МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№3.}$
$$\begin{cases} (1)\ x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ (2)\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$$

(1). $x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \Leftrightarrow x-6y=\sqrt{y(x-6)-(x-6)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}.$

(2). $x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \Leftrightarrow (x^2-12x)+2(y^2-2y)+20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-2\cdot x\cdot 6+36)-36+2(y^2-2\cdot y\cdot 1+1)-2+20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+2(y-1)^2=18$

Значит, первоначальная система равносильна следующей: $\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(6-x)(1-y)} \\ (6-x)^2+2(1-y)^2=18 \end{cases}$

I. $(x-6),(y-1)\geq 0$. Пусть $t=\sqrt{x-6}$, $l=\sqrt{y-1}$,

тогда $t,l\geq 0$, $t^2=x-6 \Leftrightarrow x=t^2+6$; $l^2=y-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=l^2+1 \Leftrightarrow 6y=6l^2+6 \Leftrightarrow -6y=-6l^2-6.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} t^2+6-6l^2-6=tl \\ t^4+2l^4=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-6l^2-tl=0 \\ t^4+2l^4=18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-3l)(t+2l)=0 \\ t^4+2l^4=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=3l \\ t=-2l \end{array}\right. \\ t^4+2l^4=18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(2)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=3l \\ (3l)^4+2l^4=18 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-2l \\ (-2l)^4+2l^4=18 \end{cases} \end{array}\right.$$

~~система~~ $\cancel{\begin{cases} t=-2l \\ (-2l)^4+2l^4=18 \end{cases}}$ ~~может выполняться только если $t=l=0$~~

условие $t=-2l$ выполняется только при $t=l=0$, но это не решение $0+0\neq 18$. (т.к. мы рассматриваем случай $t,l \geq 0$).

Значит, ~~система~~ совокупность (2). равносильна следующей системе: $\begin{cases} t=3l \\ (3l)^4+2l^4=18 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3l \\ 81l^4+2l^4=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3l \\ 83l^4=18 \end{cases} \overset{\text{т.к. } l\geq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t=3l \\ l=\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \\ l=\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-6}=3\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \\ \sqrt{y-1}=\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1=\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6 \\ y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+6 \\ y=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=27\sqrt{\frac{2}{83}}+6 \\ y=3\sqrt{\frac{2}{83}}+1 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II. $(x-6),(y-1)\le 0$. Пусть $t=\sqrt{6-x}$, $l=\sqrt{1-y}$, тогда ~~[illegible]~~ $t,l\ge 0$; $t^2=6-x \Leftrightarrow x=6-t^2$;

$l^2=1-y \Leftrightarrow y=1-l^2 \Leftrightarrow -y=-1+l^2 \Leftrightarrow -6y=-6+6l^2$.

$$\begin{cases}6-t^2-6+6l^2=tl\\ t^4+2l^4=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-t^2+6l^2-tl=0\\ t^4+2l^4=18\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t^2+tl-6l^2=0\\ t^4+2l^4=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(t+3l)(t-2l)=0\\ t^4+2l^4=18\end{cases} \Leftrightarrow$$

(3)
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=-3l\\ t=2l\end{array}\right.\\ t^4+2l^4=18\end{cases}$$

условие $t=-3l$ соблюдается только если $t=l=0$ (т.к. $t,l\ge 0$), но $t=l=0$ – не решение. ~~т.к.~~ $0+0\ne 18$.

значит, система (3) равносильна следующей:

$$\begin{cases}t=2l\\ (2l)^4+2l^4=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=2l\\ 16l^4+2l^4=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=2l\\ 18l^4=18\end{cases} \Leftrightarrow$$

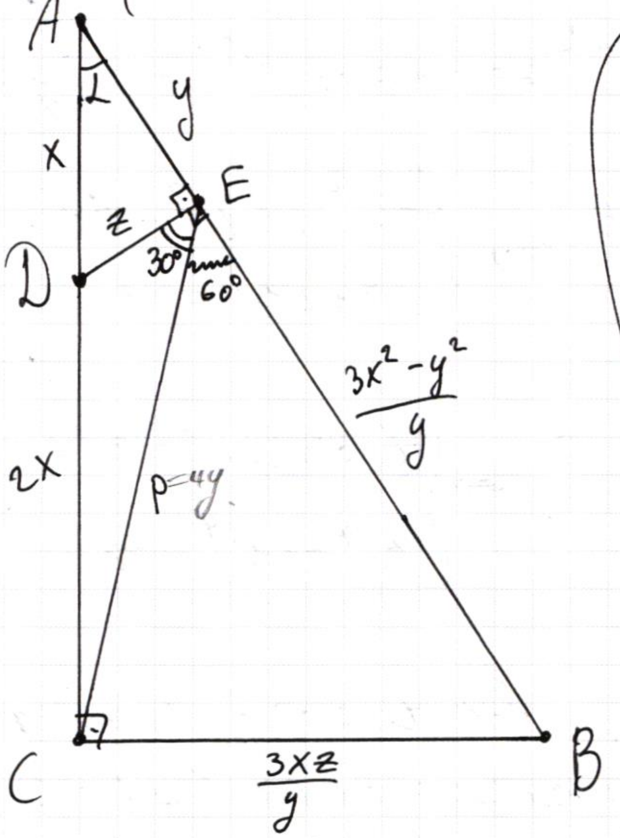
$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=2l\\ l^4=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=2l\\ \left[\begin{array}{l}l=1\\ l=-1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=2\\ l=1\end{cases}\\ \begin{cases}l=-1\\ t=-2\end{cases}\end{array}\right.$$, но $l\ge 0$, значит $\begin{cases}t=2\\ l=1.\end{cases}$ →

