

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$a, b, c$  -  $1a, 2a, 3a$  члены ариф. прогр.

$$a = b_0 \quad b = b_0 q \quad c = b_0 q^2, \text{ тогда } b_0 q^3 -$$

четвертый  
член ариф.  
прогрессии.

$$\begin{cases} b_0 \neq 0 \\ q \neq 0 \end{cases} \text{ тк РП.}$$

По условию четвертый член прогрессии  $b_0 q^3$  удовлетворяет уравнению:  $(x - q)$  член прогрессии.

$$\begin{cases} b_0 q^3 = x \\ ax^2 - 2bx + c = 0. \\ a = b_0 \\ b = b_0 q \\ c = b_0 q^2. \end{cases}$$

$$b_0 x^2 - 2b_0 q x + b_0 q^2 = 0.$$

$$b_0 (x^2 - 2qx + q^2) = 0$$

$$b_0 \neq 0, \text{ тк РП}$$

$$\Downarrow \\ (x - q)^2 = 0$$

$$x = q \Rightarrow \text{4й член РП равен } q.$$

$$\begin{cases} b_0 q^3 = x \\ x = q \end{cases} \Rightarrow \frac{b_0 q^2}{1} = 1$$

$$\Downarrow \\ \text{3й член РП} \\ = 1$$

Ответ: 1

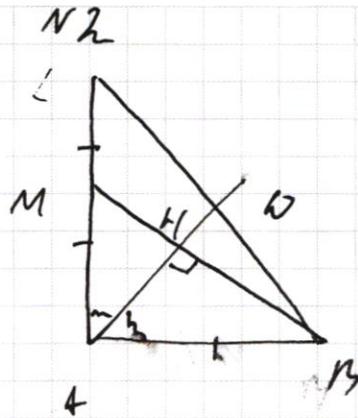
Дано:

$AW$  - медиана

$BM$  - медиана

$BM \perp AW$

$AL + AB + BV = 900$



(1)  $AW$  - медиана  $\perp$   $BM$  и  $BM$  - медиана  $\perp$   $AW$   $\Rightarrow \triangle AMB$  равнобедренный  $\Rightarrow AB = MA$ .

(2) Пусть  $AB = a$   
( $BC = b$ , тогда т.к.  $BM$  - медиана  $\Rightarrow AL = 2a$ .)

(3) так как сумма длин сторон больше 3х в треугольнике и периметр равен 900, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3a + b = 900 \\ b < 3a \\ 2a < b < a \\ a < 2a + b \end{cases} \quad \begin{cases} b = 900 - 3a \\ a < b < 3a \end{cases} \Rightarrow a < 900 - 3a < 3a$$

$$4a < 900 < 6a \Leftrightarrow \begin{cases} a > 150 \\ a < 225 \end{cases} \Rightarrow 74 \text{ возможных значения}$$

для  $a \Rightarrow 74$  возможных значений  $b$   
треугольника (и 74 значений  $b$ )

Ответ: 74

N 3

$$\begin{cases} x-6-6y+6 = \sqrt{(y-1)(x-6)} \\ 2y^2-4y+2 + x^2-12x+36 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} | b = +\sqrt{\frac{18}{83}} \\ | a = \frac{9\sqrt{18}}{\sqrt{83}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(y-1)(x-6)} \\ 2(y-1)^2 + (x-6)^2 = 18 \end{cases}$$

$$| x-6 = \frac{9\sqrt{18}}{\sqrt{83}}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6\sqrt{83} + 9\sqrt{18}}{\sqrt{83}} \\ y = \frac{\sqrt{83} + \sqrt{18}}{\sqrt{83}} \end{cases}$$

Пусть  $\begin{cases} a = (x-6) \\ b = (y-1) \end{cases}$

ОДЗ:  $\begin{cases} ab \geq 0 \\ b \leq \frac{a}{6} \end{cases}$

$$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \quad (1) \\ 2b^2 + a^2 = 18. \end{cases}$$

