МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$b = a \cdot k \qquad a = \frac{b}{k}$

$b = \frac{c}{k} \qquad c = bk$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4b^2 - 4 \cdot \frac{b}{k} \cdot bk = 4b^2 - 4b^2 = 0$

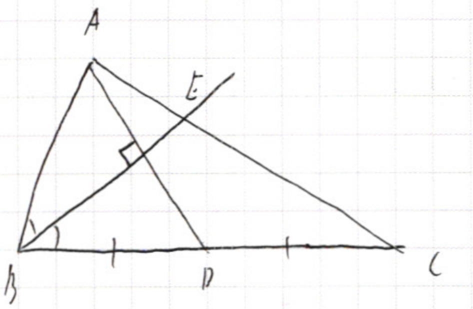
$x = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

$k = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{x}{c} = -\frac{b}{ac}$

$\frac{b}{a} = -\frac{b}{ac} \qquad 1 = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -1$

Ответ: $c = -1$

№ 2



Т.к. BE - бисс. и медиана $\triangle ABD$, то $\triangle ABD$ - р/б,

$AB = BD = x$

По неравенству треугольника ABC

1) $AB + BC > AC$

$3x > 1200 - 3x$

$6x > 1200$

$x > 200$

2) $AB + AC > BC$

$x + 1200 - 3x > 2x$

$1200 > 4x$

$x < 300$

3) $BC + AC > AB$ - соблюдается всегда, т.к. $BC = 2AB$

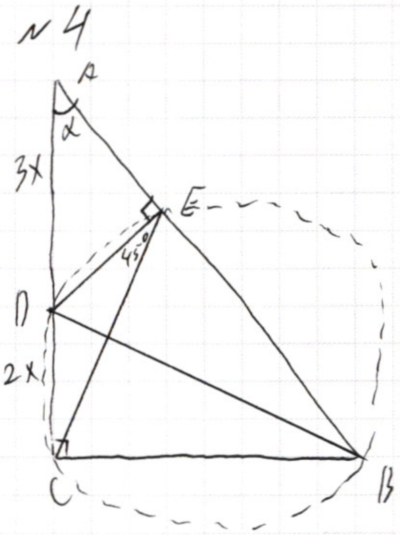
$200 < x < 300$

x - целое

Подходят числа с 201 по 299. Их 99 штук

Ответ: 99

№4



Дано

$\triangle ABC$ - прямоуг, $\angle C = 90°$

$DE \perp AB$

$\angle DEC = 45°$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$AC = \sqrt{29}$

Найти

$tg \angle CAB$

S_{DEC}

Решение

Пусть $\angle CAB = \alpha$

$\angle DEB = 180° - \angle AED = 90°$

$\angle DCB + \angle DEB = \angle CDE + \angle CBE = \frac{360°}{2} = 180° \Rightarrow CDEB$ - впис. четырёхугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDB = \angle CEB$, $\angle DEC = \angle DBC$

$\angle DEC = 45° \Rightarrow \angle DBC = 45°$

$\angle CEB = 90° - \angle DEC = 45° \Rightarrow \angle CDB = 45°$

$\angle CDB = \angle DBC = 45° \Rightarrow \triangle DBC$ - р/б, $DC = BC$

Пусть $AD = 3x$, тогда $AC = 5x$, $DC = AC - AD = 2x \Rightarrow BC = 2x$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}}$$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по 2 углам, $k = \frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{25x^2+4x^2}}{3x} = \frac{x\sqrt{29}}{3x} = \frac{\sqrt{29}}{3}$

$AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$DE = \frac{BC}{k} = \frac{2x \cdot 3}{\sqrt{29}} = \frac{6 \cdot \sqrt{29}}{5 \cdot \sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