$$\longrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-x} = 2 \\ \sqrt{1-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x = 4. \\ 1-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Больше решений система не имеет.

Ответ: $\left(27\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ 3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$ и $(2;0)$.

$\boxed{№4.}$



Дано: $\triangle ABC$ — прям-й. ($\angle ACB = 90°$); $D \in$ отр. AC; $E \in$ отр. AB. $AD : AC = 1:3$; $DE \perp AB$; $\angle CED = 30°$.
Найти: tg $\angle BAC$

① Пусть $AD = x$, $DC = 2x$. $\triangle AED \sim \triangle ACB$: $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} = \frac{AD}{AB}$. Пусть $AE = y$, $EB = q$, $CB = V$; $CE = p$, $DE = z$. Тогда $\frac{y}{3x} = \frac{z}{V} = \frac{x}{y+q} \rightarrow V = \frac{z\cdot 3x}{y}$,

$y^2 + yq = 3x^2 \rightarrow q = \frac{3x^2 - y^2}{y} \rightarrow AB = \frac{y^2+3x^2-y^2}{y} = \frac{3x^2}{y}$

② По теор. Пифагора в $\triangle AED$ ($\angle AED = 90°$): $y^2 + z^2 = x^2$,
в $\triangle ACB$ ($\angle ACB = 90°$): $(3x)^2 + \left(\frac{3xz}{y}\right)^2 = \left(\frac{3x^2}{y}\right)^2$.

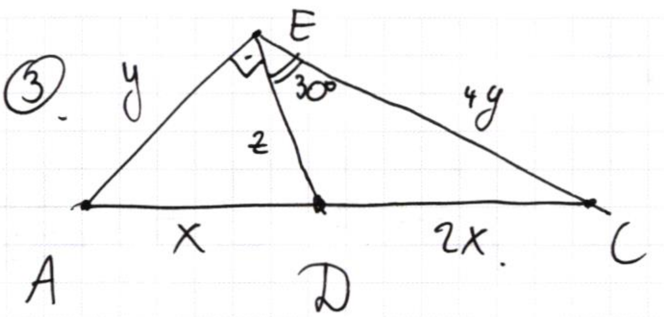
□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③.



В $\triangle AEC$:

$2\cdot S_{\triangle AED} = S_{\triangle EDC}$

$2\cdot\frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED = ED\cdot EC\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$4AE\cdot ED = ED\cdot EC$

$4AE = EC$

$4y = p$

④. По теор. кос. ов в $\triangle$ DEC: $4x^2 = z^2 + 16y^2 - 2\cdot z\cdot 4y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2 = z^2 + 16y^2 - yz\cdot 4\sqrt{3}$. при этом $y^2+z^2=x^2$.

т.е. $\cancel{4y^2} + 4z^2 = z^2 + \overset{12}{16y^2} - yz\cdot 4\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3z^2 = 12y^2 - yz\cdot 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 3z^2 + z\cdot(y4\sqrt{3}) - 12y^2 = 0 \Leftrightarrow \ldots$

$D/4 = (2\sqrt{3}y)^2 + 3\cdot 12y^2 = 12y^2 + 3\cdot 12y^2 = 4\cdot 12y^2 = 16\cdot 3y^2 =$

$= (4\sqrt{3}y)^2$.

$\ldots \Leftrightarrow \left(z + \frac{2\sqrt{3}y - 4\sqrt{3}y}{3}\right)\left(z + \frac{2\sqrt{3}y + 4\sqrt{3}y}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{2\sqrt{3}y}{3} \\ z = -\frac{6\sqrt{3}y}{3} \end{array}\right.$, но $z, y > 0 \rightarrow z = \frac{2\sqrt{3}}{3}y$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\operatorname{tg}\angle = \frac{2}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

(8) $3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} = AD$

$\operatorname{tg}\angle = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. $\operatorname{tg}^2\angle + 1 = \frac{1}{\cos^2\angle} = \frac{4\cdot 3}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\angle} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{7}{3} = \frac{1}{\cos^2\angle} \rightarrow \cos^2\angle = \frac{3}{7}. \rightarrow \cos\angle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

