

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$I(b_n)$ - геом. прогр., q -значим. (b_n)

$$\begin{aligned} b_1 &= a \neq 0 \\ b_2 &= b = a \cdot q \\ b_3 &= c = a \cdot q^2 \end{aligned}$$

$$b_4 = x_1, \text{ где } x_1 \text{ - корень } ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$ax^2 - 2bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0 \Leftrightarrow a(x-q)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 & (2) \\ x = q & (1) \end{cases}$$

$$b_4 = c \cdot q = q \Rightarrow c = 1$$

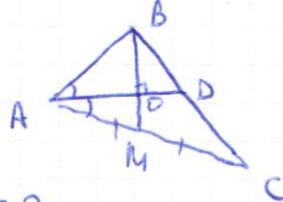
Ответ: 1.

№2.

$P_0 = 900$, ст. Δ - чётные числа, бис. \perp меди.

ΔABC - тупоуг. Δ .

BM - медиана ΔABC ,
 AD - бисс.



$BM \perp AD$, $BM \cap AD = O$

Тогда $\Delta ABO = \Delta AMO$ (по катету и ост. углу) $\Rightarrow AB = AM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow$

$$\Delta AB = a \Rightarrow AC = 2a, BC = x.$$

\Rightarrow для всех таких Δ длина стороны b два раза больше стороны a .

По неравенству Δ имеем: $\begin{cases} 3a > x \\ x + a > 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < 3a \end{cases} (*)$

$$P_0 = 900 = 3a + x$$

$$\text{Существование } (*): \begin{cases} 3a + x < 6a \\ 3a + x > 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 900 < 6a \\ 900 > 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 150 \\ a < 225 \end{cases}$$

Зная a , находим значение ст. Δ ($x = 900 - 3a$) $\Rightarrow \Delta$ задается однозначно \Rightarrow

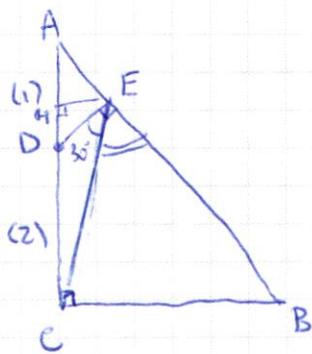
\Rightarrow кол-во таких Δ = кол-ву возм. кр. a

$$a \in [151; 224] \Rightarrow \text{кол-во } \Delta \quad 224 - 151 + 1 = 74$$

Ответ: 74.

Дано:
 $\triangle ABC - \text{н.т.д}$
 $\angle C = 90^\circ$
 $D \in [AC]$
 $AD : AC = 1 : 3$
 $E \in [AB]$
 $DE \perp AB$
 $\angle CED = 30^\circ$
 б). $AC = \sqrt{7}$

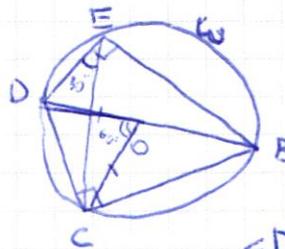
а). $\text{tg} \angle BAC = ?$
 б). $S_{\triangle CED}$



Уч.

$$AD : AC = 1 : 3 \rightarrow AD : DC = 1 : 2.$$

а). DEBC - впис. четырех. (по приз.)



$\omega(O; R)$
 ω - опис. около DEBC пер.

DB - диаметр $\Rightarrow DB = 2R$
 (т.к. $\angle DEB = 90^\circ$)

$$\angle DOC = 2\angle DEC = 60^\circ$$

$DO = OC = R \Rightarrow \triangle DOC - \text{пл.} \triangle \Rightarrow DC = DO = OC = R$
 (как центр, соотв. впис. $\angle DEC$)

По теор. Пифагора: $CB = \sqrt{DB^2 - DC^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$

$$DC = \frac{2}{3} AC = R \Rightarrow AC = \frac{3R}{2}$$

$$\text{tg} \angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{R\sqrt{3}}{\frac{3R}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

