МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a = x$, $b = xy$, $c = xy^2$, $d = xy^3$ → четвёртый член геометр. прогрессии.

$ad^2 + 2bd + c = 0$ (по условию) подставляя значения a, b, c и d получаем

$x \cdot (x^2y^6) + 2xy \cdot xy^3 + xy^2 = 0$

$x^3y^6 + 2x^2y^4 + xy^2 = 0$ т.к. $c = xy^2$ уравнение можно переписать в виде

$c^3 + 2c^2 + c = 0$

$c(c^2 + 2c + 1) = 0$

$c(c+1)^2 = 0$ откуда $\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$

Оба варианта теоретически возможны

$c = 0$ при $x = 0$ y - любое; $c = -1$ при $y = 2$ $x = -0{,}25$.

→ вырожденный случай (все члены последовательности 0)

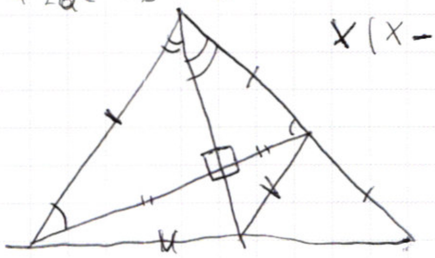
Ответ: 0 или -1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$b^2 + 4a^2 - 5ab = 0$
$b^2 + 2a^2 - 2 = 0$



$x(x-2)$

$\frac{10 \cdot 9}{2} = 5 \cdot 9$

$\frac{21 \cdot 20}{2} = 210 - 1 - 6 - 15 - 6 -$

$195 - 13$

182

$y(x-1) - 2(x-1)$ $\sqrt{(x-1)(y-2)} = y - 2x$

$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ $(\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 + (y-2)^2 = 3$

$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2$

$4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 + y^2 = 0$

56

96 166

106 149 182

136

$b = \sqrt{ab} + 2a$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

$2x(x-3)$

$\sqrt{(x-1)(y-2)} = y - 2x$ $b(b+1) + 2a(\cancel{a-1})$

y $2a^3$

$(x-1)(y-2) = (y-2x)^2$ $a(2a-b) = -2$

$5(y - xy - 1)$ $b(b+a) = 4$

$2x(x+3) + 5(y - xy - 1)$ $2a^2 + b^2 + 2ab = 3 + 2(y-2x)^2$ $(x-1)(2x - 2 - \cancel{x}y + 2) = -2$

$(a+b)^2 = 3 + 2(y-2x)^2 - a^2$ $(y-2)(y - 2 + x - 1) = 4$

$(x+y-3)^2 = 3 + 2(y-2x)^2 - (x-1)^2$ $(x-1)(2x-y) = -2$

$(y-2) + (2-2x)$ $(y-2)(x+y-3) = 4$

$f(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_n / p$

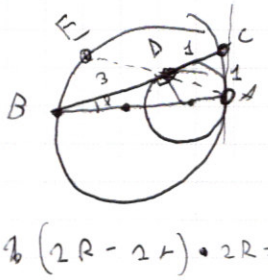
$y - 2 - 2(x-1)$ $b - 2a = \sqrt{ab}$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{y} \cdot y) = f(\frac{1}{y}) + f(y) = f(1) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) +$

$+ f(r_1) - f(r_2) - \ldots - f(r_k) < 0$



$\sin e = \frac{1}{4}$

$-ax - b \geq -x - 1 - 2|2x-1|$

$a(a+4) =$

$= (a+2)^2 =$

$ax + b \leq x + 1 - 2|2x-1|$

$a^2 + 2a + 2 = a^2 + 4a$

$b(2R - 2r) \cdot 2R = 9$

$2a = 2$

$b^2 + 4a^2 - ab = 0$ $2a^2 + 2 - ab = 0$ $4(R^2 - Rr = 9)$

$b^2 + 2a^2 - 2 = 0$ $b^2 + ab - 4 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Для начала найдём несколько важных вещей про нашу ф-ию.