(т.к. $\angle$ – острый)

$AE = AD\cdot\cos\angle = \frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

$AE^2 + DE^2 = AD^2.$

$\frac{1}{3} + DE^2 = \frac{7}{9}$

$DE^2 = \frac{7-3}{9} = \frac{4}{9} \rightarrow DE = \frac{2}{3}. = z.$

$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot EC\cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Ответ: $S_{\triangle CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

№1. a, b, c. Пусть знаменатель геом. прогр. равен q, тогда $b = a\cdot q$, $c = a\cdot q^2$. Пусть y – четвертый ~~a1~~ член геом. прогр. т.е. $y = a\cdot q^3$, тогда

$a(a\cdot q^3)^2 - 2(aq)\cdot a q^3 + a\cdot q^2 = 0. \rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\to (aq^3)^2 - 2aq\cdot q^3 + q^2 = 0 \to a^2q^6 - 2aq^4 + q^2 = 0 \to$

$\to a^2q^4 - 2aq^2 + 1 = 0 \to (aq^2)^2 - 2\cdot(aq^2) + 1 = 0,$

но $aq^2 = c$, тогда $c^2 - 2c + 1 = 0 \Leftrightarrow (c-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = 1.$

Ответ: $c = 1.$

$\boxed{№6.}$ $8x - 6|2x-1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+b \geq 8x - 6|2x-1| \\ ax+b \leq -8x^2 + 6x + 7 \end{cases}$

I. $\cancel{x \in (-\infty; \frac{1}{2}]}$ $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, тогда

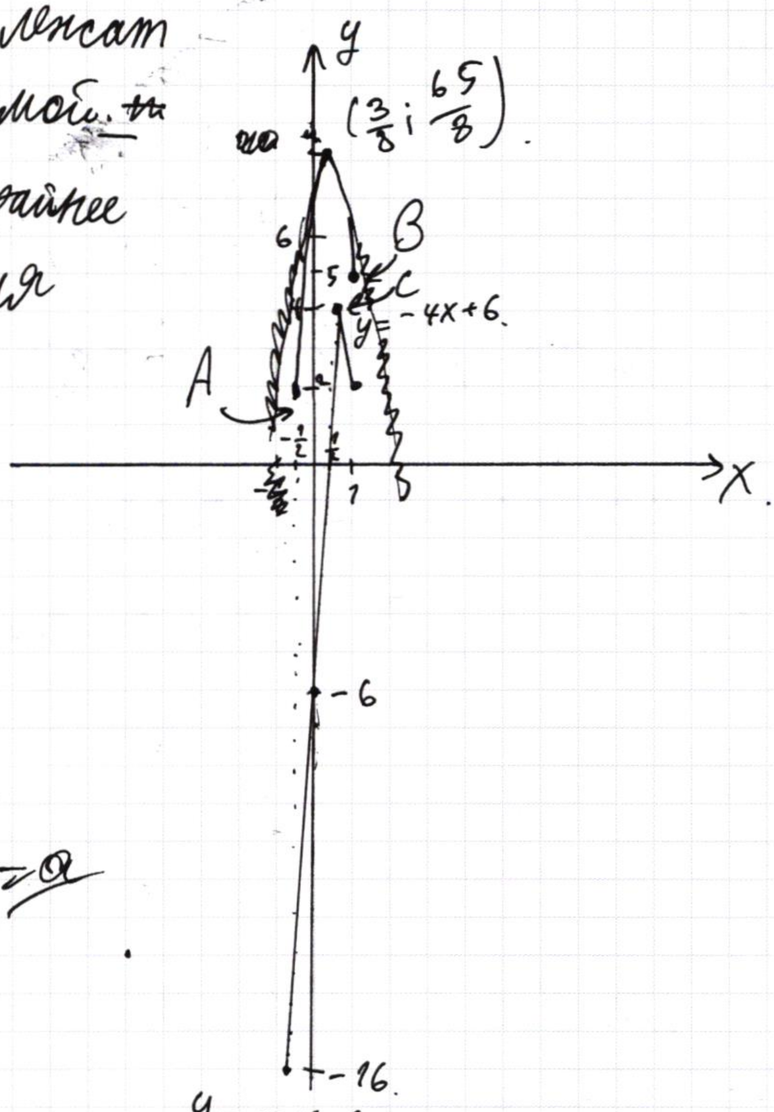
$\begin{cases} 8x - 6(1-2x) \leq ax+b \\ ax+b \leq -8x^2+6x+7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 6 + 12x \leq ax+b \\ ax+b \leq -8x^2+6x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x - 6 \leq ax+b \\ ax+b \leq -(8x^2 - 6x - 7) \end{cases} * \Leftrightarrow \begin{cases} 20x - 6 \leq ax+b \\ ax+b \leq -8(x-\frac{3}{8})^2 + \frac{65}{8} \end{cases}$

$* \; -8(x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}) = -8(x^2 - \frac{3}{4}x) + 7 = -8(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{3}{8} + \frac{9}{64} - \frac{9}{64}) + 7 =$

$= -8((x-\frac{3}{8})^2 - \frac{9}{64}) + 7 = -8(x-\frac{3}{8})^2 + \frac{9}{8} + 7 = -8(x-\frac{3}{8})^2 + \frac{65}{8}$

точки A, B, C лежат на одной прямой — т.е. это крайнее значение для a; в.