б).] Н-теорема $\triangle DEC$

$HE \parallel CB$ (т.к. $ED \perp AC, HE \perp AC$) $\Rightarrow \angle HEA = \angle CBA$

$$\triangle AED \sim \triangle ACB \text{ (по глугу)} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AE = \frac{AC \cdot AD}{AB}$$

$$AD = \frac{1}{3} AC = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{tg} \angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CB = \frac{2\sqrt{3}}{3} AC = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{7 + \frac{4 \cdot 21}{9}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 21}{9}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$\triangle AHE \sim \triangle ACB \text{ (по глугу)} \Rightarrow \frac{HE}{CB} = \frac{AE}{AB}$$

$$HE = \frac{AE}{AB} \cdot CB = \frac{\frac{\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{21}}{3}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3}{7\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} HE \cdot DC$$

$$DC = \frac{2}{3} AC = \frac{2\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

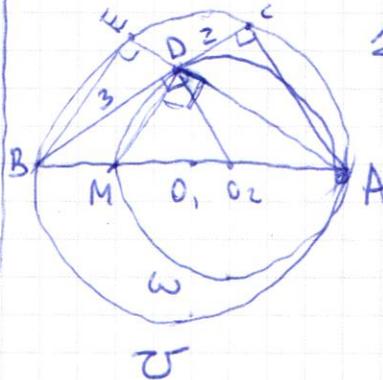
Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано:
 $(O_1; R)$
 $\omega (O_2; r)$
 Ω кас. ω в A
 фронт. сгр.
 $R > \omega$
 AB - диаметр Ω
 $CE \perp \Omega$, BC кас. ω в D
 $AD \cap \Omega = \{A, E\}$
 $CD = 2$
 $BD = 3$

R, r, S_{SPACE}



1. $O_2 \in [AB]$ (по с.б.у.)

$\angle ACB = 90^\circ$ (как впис., опир. на диам.)
 $\angle O_2DB = 90^\circ$ (т.к. BC - кас. к ω , O_2D - рад.)

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по двум угл.)

$$\frac{O_2D}{CA} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{AD+DC} = \frac{3}{5}$$

$$r = O_2D = \frac{3}{5} CA$$

$$2R = BA = \sqrt{BC^2 + CA^2} = \sqrt{25 + CA^2}$$

$$\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$BO_2 = BA - O_2A = 2R - r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5}$$

$$1 - \frac{r}{2R} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3CA}{5\sqrt{25+CA^2}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\sqrt{CA^2+25} = 3CA \Leftrightarrow 4CA^2+100 = 9CA^2$$

$$5CA^2 = 100 \Rightarrow CA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$R = \frac{\sqrt{25+20}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$r = \frac{3}{5} CA = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$AB \cap \omega = M$

2. $\angle BEA = 90^\circ$ (как впис., опир. на диам.), $\angle MDA = 90^\circ$ (\perp) $\Rightarrow BE \parallel MD$

По теор. о пропорц. отрезках $\frac{ED}{DA} = \frac{BM}{MA} \Leftrightarrow \frac{ED}{DA} = \frac{BM}{MA} \Leftrightarrow \frac{2R-2r}{2r} = \frac{R}{r} - 1$

$$\frac{ED}{DA} = \frac{R}{r} - 1 = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{\frac{6\sqrt{5}}{5}} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R-2r}{2r} = \frac{R}{r} - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{ED}{DA} = \frac{1}{4} \\ ED \cdot DA = 6 \end{array} \right\}$$

$$ED \cdot DA = BD \cdot DC = 6 \text{ (по с.б.у. хорд одной окр.)}$$

$$\begin{cases} ED = \frac{1}{4} DA \\ \frac{1}{4} DA^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} DA = 2\sqrt{6} \\ ED = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$EA = DA + DE = 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

$$BE^2 = AB^2 - EA^2 = 4 \cdot \frac{45}{4} - \frac{156}{4} = \frac{24}{4} = 6 \Rightarrow BE = \sqrt{6}$$

$$\text{In } \triangle BED) \quad \sin \angle EDB = \frac{BE}{BD} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{BACE} = \frac{1}{2} EA \cdot BC \cdot \sin \angle EDB = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{25 \cdot 6}{12} = \frac{25}{2} = 12,5$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{5}}{2}; \frac{6\sqrt{5}}{5}; 12,5$$

↑
площадь
ω
↑
площадь
ω
↑
площадь BACE

√3.

