$

$y^2 - 5y\frac{y^2+y-2}{5y-2} + 2\frac{y^2+y-2}{5y-2} - 2 = 0.$

$\cancel{5y^3} - \cancel{2y^2} - \cancel{5y^3} - 5y^2 \cancel{+10y} + \cancel{2y^2} + 2y - \cancel{4} - \cancel{10y} + \cancel{4} =$

$y(2 - 5y) = 0.$ $\qquad y = 0.$

$y = \frac{2}{5}$ X

$2x^2 \cancel{+3} x + 3 = 0.$

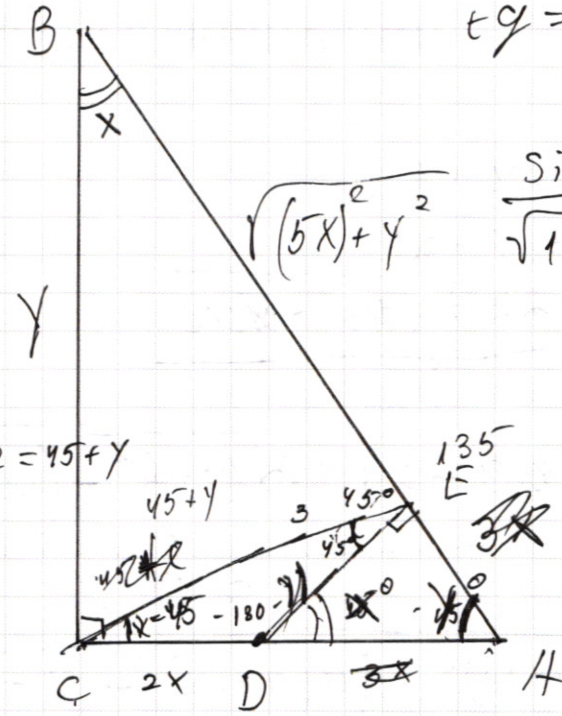
$-2x = \sqrt{-2x + 2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№4.

$tg\ BAC - ?$



$tg = \frac{\sin}{\cos} =$

$\frac{\sin}{\sqrt{1-\sin}}$.

$x > 45$

$y < 45$

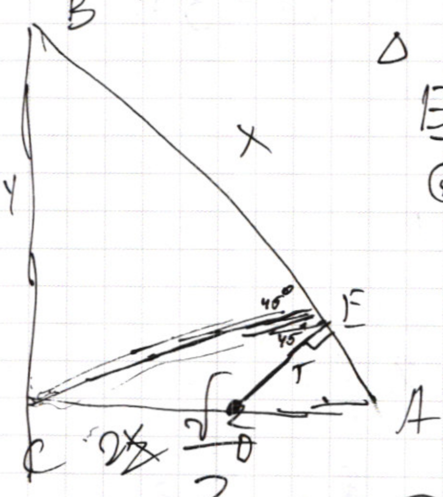
$135 + y + ?$

$x + y + 90 = 180$

BCE $x + 45 + z \Rightarrow z = 45 + y$

$\angle CDE =$

$x + y = 90°$



$\triangle EDA \sim \triangle CBA$ - по 3-ем углам.

$\frac{ED}{CB} = \frac{DA}{BA} = \frac{EA}{CA} =$

$\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot b$.

$\frac{ED}{y} = \frac{3x}{\sqrt{(5x)^2+y^2}} = \frac{EA}{5x}$

$45 + (+ (- 45 = 90 \Rightarrow (= 45°$.

$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

Возможно, нужно проверить.

$5x = \sqrt{29}$

$3x = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

б)

$\boxed{\cancel{S_{CEA} = \sqrt{29} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 — (−1)

$a;\ b = a + d$

$c = a + 2d.$

$x = \dfrac{-2b + \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-2a - 2d + 2\sqrt{(a+d)^2 - (a(a+2d))}}{2a} =$

$\dfrac{\sqrt{(a+d)^2 - (a(a+2d))} - a - d}{a} = a + 3d.$

$\cancel{a^2 + 2ad + d^2 - a^2 - 2ad - a - d}$

$\cancel{\sqrt{d^2 - a - d} = a + 3d.}$

$\cancel{d^2 - a - d =}$

a

$b = a \cdot q$

$c = a \cdot q^2$

$-q.\quad d = a \cdot q^3$ или

$-q = a \cdot q^3$

$a = -\dfrac{1}{q^2} \Rightarrow$

$c = a \cdot q^2 \cdot \dfrac{1}{} = -\dfrac{1}{q^2} \cdot q^2 x = -1 \cdot q.$

$\sqrt{a}x + \sqrt{a}q.$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 =$

$= (\sqrt{a}x + \sqrt{a}q)^2 =$

$(\sqrt{a}(x + q)) = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2(25x^2-10x+1)+4x^2+20x+25-4(10x^2-2x+25x-5)-$

$-4x(25x^2-10x+1)+3(25x^2-10x+1)=0$.

$50x^4-20x^3+2x^2+4x^2+20x+25-40x^2+8x-100x+20-$

$-100x^3+40x-4x+75x^2-30x+3=0$.

$50x^4-120x^3+41x^2-66x+48=0$.

~~800-800-160+162.~~ $(x=2)$

~~$50\cdot81-120\cdot27+41\cdot9-66\cdot3+48$.~~ $(x=3)$

$4050-3240$

~~$a-const$~~

$\boxed{a=\frac{3}{2} \quad b\in\left[-\frac{1}{4};-\frac{7}{16}\right]}$

$a=\frac{3}{2}$

$b=-\frac{1}{4}$

$b=-\frac{1}{4}$

$a>\frac{3}{2}\quad a<\frac{23}{16}$.