$y=20x-6$

Это прямая

$\left(-\frac{1}{2}; 2\right)(1; 5)$

$2 = -\frac{k}{2} + в$

$-5 = -k - в$

$-3 = -\frac{3}{2}k \quad k = 2 = a$

$в = 3$

II. $x \in [\frac{1}{2}; 1]$, тогда $\begin{cases} ax+в \geq -4x+6 \\ ax+в \leq -8\left(x-\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{65}{8} \end{cases}$

$8x^2 - 12x + 6$

прямая

парабола, ветви вниз. верш. $\left(\frac{3}{8}; \frac{65}{8}\right)$ коэф. растяж. 8.

значение парабол в $-\frac{1}{2}$ будет $-8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = 2$

знач. в 1 будет $-8+6+7=5$.

$0 < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$. Прямая $y = ax+в$ должна всегда при $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$ проходить ниже параболы, но выше ломаной.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

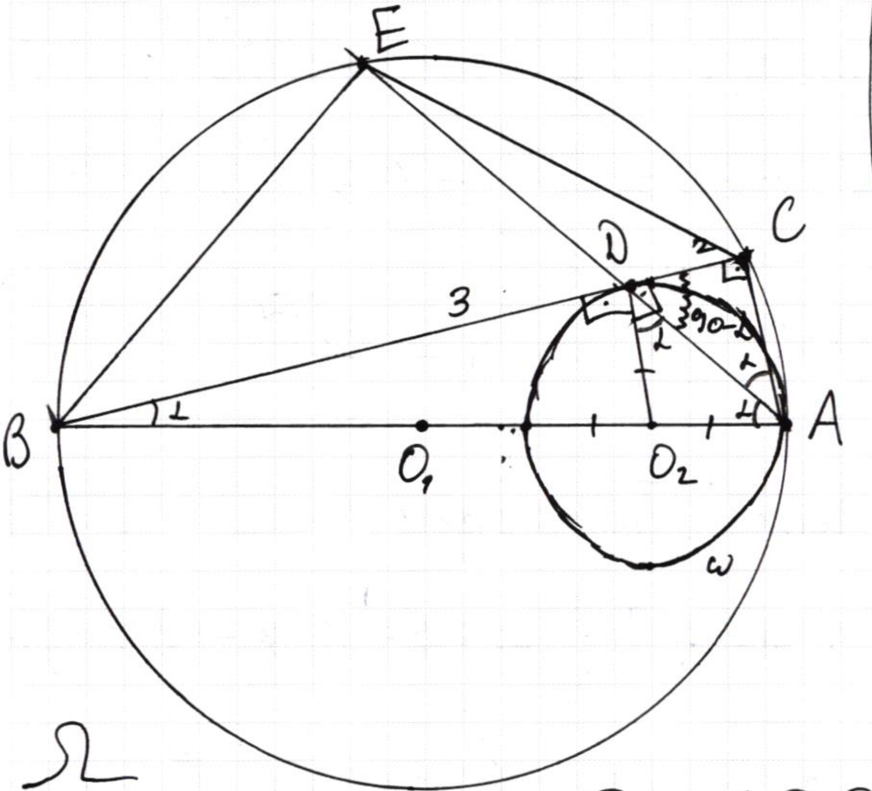
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№5.~~ №5.



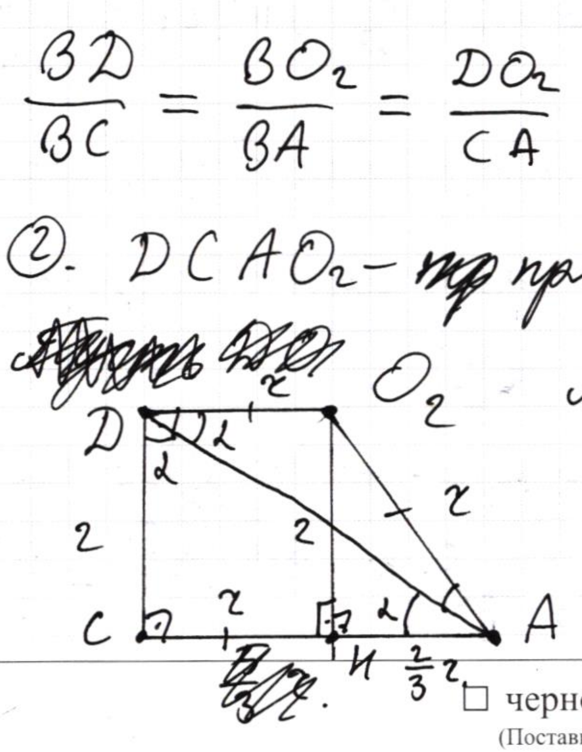
Дано: $\Omega(O_1; R)$; $\omega(O_2; r)$;
BC – хорда Ω
BC кас. $\omega = D$.
$AD \cap \Omega = E$.
$BD = 3$; $DC = 2$.
Найти: S_{BACE}; r; R