II.  $b < 0$ .

$$a = 4b.$$

$$\text{т.е. } 18b^2 = 18.$$

$$b = -1.$$

$$a = -4.$$

$$x-6 = -4$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad ab &= a^2 - 12ab + 36b^2 \\ a^2 - 13ab + 36b^2 &= 0. \end{aligned}$$

$$D = 25b^2.$$

$$a = \frac{13b \pm \sqrt{25b^2}}{2}.$$

I.  $b \geq 0$

$$a = 9b.$$

$$2b^2 + 81b^2 = 18.$$

Ответ:  $(2; 0); (-1; -4)$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Сделаем проверку через нули:

$$\begin{cases}
 2 - 0 = \sqrt{0 + 0 - 2 + 6} \\
 4 + 0 - 2 \cdot 4 - 0 + 2 \cdot 0 = 0
 \end{cases}
 \begin{cases}
 0 = 0 \\
 0 = 0
 \end{cases}
 \Rightarrow \text{через} \\
 (2; 0) \text{ по-} \\
 \text{скольку}$$

$$(2) \quad \frac{3\sqrt{18}}{\sqrt{83}} = \sqrt{\frac{9\sqrt{18}}{\sqrt{83}} \cdot \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{83}}}$$

Ответ:  $(2; 0)$ ;  $\left( \frac{6\sqrt{83} + 9\sqrt{18}}{\sqrt{83}} ; \frac{\sqrt{83} + \sqrt{18}}{\sqrt{83}} \right)$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.

Дано:

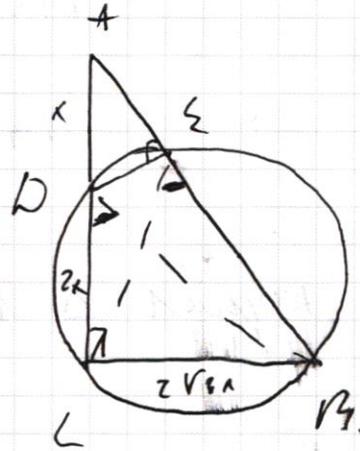
$$AW : AL = 1 : 3$$

$$W \zeta \perp AB.$$

$$\angle \zeta W = 30^\circ.$$

$$\angle C = 90^\circ$$

$$\operatorname{tg}(\angle BAC) = ?$$



а):

$$(1) \angle D \zeta B + \angle W C B = 180^\circ \Rightarrow \angle C D \zeta + \angle C B \zeta = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

Углы противоположных углов в четырехугольнике  $\zeta B C D$   $\angle D \zeta B = 180^\circ \Rightarrow$  вокруг него можно описать окружность.

$$(2) \angle K \zeta B = \angle W C B - \angle \zeta W = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Углы  $\angle \zeta B C$  и  $\angle C W B$  опираются на одну дугу  $\zeta B \Rightarrow \angle \zeta B C = \angle C W B = 60^\circ$

(3) Пусть  $AW = x$ , тогда по углу  $W C = 2x$ .  
из прямоугол.  $\triangle W C B$ :

$$CB = WC \cdot \operatorname{tg}(\angle C W B) = 2x \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}x.$$

$$(4) \operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{CB}{AL} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

①

Дано:

$$\left. \begin{aligned} AC = \sqrt{7} \\ S_{ACW} = ? \end{aligned} \right\}$$

①  $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$  (т.к. прямоугольн.)

$$BC = AC \cdot \operatorname{tg}(\angle BAC)$$

$$S_{ABC} = \frac{AC^2}{2} \operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

②  $\triangle ABC$  подобен  $\triangle ACW$  по 2м л. ( $\angle ACW = \angle ACB$ )  
 $\angle BAC = \text{остр.}$

Из подобия:

$$\frac{AW}{AB} = \frac{AC}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{AC}{\sqrt{7}}$$

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$AW = \frac{1}{3} AC = \frac{\sqrt{7}}{3};$$