$AE = \frac{AC}{k} = \frac{\sqrt{29} \cdot 3}{\sqrt{29}} = 3$

$AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2\cos 135° \cdot AE \cdot EC$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$29 = 9 + EC^2 + \frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot 3\cdot EC$$

$$EC^2 + 3\sqrt{2}\,EC - 20 = 0$$

$$D = 18 + 80 = 98 \qquad \sqrt{D} = 7\sqrt{2}$$

$$EC = \frac{-3\sqrt{2} + 7\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{S_{DEC} = DE\cdot EC\cdot\frac{1}{2}\sin 45^\circ = \frac{6\cdot\cancel{2}\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 5} = \frac{6}{5}}$$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$, $S_{DEC} = \frac{6}{5}$

№ 7

$$f(p) = f(p\cdot 1) = f(p) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f(1) = f(x\cdot\frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x)$$

x	$f(x)$	$f(\frac{1}{x})$
1	0	0
2	1	-1
3	1	-1
4	2	-2
5	2	-2
6	2	-2
7	3	-3
8	3	-3
9	2	-2
10	3	-3
11	5	-5
12	3	-3
13	6	-6
14	4	-4
15	3	-3
16	4	-4
17	8	-8
18	3	-3
19	9	-9

x	$f(x)$	$f(\frac{1}{x})$
20	4	-4
21	4	-4

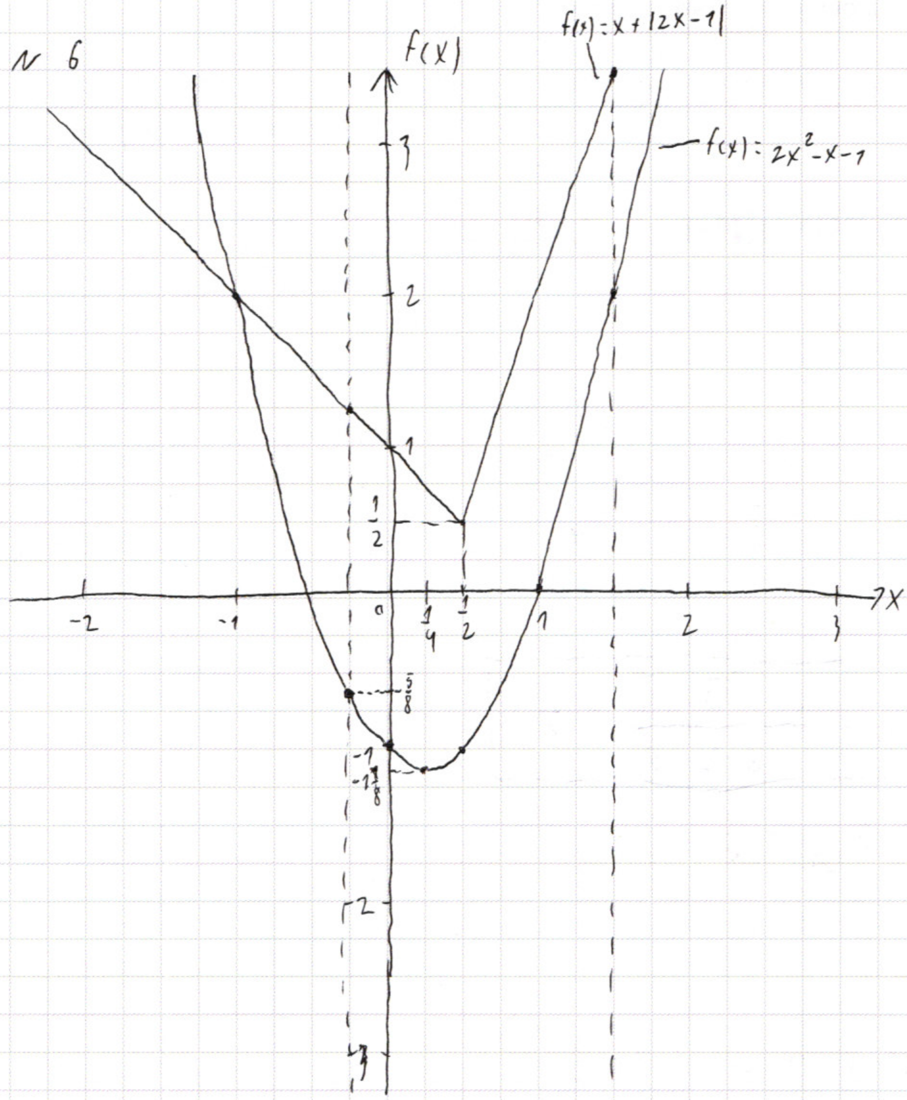
Все простые x считаем по формуле $f(p) = [\frac{p}{2}]$
Все составные x разложили на множители и посчитали по формуле $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(x) = 0$ – 1 штука $\quad 0 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 20 штук $\quad 1\cdot 20 = 20$
$f(x) = 1$ – 2 штуки $\quad 1 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 18 штук $\quad 2\cdot 18 = 36$
$f(x) = 2$ – 4 штуки $\quad 2 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 14 штук $\quad 4\cdot 14 = \cancel{112}\ 56$
$f(x) = 3$ – 6 штук $\quad 3 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 8 штук $\quad 6\cdot 8 = 48$
$f(x) = 4$ – 4 штуки $\quad 4 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 4 штуки $\quad 4\cdot 4 = 16$
$f(x) = 5$ – 1 штука $\quad 5 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 3 штуки $\quad 1\cdot 3 = 3$
$f(x) = 6$ – 1 штука $\quad 6 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 2 штук $\quad 1\cdot 2 = 2$
$f(x) = 7$ – 0 штук $\quad 7 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 2 штук $\quad 0\cdot 2 = 0$
$f(x) = 8$ – 1 штука $\quad 8 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 1 штука $\quad 1\cdot 1 = 1$
$f(x) = 9$ – 1 штука $\quad 9 + f(\frac{1}{x}) < 0$ – 0 штук $\quad 1\cdot 0 = 0$