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \quad (1) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$$(1) \quad x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 + x(1-13y) + 36y^2 + 6y - 6 = 0$$

$$D = 1 + 169y^2 - 26y - 144y^2 - 24y + 24 = 25y^2 - 50y + 25 = 25(y-1)^2 \geq 0 \text{ при } y=1$$

$$\begin{cases} x = \frac{13y-1-25y+25}{2} \\ x = \frac{13y-1+25y-25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-12y+24}{2} \\ x = \frac{38y-26}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6y+12 \quad (*) \\ x = 19y-13 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} x = -6y+12 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-6y+6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$36(y-1)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$38(y-1)^2 = 18$$

$$(y-1)^2 = \frac{18}{38} = \frac{9}{19} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{19}}{19} + 1 \\ y = -\frac{3\sqrt{19}}{19} + 1 \end{cases}$$

$$(**) \quad \begin{cases} x = 19y-13 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (19y-19)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$15^2(y-1)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

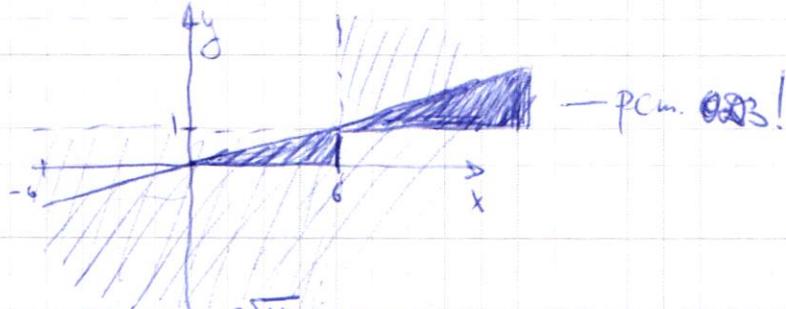
$$(y-1)^2 = \frac{18}{370} = \frac{9}{185} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{185}}{185} + 1 \\ y = -\frac{3\sqrt{185}}{185} + 1 \end{cases}$$

обз:
 $\begin{cases} x > 6y \\ (x-6)(y-1) \geq 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

003:

$$\begin{cases} x > 6y \\ (x-6)(y-1) \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = \frac{3\sqrt{19}}{19} + 1 \\ y = -\frac{3\sqrt{19}}{19} + 1 \\ x = -6y + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3\sqrt{185}}{185} + 1 \\ y = -\frac{3\sqrt{185}}{185} + 1 \\ x = 19y - 13 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