~~$$AB = \sqrt{1+1}$$~~

$$BC = AC \cdot \operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{\sqrt{7} \cdot 2}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} \text{ (т.к. гипот.)}$$

$$AB = \sqrt{7 + \frac{28}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

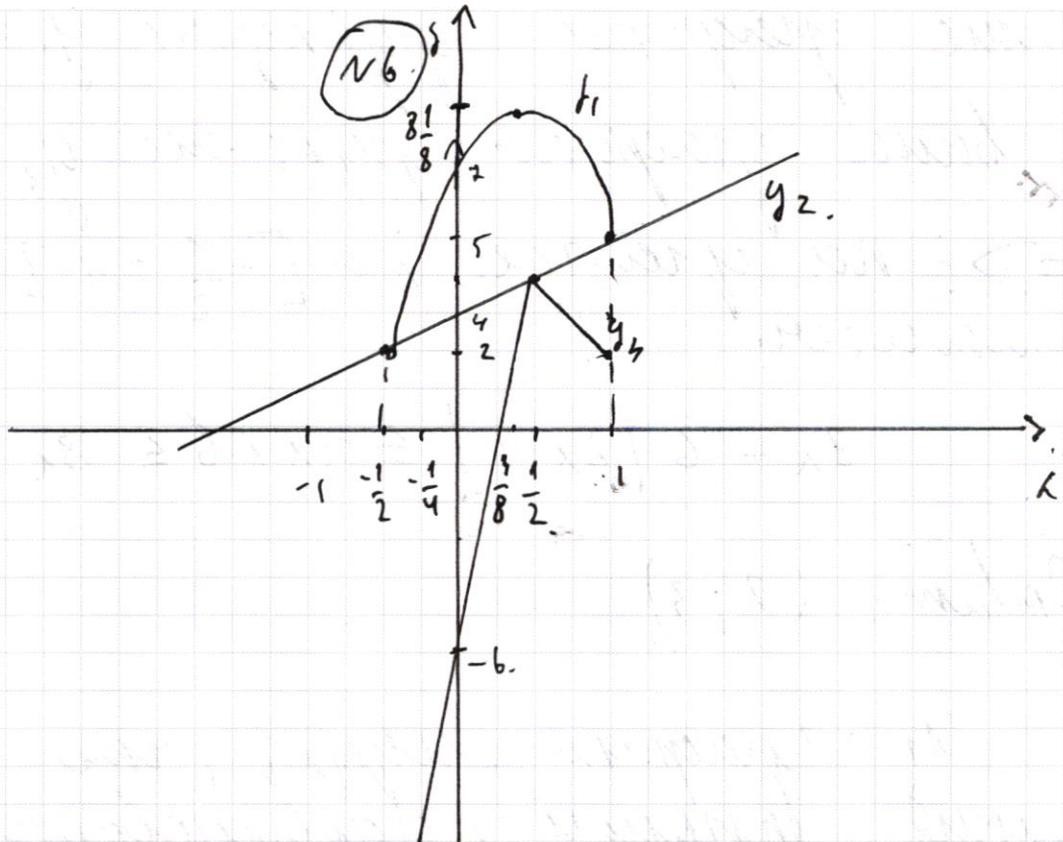
③  $\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = \frac{AC}{AB} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 7} = \frac{1}{7} \Rightarrow S_{ACW} = \frac{1}{7} S_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

④  $S_{CW} = S_{ACW} - S_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \cdot 2} = ?$

$$2 \cdot \sqrt{7} \cdot \operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{9}$$

Ответ:  $\operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{2}{\sqrt{3}}; S_{CW} = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{9}$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



①  $y_1 = -8x^2 + 6x + 7$

$x_0 = \frac{3}{8} \quad y_0 = 8\frac{1}{8}$

$y(1) = 5 \quad y(-\frac{1}{2}) = 2$

②  $y_3 = 8x - 6(2x - 1)$

$y = \begin{cases} -4x + 6, & x \in [-\frac{1}{2}; 1] \\ 20x - 6, & x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \end{cases}$

③  $y_1 \geq y_2 \geq y_3$

$y_2 \Rightarrow \begin{cases} (\frac{1}{2}; 5) \in \Gamma_{y_2} \\ (-\frac{1}{2}; 2) \in \Gamma_{y_2} \\ (1; 5) \in \Gamma_{y_2} \\ y_2 = ax + b \end{cases}$

$\begin{cases} a \cdot \frac{1}{2} + b = 5 \\ -\frac{1}{2}a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$

при  $a=2$  график функции  $y_2 = ax + b$   
 $b=3$  на промежутке  $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$  лежит