$20 + 36 + \overset{56}{\cancel{112}} + 48 + 16 + 3 + 2 + 0 + 1 + 0 = 182$

Ответ: 182 пары

№ 6



Построим графики функций $2x^2-x-1$ и $x+|2x-1|$

$ax+b$ – ф-я прямой, на выделенном участке все её точки лежат ниже ~~графи~~ точек графика $x+|2x-1|$ и выше $2x^2-x-1$ (или совпадают).

Заметим, что $ax+b$ всегда возрастает, т.к. на левой границе $f(x)$ должно попасть в $[-\frac{5}{8}; 1\frac{1}{4}]$, а на правой в $[2; 3\frac{1}{2}]$, ~~что~~ где нижняя граница справа выше верхней границы слева. $\Rightarrow a > 0$

Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ и $(1\frac{1}{2}; 2)$, $a = 1{,}5$, $b = -0{,}25$

Заметим, что точка $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ лежит на этой прямой. Т.к. мы для прямой взяли минимальные точки промежутков, то взяв любые другие, точка $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

будет лежать ниже данной прямой $\Rightarrow a = \frac{3}{2}$ и $b = -\frac{1}{4}$ - единственные подходящие коэффициенты.

Ответ: $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=0$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(5)=2$

$f(7)=3$

$f(11)=5$

$f(13)=6$

$f(17)=8$

$f(19)=9$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(\frac{a}{b})=f(a)+f(\frac{1}{b})$

$4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$

$(x+1y+1)(x+3y+(2))=0$

$\begin{cases} a_1a_2=4 \\ a_1b_2+a_2b_1=-5 \\ b_1b_2=1 \\ c_1c_2=-2 \\ a_1c_2+a_2c_1=2 \\ b_1c_2+b_2c_1=1 \end{cases}$ 2, 0, 1, 3, -4, -4

$a_1\ b_1\ c_1\ a_2\ b_2\ c_2$

2 1 2 1 1 2

$a_1\ b_1\ c_1\ a_2\ b_2\ c_2$

2

~~$f(x)\cdot f(\frac{1}{x})=f(1)=0$ если $f(x)\neq 0$, а оно всегда $\neq 0$ при целых x, то $f(\frac{1}{x})=0$~~