1) $f(a\cdot 1) = f(a) + f(1) = f(a) \Rightarrow f(1) = 0$ т.к $a\cdot 1 = 0$

2) ~~$f(\frac{1}{y}) = f(1\cdot \frac{1}{})$~~

$f(1) = f(y\cdot \frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$ т.к. $f(1) = 0$

Так как $x, y \in \mathbb{N}$ мы можем представить их в виде: $x = p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_n$ где p_i - простое число (или 1)

$y = r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdot\ldots\cdot r_k$ где r_i - простое число (или 1)

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ используя св-во 2 получаем

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) = f(p_1\cdot\ldots\cdot p_n) - f(r_1\cdot\ldots\cdot r_k) =$

$= f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) - f(r_1) - f(r_2) - \ldots - f(r_k) = S$

Мы хотим найти все такие x, y что $S < 0$

введём ф-ию $g(x) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n)$ где $x = p_1\cdot\ldots\cdot p_n$ и p_i - простое число. Тогда нам нужно найти все такие x, y что $g(x) - g(y) < 0$

Остаётся посчитать $g(n)$ для всех $n \in N$ $1 \le n \le 21$

$g(1) = f(1) = 0$; $g(2) = f(2) = [\frac{2}{2}] = 1$; $g(3) = f(3) = [\frac{3}{2}] = 1$;

$g(4) = \cancel{f(2\cdot 2)} = f(2) + f(2) = 2$; $g(5) = f(5) = [\frac{5}{2}] = 2$

$g(6) = \cancel{f(2\cdot 3)} = f(2) + f(3) = 2$; $g(7) = f(7) = [\frac{7}{2}] = 3$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$g(8) = f(2)+f(2)+f(2) = 3$; $g(9) = f(3)+f(3) = 2$

$g(10) = f(2)+f(5) = 1+2 = 3$; $g(11) = f(11) = \left[\frac{11}{2}\right] = 5$

$g(12) = f(2)+f(2)+f(3) = 3$; $g(13) = f(13) = \left[\frac{13}{2}\right] = 6$

$g(14) = f(2)+f(7) = 1+3 = 4$; $g(15) = f(3)+f(5) = 1+2 = 3$

$g(16) = f(2)+f(2)+f(2)+f(2) = 4$; $g(17) = f(17) = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$

$g(18) = f(2)+f(3)+f(3) = 3$; $g(19) = f(19) = \left[\frac{19}{2}\right] = 9$

$g(20) = f(2)+f(2)+f(5) = 4$; $g(21) = f(3)+f(7) = 1+3 = 4$

x, y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
g(x)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

- если $x=1$ подойдут $2 \le y \le 21$ − 20 пар
- $x=2$ подойдут $4 \le y \le 21$ − 18 пар
- $x=3$ подойдут $4 \le y \le 21$ − 18 пар
- $x=4$ подойдут ~~y=7,8,10,~~ $y=7,8$ или $10 \le y \le 21$ − 14 пар
- $x=5$ подойдут $y=7,8$ или $10 \le y \le 21$ − 14 пар
- $x=6$ подойдут $y=7,8$ или $10 \le y \le 21$ − 14 пар
- $x=7$ подойдут $y=11,13,14,16,17,19,20,21$ − 8 пар
- $x=8$ подойдут $y=11,13,14,16,17,19,20,21$ − 8 пар
- $x=9$ подойдут $y=7,8$ и $10 \le y \le 21$ − 14 пар
- $x=10$ подойдут $y=11,13,14,16,17,19,20,21$ − 8 пар
- $x=11$ подойдут $y=13,17,19$ − 3 пары
- $x=12$ подойдут $y=11,13,14,16,17,19,20,21$ − 8 пар
- $x=13$ подойдут $y=17,19$ − 2 пары
- $x=14$ подойдут $y=11,13,17,19$ − 4 пары
- $x=15$ подойдут $y=11,13,14,16,17,19,20,21$ − 8 пар
- $x=16$ подойдут $y=11,13,17,19$ − 4 пары
- $x=17$ подойдут $y=19$ − 1 пара

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- $x=18$ подойдут $y=11,13,14,16,17,19,20,21$ – 8 пар
- $x=19$ подойдут $y=\varnothing$ 0 пар
- $x=20$ подойдут $y=11,13,17,19$ – 4 пары
- $x=21$ подойдут $y=11,13,17,19$ – 4 пары

Итого

$n = 20+13+13+19+19+16+8+8+16+8+3+8+2+4+2+4+1+$
$+8+0+4+4 = 182$

Посчитать это количество можно было проще. Мы уже поняли, что $f(x/y)<0$ тогда и только, тогда, когда $g(x)<g(y)$. Значит нам нужно найти количество пар чисел, таких что $g(x)\neq g(y)$ $n = C_{21}^2 - C_2^2 - C_4^2 - C_6^2 - C_4^2 =$
$= 210-1-6-15-6 = 195-13 = 182$