ниже графика функции  $y_1 = -8x^2 + 6x + 7$   
и выше графика функции  $y_3 = 8x - 6|2x-1|$   
 $\Rightarrow$  на промежутке  $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$  выполнено:

$$8x - 6|2x-1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

Ответ:  $(2; 3)$

Из графика видно, что положение прямой, удовлетворяющей равенству, единственное и прямая ( $\Rightarrow a$  и  $b$ ) нел.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 ~~$a - a$~~  $b \quad by \quad by^2 \quad \textcircled{by^3} \quad \dots ?$ 

$$b x^2 - 2byx + by^2 = 0.$$

$$b(x^2 - 2yx + y^2) = 0$$

~~$$D = 4y^2 -$$~~

$$b(x - y)^2 = 0 \Rightarrow \textcircled{x = y}$$

$$\textcircled{by^3 = y}$$

 $K_1,$ 

$$\textcircled{by^2 = 1}$$

Ответ: 1

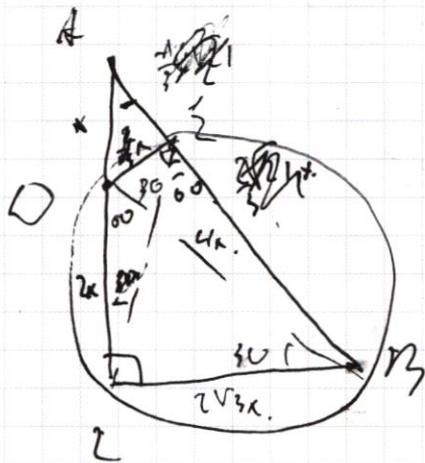
№2.

N3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy} - 6y - x + 6 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$x \geq 6y$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 - xy - 6y - x + 6$$



$$\frac{AW}{AB} = \frac{AZ}{AC} = \frac{WZ}{CB}$$

$$\frac{AZ}{AC} = \frac{WZ}{CB}$$

$$\frac{CB}{AC} = \frac{WZ}{AZ}$$

$$WZ = \frac{2\sqrt{3}x}{3} \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

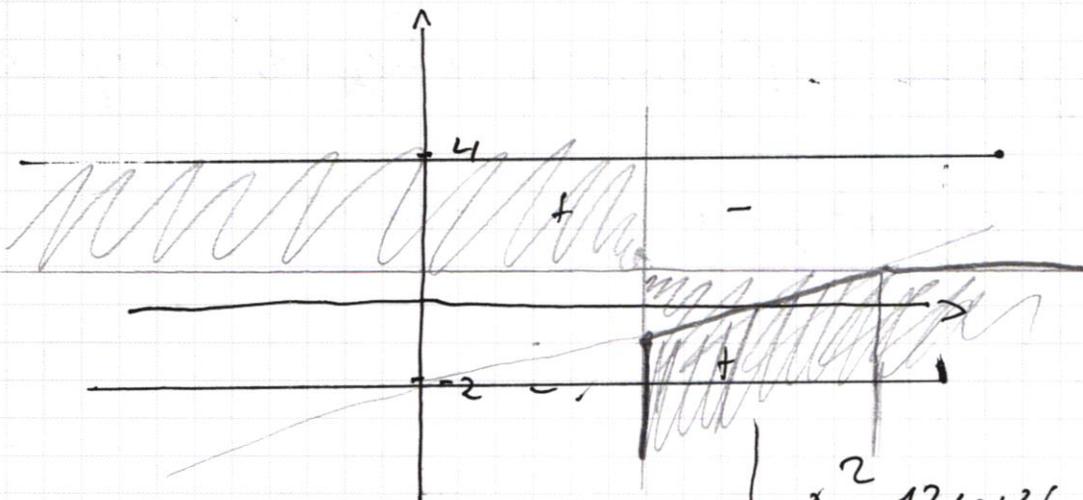
$$S_{\triangle AWZ} = \frac{AZ \cdot WZ}{2} = \frac{2\sqrt{3}x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3}x \cdot 2$$

$$\sqrt{21} \cdot r_n = \frac{\sqrt{4}}{3 \sqrt{21}} = \frac{2}{3\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{4} \cdot 3}{3 \cdot \sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}}$$

$$\sqrt{21}x = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{4}}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$AZ = \frac{\sqrt{21} \cdot 2}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad CB = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$$