$f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})=f(1)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{x})=-f(x)$

~~$y^2+4x^2-2xy-2x$~~

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

~~$y^2+4x^2-5xy-2x-y+2$~~

$2x^2$

$\begin{cases} y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$-2x^2+5xy-6x-5y+5=0$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$4x+4y-3=-2x^2+5xy-2x-y+2$

$(x+1)^2=x^2+2x+1$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$=$

~~$4x^2+y^2=xy$~~

$4x^2+y^2-4xy=xy-2x-y+2$

$4x^2+y^2=5xy-2x-y+2$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-4x=-y^2+4y-3$

$2x^2-4x+2=-y^2+4y-4+3$

$2(x-1)^2=-(y-2)^2+3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

x	f(x)	f(1/x)
1	0	0
2	1	-1
3	1	-1
4	2	-2
5	2	-2
6	2	-2
7	3	-3
8	3	-3
9	2	-2
10	3	-3
11	5	-5
12	3	-3
13	6	-6
14	4	-4
15	3	-3
16	4	-4
17	8	-8
18	3	-3
19	9	-9
20	4	-4
21	4	-4

<0	<1	<2	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9
20	18	14	8	4	3	2	2	1	0

0	$1 \cdot 20 = 20$	20
1	$2 \cdot 18 = 36$	56
2	$4 \cdot 14 = 56$	112
3	$6 \cdot 8 = 48$	160
4	$4 \cdot 4 = 16$	176
5	$1 \cdot 3 = 3$	179
6	$1 \cdot 2 = 2$	181
7	$0 \cdot 2 = 0$	181
8	$1 \cdot 1 = 1$	182
9	$1 \cdot 0 = 0$	182