① $\angle BDO_2 = 90^\circ$ (т.к. D – т. кас).
$\angle BCA = 90^\circ$ (т.к. BA – диам) $\rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA} = \frac{DO_2}{CA} = \frac{3}{5} = \frac{r}{CA} \rightarrow CA = \frac{5}{3}r.$$

② $DCAO_2$ – ~~пр~~ прямоуг. трап. ($DO_2 \parallel CA$).

~~Пусть DO~~

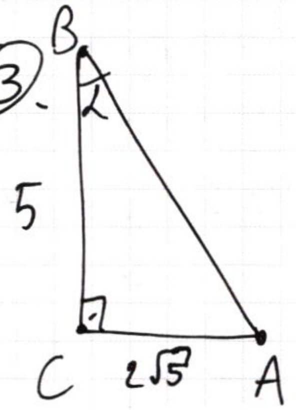


Провед. $O_2H \perp AC$, тогда
$CH = DO_2 = r$ (т.к. DO_2HC – прямоуг.) $\rightarrow HA = \frac{5}{3}r - r = \frac{2}{3}r$.

По теор. Пифагора в $\triangle O_2HA$ ($\angle O_2HA = 90^\circ$):

$4 + \frac{4}{9}r^2 = r^2 \to 4 = \frac{5}{9}r^2 \to r^2 = \frac{4 \cdot 9}{5} \to r = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{5}} =$

$= \frac{6}{\sqrt{5}} \to AC = \frac{5}{3}r = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

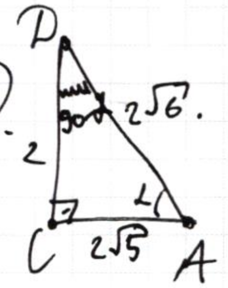


③. По теор. Пифагора в $\triangle BCA$ ($\angle BCA = 90^\circ$).

$25 + 20 = BA^2 = 45 = 9 \cdot 5 \to$

$\to BA = 3\sqrt{5}$.

$BA = 2R \to R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.



④. По теор. Пифагора в $\triangle DCA$ ($\angle DCA = 90^\circ$)

$4 + 20 = DA^2 = 24 = 6 \cdot 4 \to DA = 2\sqrt{6}$.

⑤. BC и AE — хорды, пересек-ся в т. D, значит,

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$; $3 \cdot 2 = 2\sqrt{6} \cdot DE \to DE = \frac{3}{\sqrt{6}} =$

$= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. $AE = AD + DE = 2\sqrt{6} + \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\left(2 + \frac{3}{6}\right) = \sqrt{6} \cdot \frac{15}{6} =$

$= \frac{3\sqrt{6}}{2}$

⑥. $\angle O_2DA = \angle O_2AD = \alpha$, т.к. $\triangle DO_2A$ — р.б. с осн. DA.

$\alpha = \angle DAC = \angle ADO_2$, как внутр. накр. леж.

$\sin\alpha = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

⑦ $\angle BDA = 90 + \alpha$. $\sin(90 + \alpha) = \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

⑧ $S_{BECA} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin(90 - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{15\sqrt{5}}{4}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

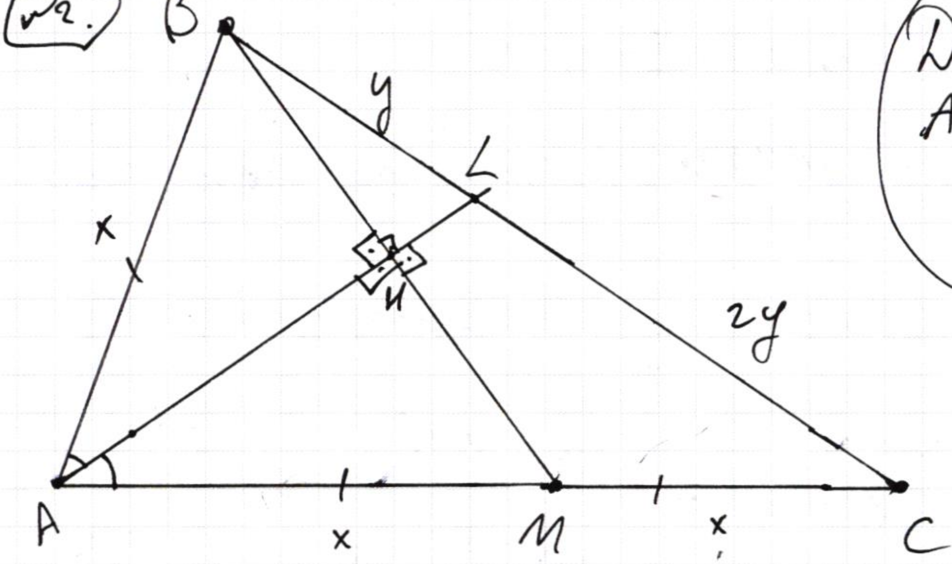
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $S_{BACE} = \frac{15\sqrt{5}}{4}$; $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