$$x^2 - 12x + 36 - y^2 = x - 6y - x + 6$$

$$(x^2 - x - 6) = (x-3)(x+2)$$

$$y^2 + 8y + 16$$

$$y^2 + 4y + 4$$

$$(y-4)^2 + (y+2)^2$$

$$(x^2 - 12x + 36) \quad (x-6)^2$$

$$(y-4)^2 + (y+2)^2 = x(12-x) \quad x \in (0; 12]$$

$$(x^2 - 12x + 36)$$

$$6y \leq x$$

$$y \leq 2$$

$$(y+2)^2 + (y-4)^2 + (x-6)^2 = 36$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 - xy + 6y + x - 6 = 0$$

$$6y(6y+1) - 12y(6y-x)$$

~~$$x^2 - 12xy + 36y^2 - xy + 6y + x - 6 - x^2 - 2y^2 + 12x + 4y - 20 = 0$$~~

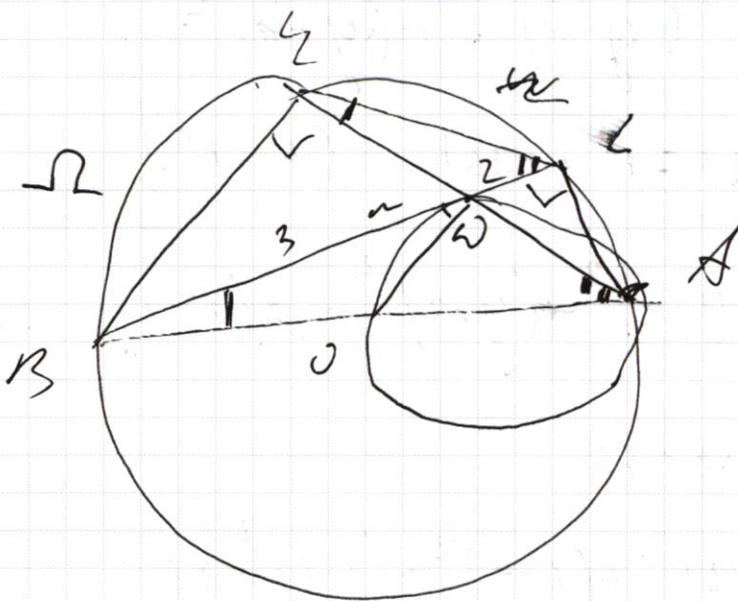
~~$$-13xy + 30y^2 + 13x - 26 = 0$$~~

~~$$13x(1-y)$$~~

~~$$x^2 - 12xy + 36y^2 - xy + 6y + x - 6 - x^2 - 2y^2 + 12x + 4y - 20 = 0 \Rightarrow$$~~

~~$$34y^2 - 13xy + 10y + 13x - 26 = 0$$~~

$$3x^2 - 34y^2 + 12xy - xy + 6y + x - 6 - 12x - y + 20 = 0$$



$$\frac{2}{10} = \frac{40}{3}$$

$$10 \cdot 40 = 6$$

$$\frac{AO}{AB} = \frac{40}{30}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{3} = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\frac{\sqrt{x^2+4}}{3} = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\sqrt{x^2+4} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\sqrt{x^2+4} = \frac{6}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\sqrt{x^2+4} = \frac{2}{\frac{x^2+4}{3}}$$

$$\sqrt{x^2+4} \cdot \sqrt{x^2+4} = 18.$$

$$\sqrt{a} \cdot a = 18.$$

$$\sqrt{a^3} = 18.$$

$$a = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} =$$

$$\sqrt{a+x^2} = ?$$

~~x=6y~~

$$(x^2 - 12x) + (y-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 - xy + 6y + x - 6 = 0$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = 12x + x - 12xy + 4y - 20 + 34y^2$$

$$x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$$

$$x - 6 = a$$

$$y - 1 = b$$

$$2(y-1)^2 + x^2 - 12x + 18 = 0$$

$$2(y-1)^2 + (x-6)^2 = 18$$

$$x - 6 - 6y + 6 = (x-6) - 6(y-1)$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} & ab = a^2 - 12ab + 36b^2 = 18 \\ 2a^2 - 2b^2 + a^2 = 18 \end{cases}$$