$-1 \le b \le 1$

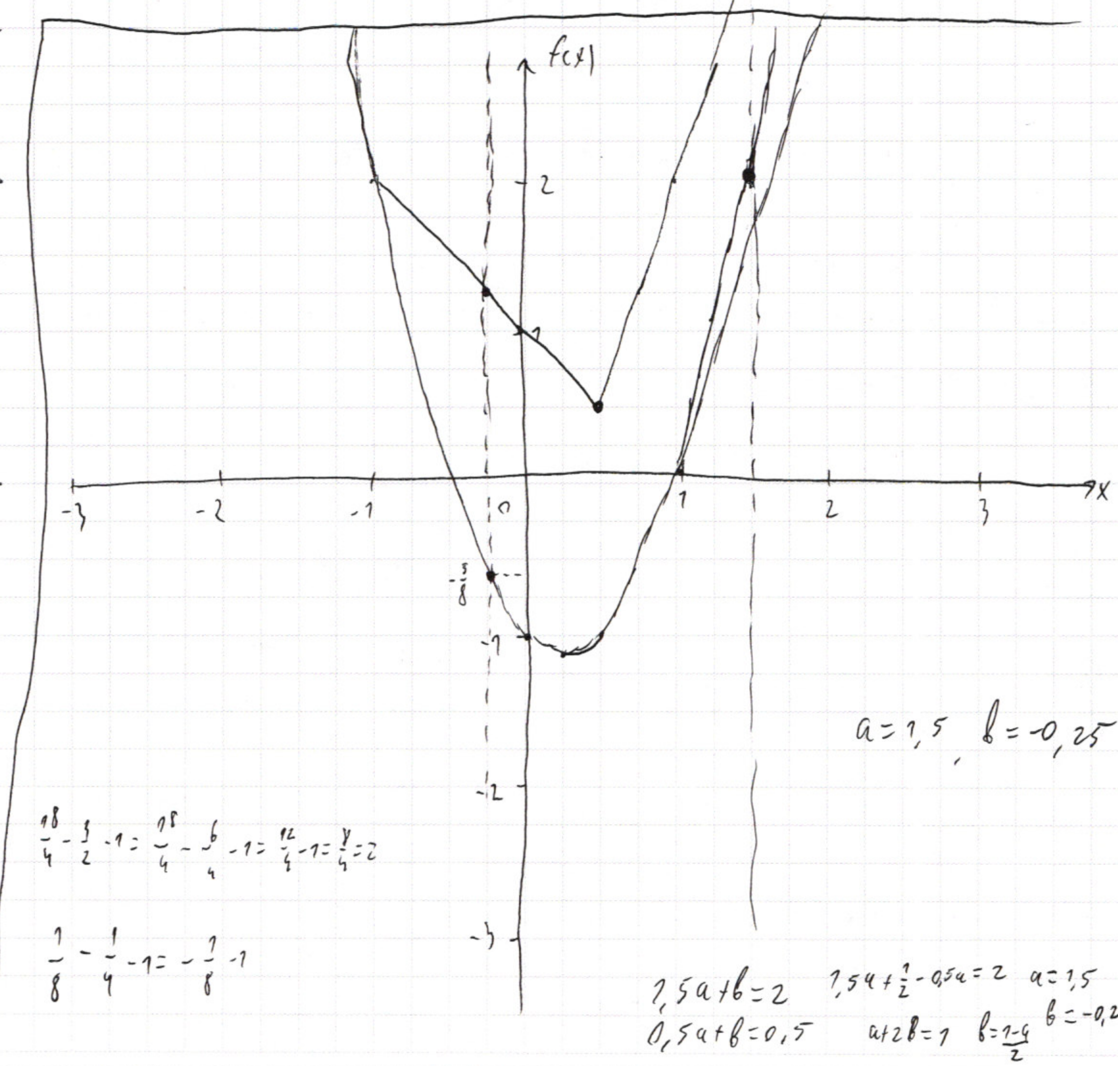
$2 \le 1,5a + b \le 3,5$

$-\frac{3}{8} \le -0,25a + b \le 1,25$

182

$-5 \le -2a + 8b \le 10$

$4 \le 3a + 2b \le 7$



$a = 1,5$, $b = -0,25$

$\frac{18}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{18}{4} - \frac{6}{4} - 1 = \frac{12}{4} - 1 = \frac{8}{4} = 2$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1$

$1,5a + b = 2$ $\quad 1,5a + \frac{1}{2} - 0,5a = 2$ $\quad a = 1,5$

$0,5a + b = 0,5$ $\quad a + 2b = 1$ $\quad b = \frac{1-a}{2}$ $\quad b = -0,25$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

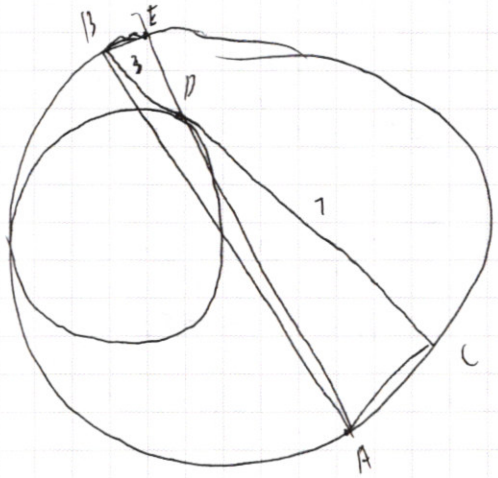
ШИФР

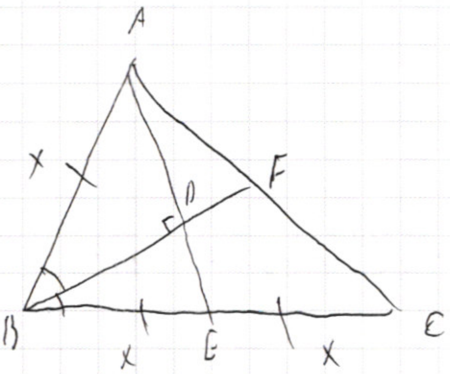
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $d = \frac{-\cancel{2}b \pm \sqrt{\cancel{4}b^2 - 4ac}}{\cancel{2}a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