№2.



Дано: $\triangle ABC$; AL – бис. BM – мед. $AL \perp BM$; $AL \cap BM = H$

① $\triangle ABM$ – р.б. с осн. BM, т.к. AH – выс. и бис. $\to$ $AM = MC = AB$. (Пусть $AM = x = MC = AB$).

② Т.к. AL – бисс. то $\frac{AC}{AB} = \frac{CL}{LB} = \frac{2}{1}$. (Пусть $LC = 2y$, $BL = y$).

③ $3y \in \mathbb{N}$; $2x \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{N} \to 3x \in \mathbb{N}$.

$P_{\triangle ABC} = 900 = 3x + 3y$. ~~Пусть $3x = a$, тогда $900 = a + 3y$~~. Пусть $3y = в$, тогда $900 = 3x + в$.

~~Если $3x + в = 900$, $3x, в \in \mathbb{N}$. Если $x, в \in \mathbb{N}$, $3x + в = 900$, то такой тр-к нам подходит.~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$в = 300 - 3x \Leftrightarrow (300 - x)3 = в$ ~~на каждый натуральный~~

~~(из возможного) натуральный "х" есть ровно 1 вариант натурального "в" т.е. всего пар чисел (x, в) 298, но когда в = 4x~~

~~у таких треугольников всегда будет две стороны с отношением 2:1.~~

~~Ответ: 298 вариантов таких треугольников.~~

Так же должно соблюдаться нер-во тр-ка:

$$\begin{cases} 3x > в \\ 2x + в > x \\ x + в > 2x \end{cases} \to \begin{cases} 3x > в \\ x + в > 2x \end{cases} \to \begin{cases} 3x > в \\ в > x \end{cases}$$

$2x+в>x$ верно всегда

Т.е. если $\begin{cases} x, в \in \mathbb{N} \\ 3x > в \\ в > x \\ в = (300-x)3 \end{cases}$, то такой тр-к нам подходит

$$\to \begin{cases} 3x > (300-x)3 \\ (300-x)3 > x \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x > 300 - x \\ (300-x)3 > x \end{cases} \to \begin{cases} 2x > 300 \\ 900 - 3x > x \end{cases} \to \begin{cases} x > 150 \\ 900 > 4x \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x \geq 151 \\ x < 225 \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 151 \\ x \leq 254 \end{cases}$$ всего 104 варианта на x. x однозначно определяет

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

все остальные стороны треугольника.

~~Мы могли посчитать один треугольник несколько раз, т.к. тогда и только тогда, когда $b(x_1) = x_2$~~

С ростом „x" растут две стор- треугольника и уменьшается одна из них → каждый треугольник встретится ровно 1 раз. Ответ: 104 варианта.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (1)\ x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ (2)\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=17. \end{cases}$$

(2). $(x^2-12x)+2(y^2-2y)+20=0.$

$-36+20$

-18

$\cancel{x^2-12x}$

$(x^2-2\cdot 6\cdot x+36)-36+2(y^2-2\cdot y\cdot 1+1)-2+20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+2(y-1)^2=18.$

$(x-6)^2+(\sqrt{2}(y-1))^2=(\sqrt{17})^2.$

(1). $x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}. \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x-6y>0. \end{cases}$

$y(x-6)-(x-6).$

$(x-6)(y-1).$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}.$

$4y^2+3z^2=\frac{9+\sqrt{3}z}{2}\ 9-\left(\frac{9+\sqrt{3}z}{2}\right)^2.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №15.