$$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$$

$$a^2 - ab \quad D = 169b^2 - 36 \cdot ab^2 = 49b^2 - 36b^2$$

$$a = \frac{13b \pm 5b}{2}$$

$$b > 0$$

$$a = 9b$$

$$b < 0$$

$$a = 4b$$

$$b = 0$$

$$2b^2 + 81b^2 = 18$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$b = -1 \quad a = -4$$

$$y = 0$$

$$x = 2$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + b = 900 \\ b < 3a \\ 2a < b + a \\ a < 2a + b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 900 - 2a \\ b < 3a \\ a < b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 900 - 2a < 3a \\ 900 < b + a \\ a > 150 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 900 - 2a > a \\ 4a < 900 \\ a < 225 \end{array} \right.$$

ответ: 79

2 7

2 3 4 5 6 7

$$(7 - 2 + 1 - 2 = 4)$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = x - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2$$

$$(x - 6y)^2 + y(6 - x) - (6 - x) = 0$$

$$\frac{(6 - x)(y - 1) = (x - 6y)^2}{(y - 1)^2} \quad (6 - x) = \frac{(x - 6y)^2}{(y - 1)^2}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \quad 6 - x$$

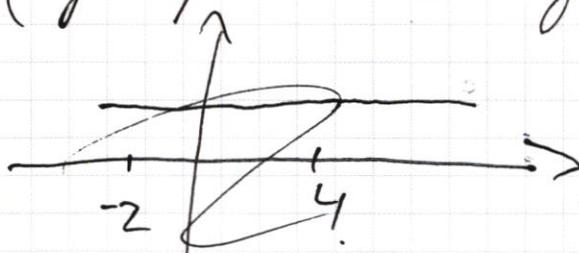
$$(x^2 - 12x + 36) + 2y^2 - 4y - 16 = 0$$

$$(x - 6)^2 + 2(y^2 - 2y - 8) = 0$$

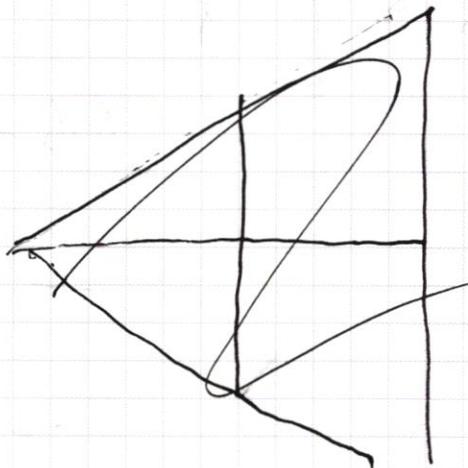
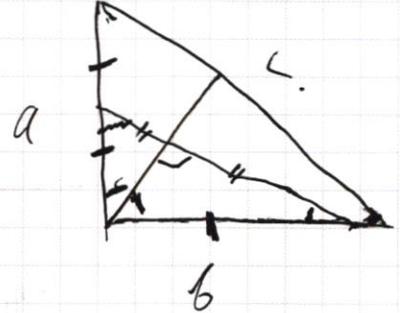
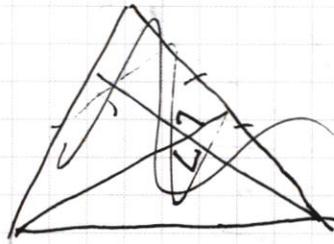
$$(x - 6)^2 + 2(y - 4)(y + 2) = 0$$

$$-2(y - 4)(y + 2) \geq 0$$

$$(y - 4)(y + 2) \leq 0 \Rightarrow y \in [-2; 4]$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} c \leq a + b \\ a \leq c + b \\ b \leq a + c \\ a + b + c = 900. \end{cases}$$