$ax-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}>-\frac{13}{16}$

$\frac{3}{2}a-\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{9\cdot7}{3\cdot9}=$

$-\frac{1}{4}a>-\frac{7}{16}$, $a<\frac{28}{16}$

$a>\frac{3}{2}$

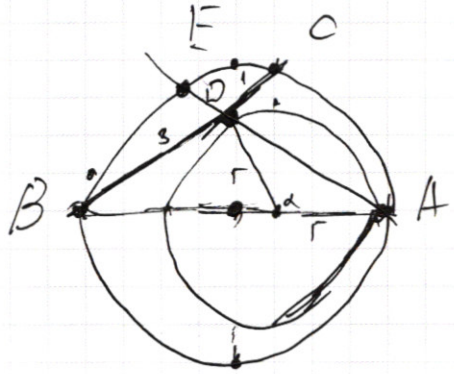
$12\cdot27=324$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

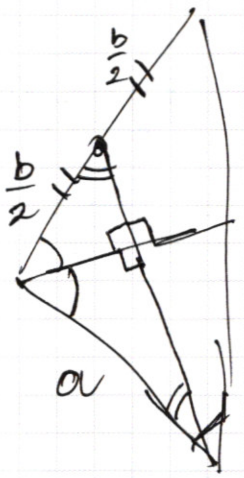


$AD = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos\alpha =$

$2r^2(1 - \cos\alpha.$

$BD \cdot BC = AD \cdot DE = 3.$

№2.



$a = \frac{b}{2} \Rightarrow 2a + a + c = P.$

$2a = b.$

$2a + a + c = P \Rightarrow$

$3a + c = P = 1200.$ с учетом.

$\cancel{\frac{a}{2} < a +}$ $a < 2a + c$ V

$2a < a + c \Rightarrow c > a$

$c < 3a$

$3a + c = 1200$

$a < c < 3a.$

min зн. a.

$\Updownarrow$

max зн. a

$4a = 1200 \Rightarrow a = 300$

$6a = 1200 \Rightarrow a = 200$

$a \in [200; 300] \Rightarrow$ 99 вариантов.

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $y-2x>0$.

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=\cancel{0}$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-\cancel{2}$

$-2x^2+5xy-6x-5y+5=0.$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$(x-1)^2+(x-1)^2-xy+6x+5y-7=0$

$2+1-1$.

№6.

$2x^2-x-1=0$ $D=1+8=9$

Вершина в $\frac{1}{4}$. $x_1=\frac{1+3}{4}=1$

$\frac{1}{8}-\frac{2}{8}-\frac{8}{8}=-\frac{9}{8}$. $x_2=-\frac{1}{2}$.

$x+|2x-1|$

$2x-1>0$ при $x>\frac{1}{2}$.

$3x-1$.

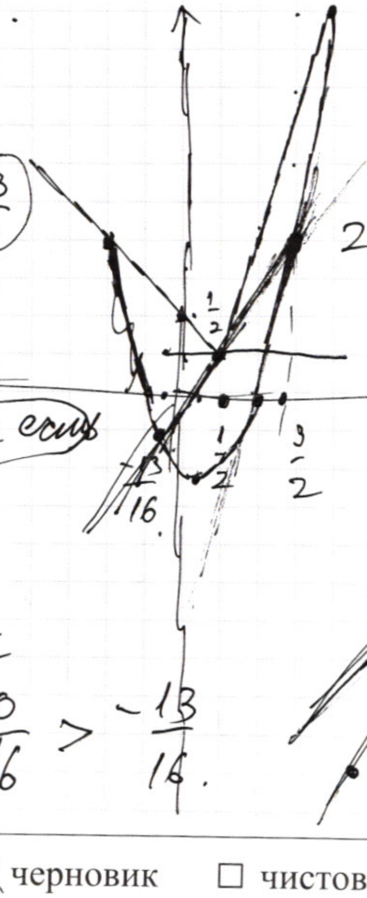
$x\le\frac{1}{2}$

$-x+1$.

$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-1=$

$\cancel{2+1-16}$ $-\frac{13}{16}$.

$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-1$



$2=\frac{3}{2}a+b$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+b$

$\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$ 1 точка есть

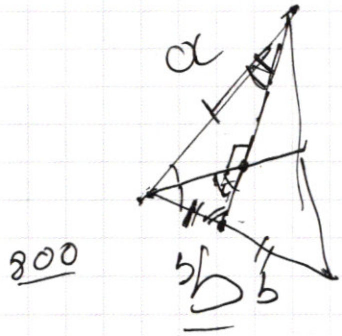
$\frac{3}{2}a=a$

$\frac{9}{4}-\frac{1}{4}$

$\frac{3}{8}-\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=$

$-\frac{5}{8}$ $-\frac{10}{16}>-\frac{13}{16}$.

$a = \cancel{2b}$ $\frac{b}{2}$



$a + \frac{a}{2} + c = 1200$

$\frac{3}{2}a + c = 1200$

$1200 : 3 = 400$

а - четное

с - четное

300; $\frac{600}{2}$

вар.

$399 - a$.

$a + \frac{a}{2} > c$

$\frac{3}{2}a > c$

$a + c > \frac{a}{2}$ ✓

$\frac{3}{2}a > 600$

$c + \frac{a}{2} > a \Rightarrow c > \frac{a}{2}$

$c < \frac{3}{2}a$

$a = \cancel{20}$ 402

~~20~~ ~~30~~ 200

199

a

$\frac{1200 - c}{3} < c$

$1200 - c < 3c$ c

$c > 600$, $300 < c$, $c \vdots 3$

99

Ответ 100 в.??