$b - a = c - b = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} - c$

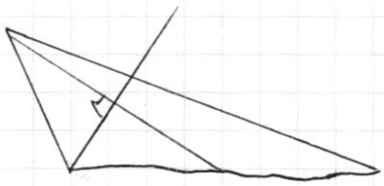




$P_{ABC} = 1200$

$\triangle ABC \sim \triangle EBD$

BD - бис $\Rightarrow AB = BE$



$1200 - 3x < 3x$

$x + 1200 - 3x > 2x$

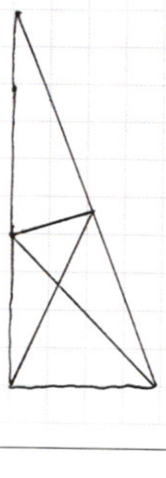
$2x < 1200 - 2x$

$x < 1200 - 3x$

$x < 1200 - 3x < 3x$

$0 < 1200 - 4x < 2x$

$x < 300$ $\quad x > 200$ $\quad 201 - 299 \Rightarrow$ 99 вар



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

~~$2x(x+3)+5y(-x+1)-5=0$~~

$2x(x+3)+5(-xy+y-1)=0$

$\frac{1}{16}\cdot 2=\frac{1}{8}$

$\frac{7}{8}+\frac{1}{4}-1=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$

№1 $4b^2-4ac=4(b^2-ac)=$ ~~$4(b^2-(b-k)(b+k))=4(b^2-b^2+k^2)=4k^2$~~

~~$\sqrt{D}=2k$~~

~~$d=\frac{-2b\pm 2k}{2a}=\frac{-b\pm k}{a}$~~

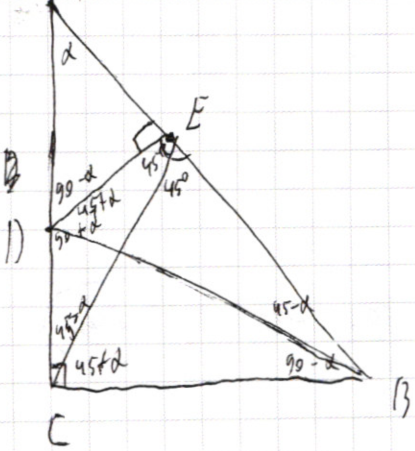
$4(b^2-\frac{b}{k}\cdot bk)=0$

$d=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$

$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{-b}{ca}$

$\frac{x}{k}=\frac{-x}{ck}\Rightarrow 1=\frac{-1}{c}$ $c=-1$

$S=\frac{1}{2}\cdot\sin 45^\circ\cdot DE\cdot CE=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2x}{k}\cdot CE$

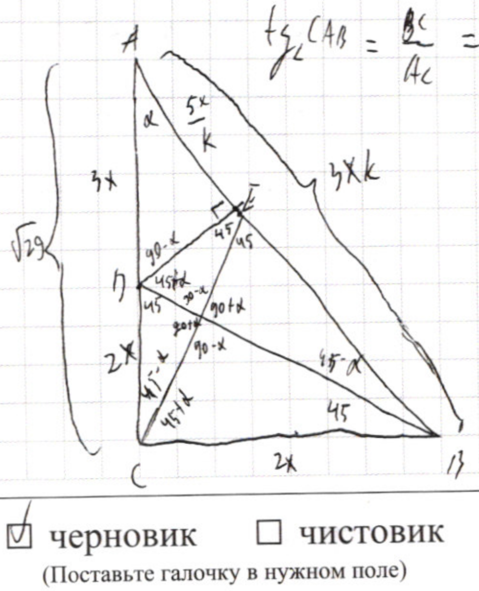


$\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$

$\triangle ADE\sim\triangle ACB\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

$tg\angle CAB=\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE}$

$\frac{бол}{мал}=k$



$tg\,\alpha=\frac{2}{5}$

$x=\frac{\sqrt{29}}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)