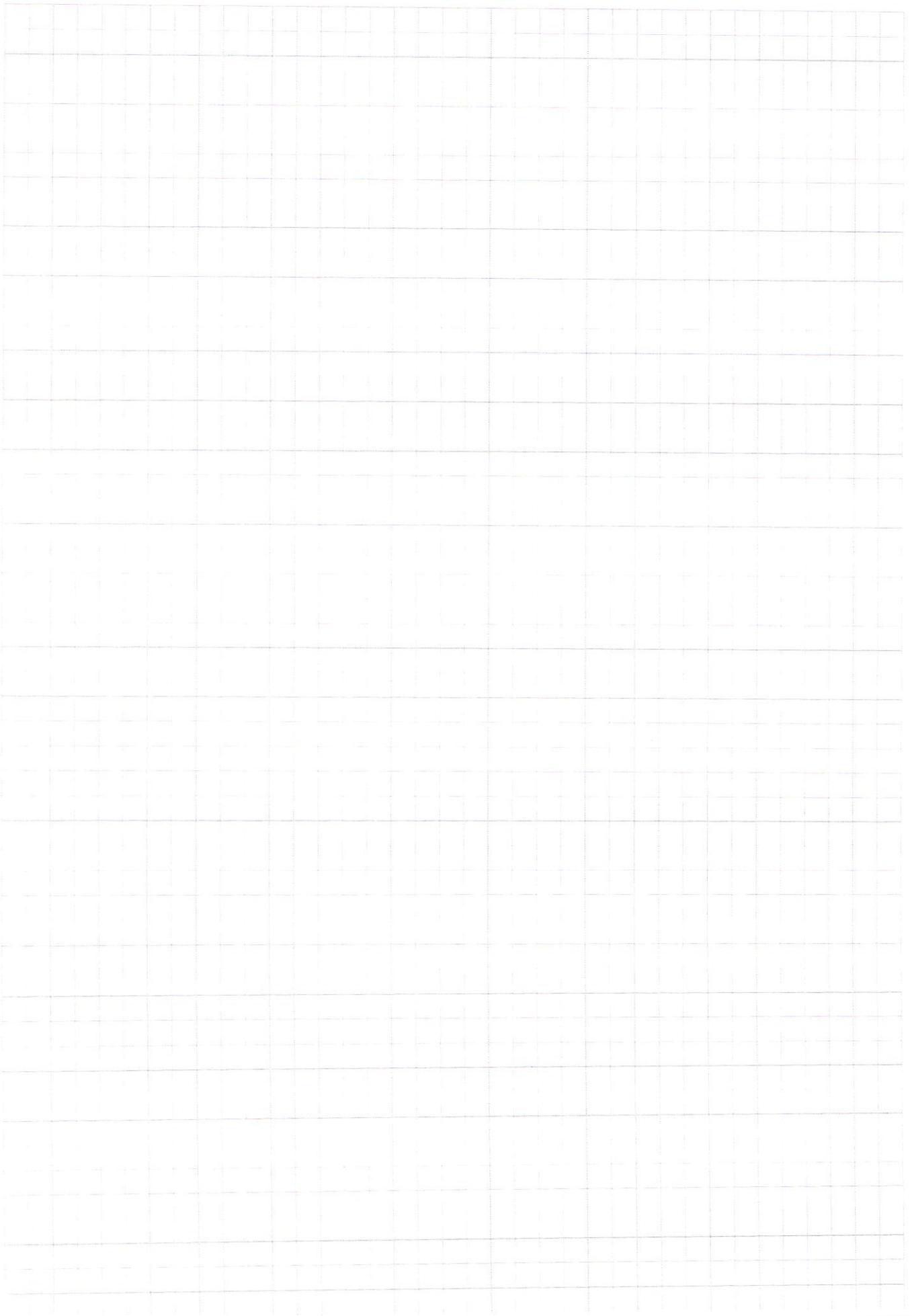
$$\begin{cases} y = \frac{3\sqrt{19}}{19} + 1 > 1 \\ x = -\frac{12\sqrt{19}}{19} + 6 < 6 \end{cases} \quad \text{— не подходит.}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3\sqrt{19}}{19} + 1 < 1 \\ x = 6 + \frac{12\sqrt{19}}{19} > 6 \end{cases} \quad \text{— не подходит.}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3\sqrt{185}}{185} + 1 \\ x = \frac{57\sqrt{185}}{185} + 6 > 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3\sqrt{185}}{185} + 1 \\ x = -\frac{57\sqrt{185}}{185} + 6 < 6y \end{cases} \quad \text{— не подходит.}$$

Ответ: $\left(-\frac{12\sqrt{19}}{19} + 6; -\frac{3\sqrt{19}}{19} + 1 \right)$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④ a, b, c
 $b_1 = a$
 $b_2 = b = a \cdot q$
 $b_3 = c = a \cdot q^2$
 $b_4 = x_0$ $ax^2 - 2bx + c = 0$

$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$

$$a(x-q)^2 = 0$$

$$a(x^2 - 2qx + q^2) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ x=q \end{cases}$$

$b_4 = q = c \cdot q$ $c=1$

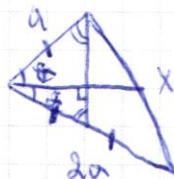
$x \in [1, 3]$
 $b_{max} = (224 - 151) + 1 = 74$
 $a \in [151, 224]$