$$a \leq 300 \quad b \leq 300 \quad c \leq 300.$$

$$1 \leq a \leq 450 \quad b \leq 450 \quad c \leq 450.$$

$2a$

$449$

$a \quad 2a \quad b.$

$$\begin{cases} 2a \leq a + b \\ b \leq 3a \\ a \leq 2a + b \end{cases}$$

$$2a + b = 900.$$

$$a \leq b \leq 3a.$$

$$2a + b = 900.$$

$$a \leq 900 - 2a \leq 3a.$$

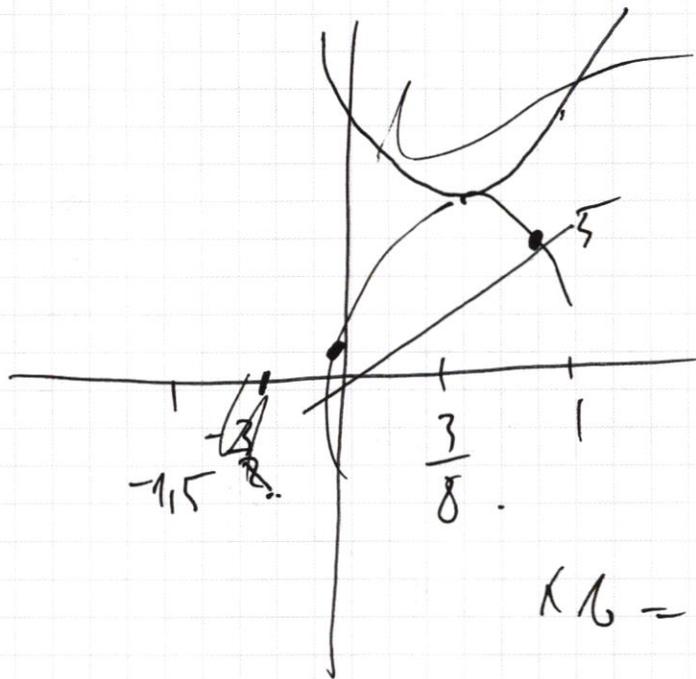
$$3a > 400$$

$$b \leq 900 - a \leq 2a.$$

$$a > 300.$$

$$300 < b < 900.$$

$$8x - 6|2x-1| \leq a \quad x+6 \leq -8x^2 + 6x + 7$$



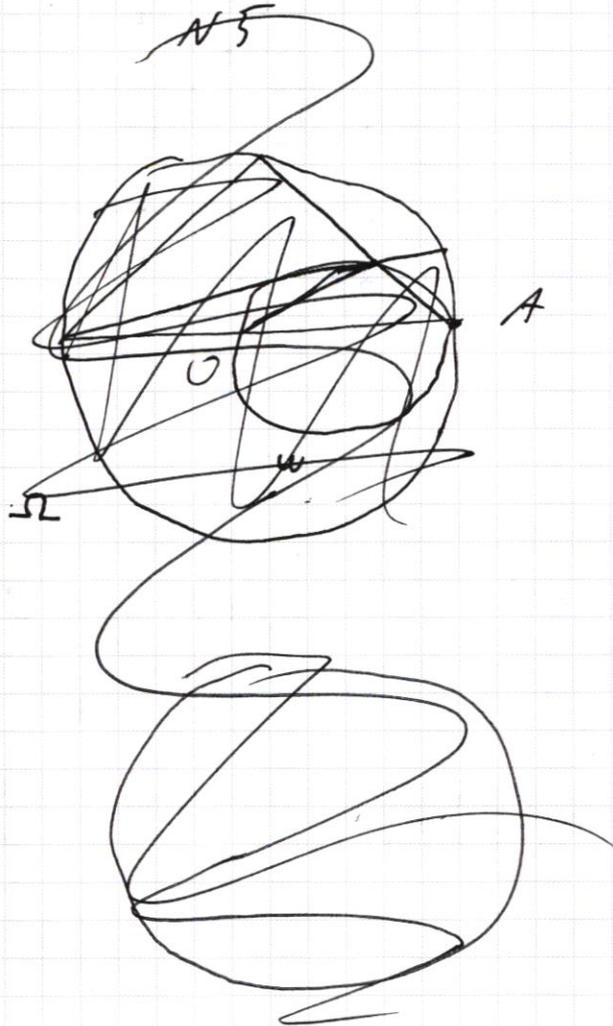
$$x_1 = \frac{-2.9}{648} + \frac{18}{8} < 7$$