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=78. \end{cases}$$

I. $(x-6),(y-1)\geq 0.$

Пусть $t=\sqrt{x-6}$; $l=\sqrt{y-1}$, тогда

$$\cancel{\begin{cases} (t+6)-(6l+6)=\sqrt{tl} \\ t^2+2l^2=78. \end{cases}}$$

$t, l \geq 0$

$t^2=x-6$; $x=t^2+6.$

$l^2=y-1. \to y=l^2+1 \to 6y=6l^2+6. \to$

$\to -6y=-6l^2-6.$

Т. е.

$$\begin{cases} t^2+6-6l^2-6=tl \\ t^4+2l^4=78. \end{cases} \Leftrightarrow$$

I. $$\begin{cases} t^2-6l^2=tl \\ t^4+2l^4=78 \end{cases}$$

$\cancel{t^2-tl=6l^2.}$

$\cancel{t^2-6l^2=tl}$

I. $t^2-tl-6l^2=0.$

$(t-3l)(t+2l)=0. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3l \\ t=-2l \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

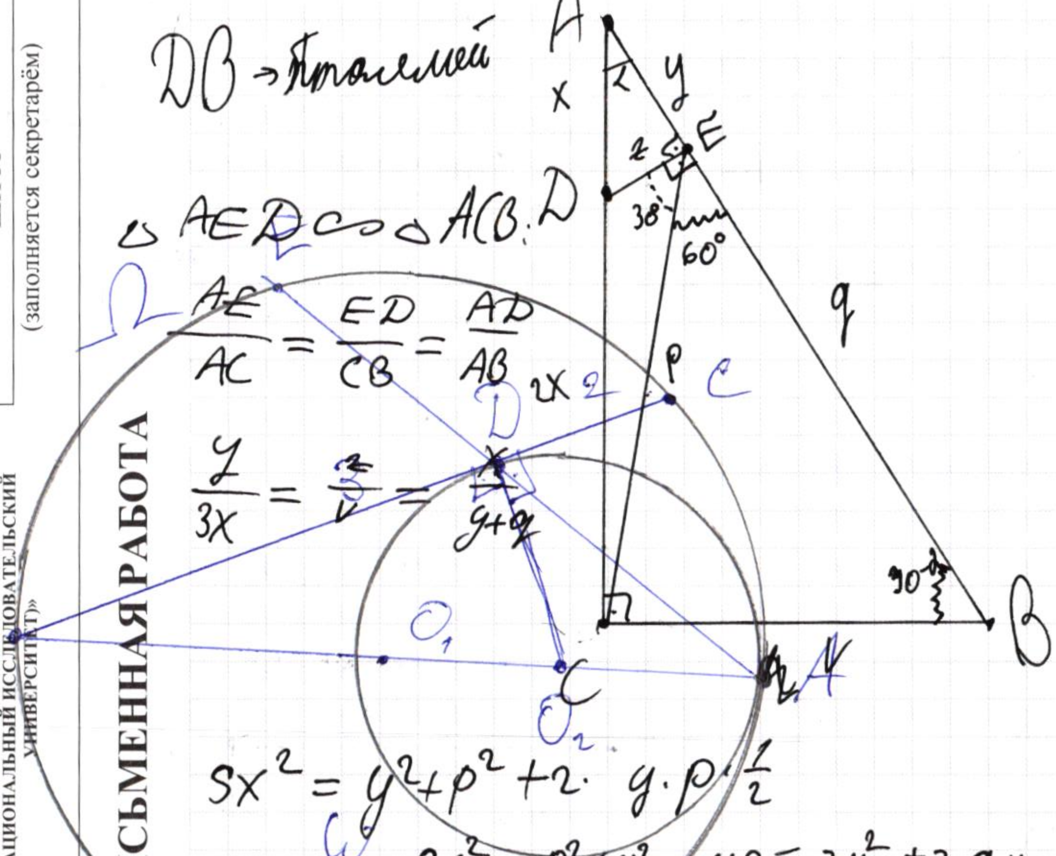
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

DB → Птолемей

$\triangle AED \sim \triangle ACB$; D

$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{y}{3x} = \frac{z}{v} = \frac{x}{y+q}$



$8x^2 = y^2 + p^2 + 2 \cdot y \cdot p \cdot \frac{1}{2}$

$8x^2 = p^2 + y^2 + yp = 3y^2 + 3qy$

$$\begin{cases} y^2 + 2yq + q^2 - 9x^2 = p^2 + q^2 - pq \\ 4y^2 + 4z^2 = z^2 + p^2 - \sqrt{3}zp \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 + 2yq - 5y^2 - 9z^2 = p^2 - pq \\ 4y^2 + 4z^2 = z^2 + p^2 - \sqrt{3}zp \end{cases}$$