$x > a$
 $3a > x$

$150 < a$

$225 > a > 150$
 $x < 450$ $x > a$ $\frac{224}{151}$
 $x = 900 - 3a > a$

⑤ Δ чеш. см. $P = 900$



$P = 3a + x < 6a$

$P = 3a + x > 2x \Rightarrow x < 450$

~~Handwritten scribbles~~

$P = 3a + x < 6a = 900 \Rightarrow 900 - 3a < 6a$
 $900 < 9a \Rightarrow a > 100$
 $900 - 3a > 2a \Rightarrow 900 > 5a \Rightarrow a < 180$
 $900 - 3a > a \Rightarrow 900 > 4a \Rightarrow a < 225$

$P = 900 = 3a + x > 6a$

$3a + x < 2x$
 $900 < 2x$

$2a + x > a$
 $x > -a$
 $a + x > 2a$
 $x > a$

$3a > x$

$900 > 6a$
 $a < 150$

$x > a$
 $x < 3a$

$x \in (a, 3a)$

$P = 3a + x$

$a < 150$
 $x > 450$

$x = \frac{900 - 3a}{2}$

$a \in [150, 180]$

~~Handwritten scribbles~~

~~Handwritten scribbles~~

~~Handwritten scribbles~~

$\frac{900}{2} = 450$
 $\frac{900}{2} = 450$
 $\frac{900}{2} = 450$

3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) - 48 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

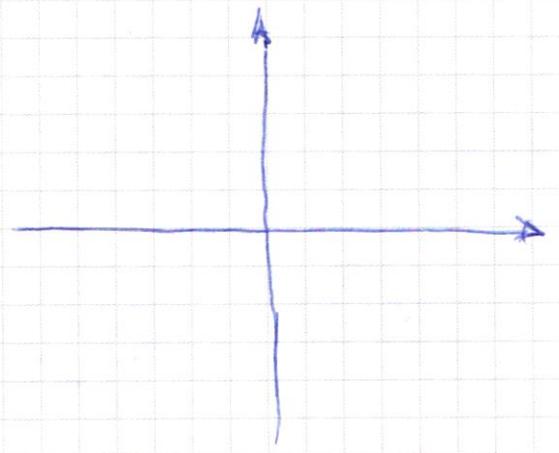
ОДЗ:
 $x > 6y$
 $xy - 6y - x + 6 \geq 0$

$$y(x-6) = (x-6)$$

$$(y-1)(x-6) \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$x^2 - 13xy + x + (36y^2 + 12y + 36) - 6y - 42 = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

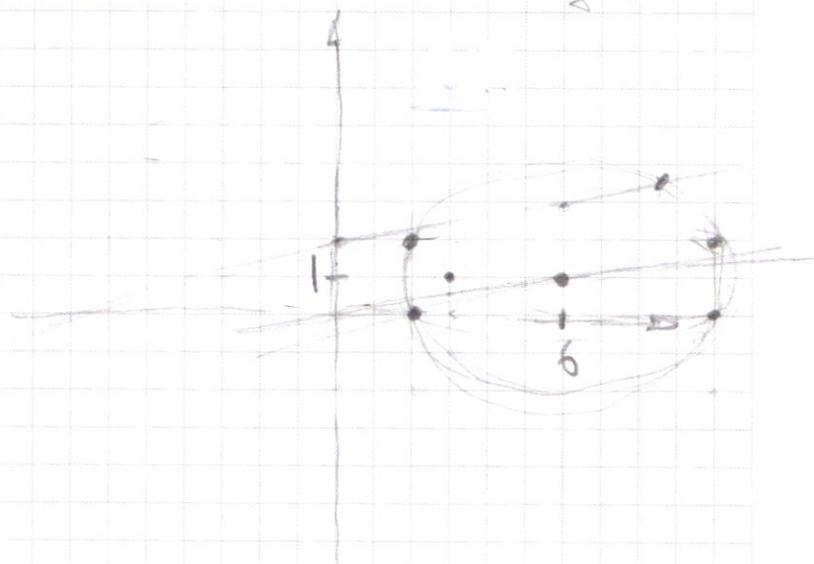
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= 2 \\ (x-6)^2 &= 18 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2-12xy+36y^2 = xy-6y-x+6$$