Ответ: 182

№6

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax + b \ (1) \\ x^2 + |2x-1| \geq ax + b \ (2) \end{cases} \text{ при } x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$$

(1)

$2x^2 - (a+1)x - (b+1) \le 0$

$D = a^2 + 2a + 1 + 8b + 8 = a^2 + 2a + 8b + 9$ если $D < 0$ то

$2x^2 - (a+1)x - (b+1) > 0$ $\Rightarrow D \geq 0$

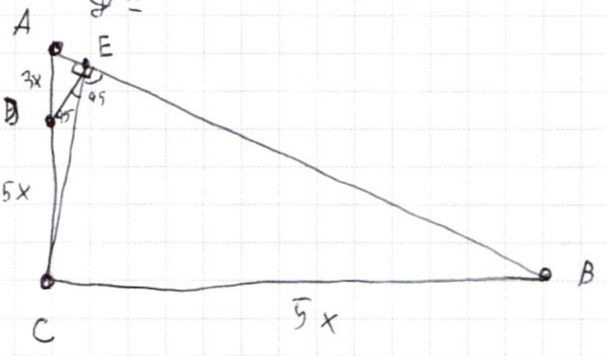
$$x_1, x_2 = \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2+2a+8b+9}}{4}$$

$$x \in \left[\frac{a+1-\sqrt{a^2+2a+8b+9}}{4}; \frac{a+1+\sqrt{a^2+2a+8b+9}}{4}\right]$$

(2) при $x \geq \frac{1}{2}$

$x^2 - (a-2)x - (b+1) \geq 0$

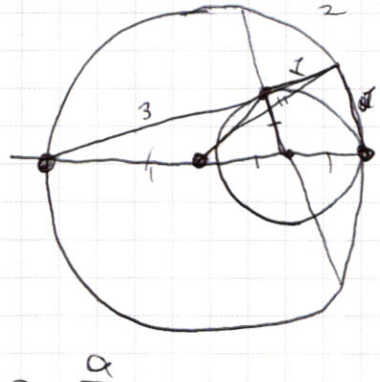
$D =$

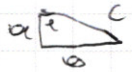


$$\frac{xy \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{y^2 \sin\varphi}{2} + \frac{x^2 \cdot \sin\varphi}{2}$$

$\frac{\sin\varphi}{2}(xy + y^2 + xy + x^2)$

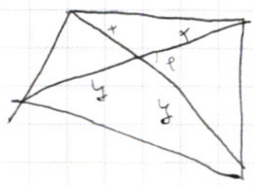
$\frac{\sin\varphi}{2}(x+y)^2$





$\sin\varphi = \frac{b}{c}$ $\cos\varphi = \frac{a}{c}$

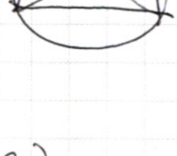
$\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos} = \frac{b}{a}$



$(6\sqrt{2})^2 + 9 = 9^2$

$36 \cdot 2 + 9 = 9^2$

9



$2x(x-3) + y(y-3)$

$a^2 + y^2 - 3a - 3y + 3 = \sqrt{\frac{ay}{2} - a - y + 2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

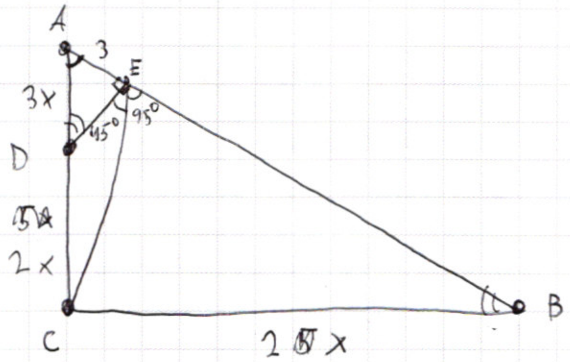
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

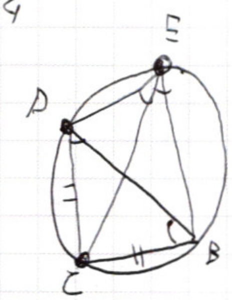
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4





$AD = 3x$, $DC = 2x$ $\}$ → по условию (т.к. $\frac{AD}{AD+DC} = \frac{3}{5}$)

а) $DEBC$ - вписанный т.к. $\angle DEB + \angle DCB = 90+90 = 180$

$\angle CEB = \angle DEB - \angle DEC = 90 - 45 = 45^0 = \angle DEC$

$\angle CDB = \angle CEB = 45^0$ (т.к. опираются на одну дугу)