$-8y^2 + 2yq - 9z^2 = p^2 - pq$ 1

$-8y^2 + 4y^2 + 6z^2 - 9z^2 = p^2 - pq$

$-4y^2 - 3z^2 = p^2 - pq$

254
160

$\frac{y}{3x} = \frac{z}{v} = \frac{x}{y+q}$; $3x^2 = y^2 + qy = 3y^2 + 3z^2$

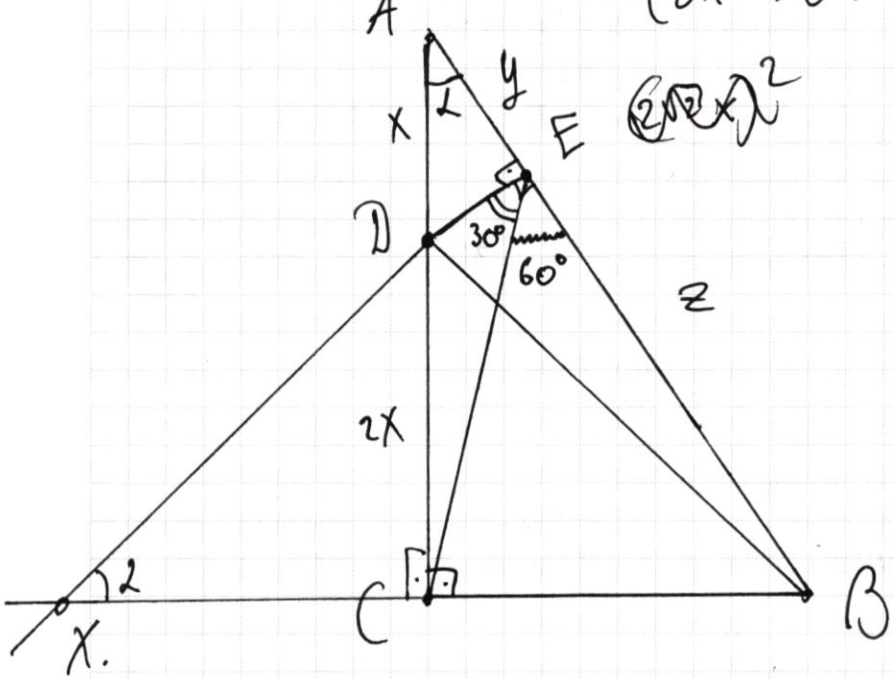
$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ (3x)^2 + v^2 = (y+q)^2 \\ (2x)^2 = z^2 + p^2 - 2 \cdot z \cdot p \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ v^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$

450 | 2
4 | 225

$$\rightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ \cancel{8x^2} v^2 = y^2 + 2yq + q^2 - 9x^2 \\ 4x^2 = z^2 + p^2 - \sqrt{3}zp \\ v^2 = p^2 + q^2 - pq \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 14
(Нумеровать только чистовики)



$-(8x^2 - 6x - 7)$. $\quad -8\left(x - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}\right) \quad x - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}$

$\cancel{tg}\ \angle BAC = ?$ $\quad \left(x - 2\cdot x \cdot \frac{3}{8} + \frac{9}{64} - \frac{9}{64}\right) - \frac{7}{8}$

$(2\sqrt{2}x)^2$

$\left|\frac{2}{2} - x\right|^2$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$

$\frac{DE}{CB} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{y}{3x} = \frac{x}{y+EB} \to$

$\to 3x^2 = y^2 + yEB.$

$\underline{3x^2 = y^2 + yz.}$

$-4x+6.$

$8x - 12x + 6$

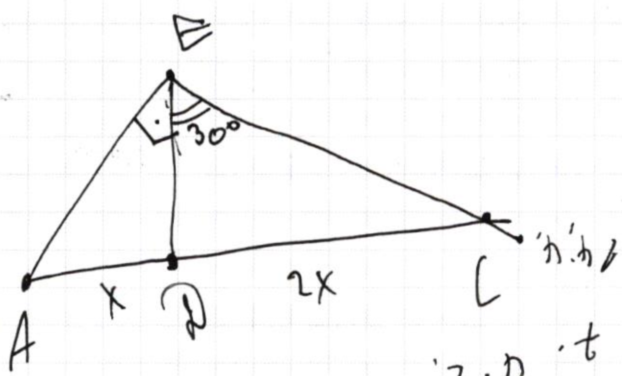
$8x - 6(2x - 7)$

$x \in \left[\frac{2}{2}; 7\right]$

по теор. кос-ов в $\triangle DEC$: $4x^2 = DE^2 + CE^2 - 2\cdot DE\cdot CE\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle CEB$: $CB^2 = CE^2 + EB^2 - 2\cdot CE\cdot EB\cdot\frac{1}{2}$.

56



z·n·t

8·t

$2\cdot S_{\triangle}AED = S_{\triangle}EDC$

$AE\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot EC\cdot\frac{1}{2}$

$4\cdot AE\cdot DE = DE\cdot EC.$

$4y\cdot z = zp.$

$4y = p.$

$4y^2 + 3z^2 = pq - p^2$

$\cancel{4y^2 + 4z^2 =}$

$4y^2 + 3z^2 = p^2 - \sqrt{3}zp.$

$pq - p^2 = p^2 - \sqrt{3}zp$

$q - p = p - \sqrt{3}z \to 2p = q + \sqrt{3}z.$

$p = \frac{q+\sqrt{3}z}{2}$