$$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$$

$$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$$



$$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$$

$$x^2+x(1-13y)+36y^2+6y-6=0$$

$$D = 1+169y^2-26y-144y^2-24y+24=$$

$$= 25y^2-50y+25 = 25(y-1)^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{13y-1-25y+25}{2} \\ x = \frac{13y-1+25y-25}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{-12y+24}{2} \\ x = \frac{38y-26}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -6y+12 \\ x = 19y-13 \end{cases}$$

$$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$$

$$x^2-12x+2y^2-4y+20=0$$

$$D = 144-8y^2+16y-80 = -8y^2+16y+64 =$$

$$6y = x+12$$

$$y = \frac{x}{6} + 2$$

$$y = \frac{x+12}{6}$$

$$(-6y+6)^2+2(y-1)^2=18$$

$$-36(y-1)^2+2(y-1)^2=18$$

$$\frac{57 \sqrt{185}}{185} + 13 - 13 =$$

$$\frac{18 \sqrt{13}}{19} - 6 + 12$$

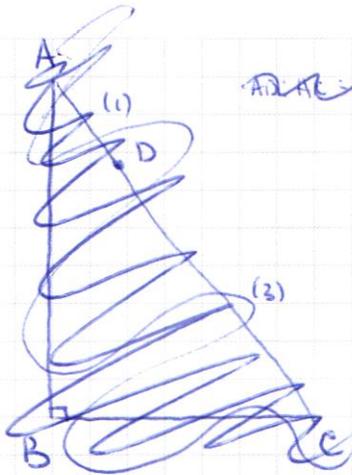
$$\begin{array}{r} 2 \\ \sqrt{19} \\ \sqrt{19} \\ \hline 178 \\ + 19 \\ \hline 368 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 185 \overline{) 1537} \\ \underline{15} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

37.5

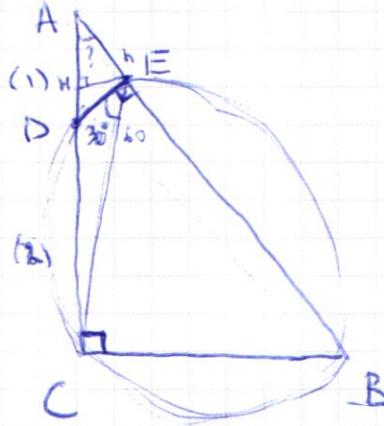
370

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



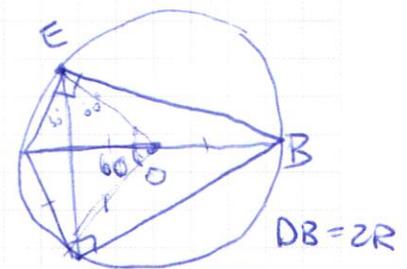
$AD:AC = 1:3$

(4)



~~AD:AC = 1:3~~

~~$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$~~



~~$DB = 2R$~~
 ~~$EC = R$~~

1. $AC = \sqrt{7}$. $S_{CED} = ?$

~~$EB \cdot CD + DE \cdot CB = DB \cdot CE$~~

~~$AD = \frac{1}{4} AC = \frac{\sqrt{7}}{4}$~~

$CD = \frac{3}{4} AC = R$

$DC = R$

~~$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$~~

$AC = \frac{4}{3} R$ $CB^2 = DB^2 - DC^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

$\tan \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$
 $CB = \frac{3\sqrt{3}}{4} AC = \frac{3\sqrt{21}}{4}$

$\tan \alpha = \frac{CB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{AE \cdot 4}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\frac{HE}{CB} = \frac{AE}{AB}$

~~$\cos \alpha = \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$~~

$AE = \frac{AD \cdot AE}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \sqrt{7}}{\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{43}}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$