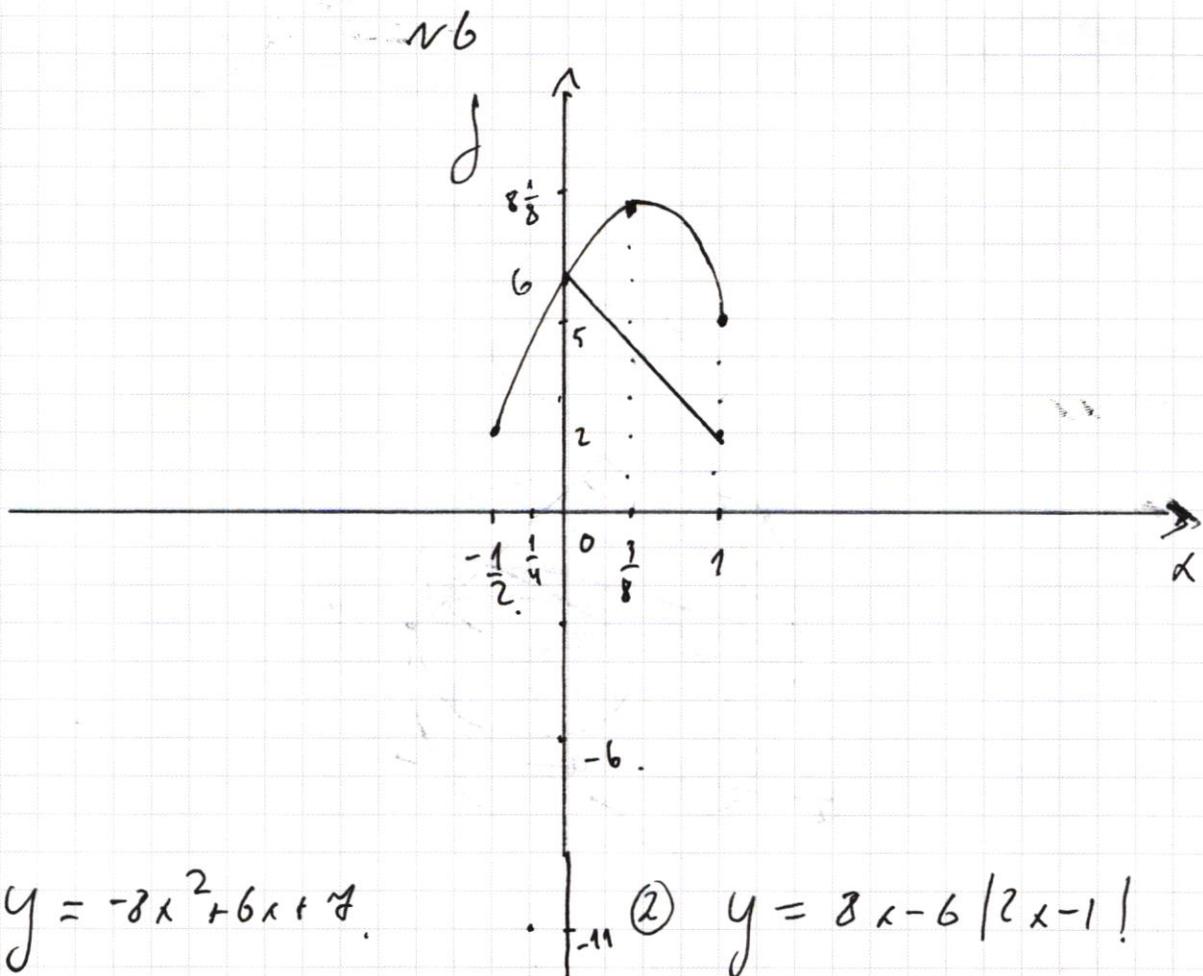
$$\rightarrow -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = 7 \frac{1}{8}$$

$$-2 - 3 + 7$$

ШИФР (заполняется секретарём)
----------------------------------

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\textcircled{1} y = -8x^2 + 6x + 7.$$

$$x_0 = \frac{3}{8}, \quad y_0 = 8\frac{1}{8}.$$

$$y(1) = 5 \quad y(-\frac{1}{2}) = 2.$$

$$\textcircled{2} y = 8x - 6 |2x - 1|$$

$$y = \begin{cases} -4x + 6, & x \in [0; 1] \\ 20x - 6, & x \in [-\frac{1}{2}; 0] \end{cases}$$