$AB = \sqrt{\frac{9 \cdot 21}{16} + 7} = \sqrt{\frac{9 \cdot 21 + 7 \cdot 16}{16}} = \sqrt{\frac{7(27 + 16)}{16}} = \frac{\sqrt{7 \cdot 43}}{4}$

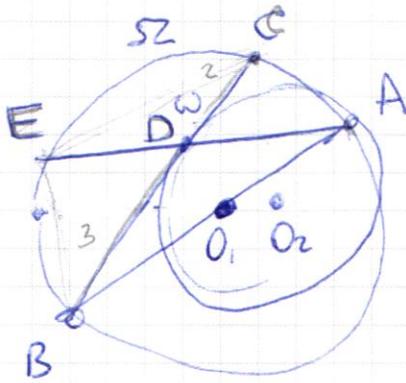
$HE = \frac{AE \cdot CB}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{4}}{\frac{\sqrt{7 \cdot 43}}{4}} = \frac{\frac{3\sqrt{21}}{\sqrt{43}}}{\sqrt{43}} = \frac{3\sqrt{21}}{43}$

$S = \frac{1}{2} HE \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{43} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{7} = \frac{9 \cdot 7 \sqrt{3}}{2 \cdot 43 \cdot 4} = \frac{63 \sqrt{3}}{344}$

$\frac{43}{4} \cdot 8 = 344$

$7(9+12) = 7 \cdot 21$
 $\sqrt{7 \cdot 9 + 4 \cdot 21}$

5) $r, R - ?$
 SSPACE - ?
 $CD = 2$ $BD = 3$



$$ED = \frac{5}{4} DA$$

$$ED = \frac{5}{4} DA = \frac{5}{4} \cdot \frac{2\sqrt{30}}{5} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

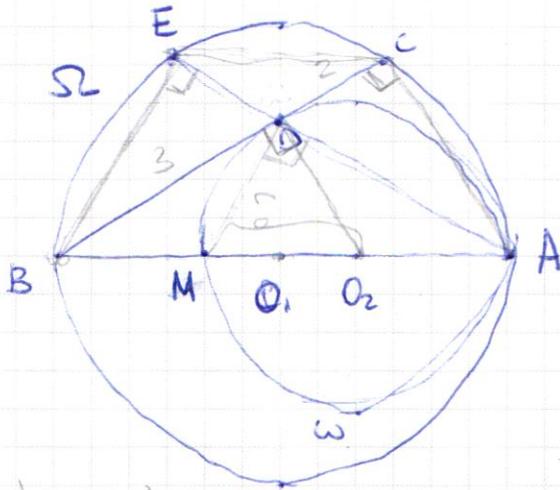
$$\frac{5}{4} DA^2 = 6 \quad DA^2 = \frac{6 \cdot 4}{5} = \frac{24}{5}$$

$$DA = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$$

$$\frac{ED}{DA} = \frac{BM}{MA} = \frac{2R - 2r}{2r} = \frac{R}{r} - 1$$

$$\frac{ED}{DA} = \frac{R}{r} - 1 = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\frac{6\sqrt{5}}{5}} - 1 = \frac{\frac{2}{2}}{\frac{6}{5}} - 1 = \frac{2}{6} - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{ED}{DA} = \frac{5}{4} \quad ED \cdot DA = 6$$



$$\frac{O_2D}{CA} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$O_2D = \frac{3}{5} CA$$

$$r = \frac{3}{5} CA$$

$$R = \frac{\sqrt{CA^2 + 25}}{2}$$

$$4(CA^2 + 25) = 9CA^2$$

$$4CA^2 + 100 = 9CA^2$$

$$5CA^2 = 100$$

$$CA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$R = \frac{\sqrt{20+25}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$r = \frac{3}{5} CA = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{BO_2}{BA} = \frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{5}$$

$$1 - \frac{r}{2R} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{r}{2R} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\frac{3}{5} CA}{\sqrt{CA^2 + 25}} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3CA}{\sqrt{CA^2 + 25}} = 2$$

$$2\sqrt{CA^2 + 25} = 3CA$$