$\angle CBD = \angle DEC = 45^0$ (т.к. опир. на одну дугу)

$\triangle DCB$ - равнобед. т.к. $\angle CDB = \angle CBD = 45^0 = CB = CD = \cancel{5}2x$

тогда $tg\,\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$ Ответ: $\frac{2}{5}$

б) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (т.к. $\angle A$ - общий и $\angle C = \angle DEA = 90^0$)

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{25x^2+4x^2} = \sqrt{29}\,x$

$\frac{3x}{\sqrt{29}\,x} = \frac{AE}{AC}$ → $AE = AC \cdot \frac{3}{\sqrt{29}} = 3$ (т.к. $AC = \sqrt{29}$)

$x = \frac{AC}{5} = \frac{\sqrt{29}}{5}$ → $AB = \frac{29}{5}$ → $EB = AB - AE = \frac{14}{5}$

$S_{ACB} = \frac{AC \cdot CB}{2} = 10x^2 = \frac{10 \cdot 29}{25} = \frac{2 \cdot 29}{5}$

$\frac{S_{AEC}}{S_{ACB}} = \frac{AE}{AB} = \frac{15}{29}$ (т.к. высота общая)

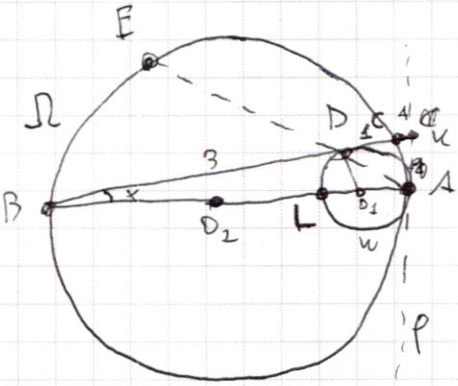
$S_{AEC} = \frac{15}{29} \cdot S_{ACB} = \frac{15}{29} \cdot \frac{2 \cdot 29}{5} = 6$

$\frac{S_{CED}}{S_{CEA}} = \frac{CD}{CA} = \frac{2}{5}$ (т.к. высота общая)

$S_{CED} = \frac{2}{5} \cdot S_{CEA} = \frac{2}{5} \cdot 6 = \frac{12}{5} = 2,4$

Ответ: 2,4

№5



A, O_1, O_2 – лежат на одной прямой (т.к. O_2A и O_1A – ⊥ касат. из точки A) ⇒ $O_1 \in$ к диаметру AB)

Пусть ℓ – общая касательная, $K - BC \cap \ell$. Пусть $CK = a$

Тогда $KC \cdot KB = KA^2$ (отрезок касат. KA и секущ. KB) отсюда $a(a+9) = (a+1)^2$ (т.к. $AK = KD = a+1$ – касат. из одной точки

$a^2 + 9a = a^2 + 2a + 1 \to a = 0,5$

Пусть BA $BA \perp \ell$ (касательная перп. рад.) ⇒

⇒ $\triangle BAK$ – прямоугольный

$BA^2 = BK^2 - KA^2 = (9+a)^2 - (1+a)^2 = (3) \cdot (5+2a) = 18$

$BA = \cancel{\sqrt{18}}\ 3\sqrt{2} = 2R$ (т.к. BA – диаметр) → $R = 1,5\sqrt{2}$

$BD^2 = BL \cdot BA$ R – радиус Ω r – радиус ω

$9 = (2R - 2r) \cdot 2R$ $9 = 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\,r$

$r = \frac{9}{6\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = 0,75\sqrt{2}$

Пусть $\angle ABC = x$ тогда $\angle BO_1D = 90 - x$ и $\angle DO_1A = 90 + x$

$\cos(90 + x) = -\sin(x)$ $\sin x = \frac{KA}{BK} = \frac{1,5}{4,5} = \frac{1}{3}$

$DA = 2r^2(1 - \cos(\angle DO_1A)) = 2\frac{9}{8}(1 + \frac{1}{3}) = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} = 3$ (по т. косинусов)

т.к. $ED \cdot DA = CD \cdot DB$ (пересек. хорд)

$ED = \frac{CD \cdot DB}{DA} = 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $\angle ADC = \varphi$ тогда:

$$S_{AEBC} = \frac{BD \cdot DA \cdot \sin(180-\varphi)}{2} + \frac{ED \cdot DC \cdot \sin(180-\varphi)}{2} + \frac{ED \cdot BD \cdot \sin(\varphi)}{2} + \frac{CD \cdot AD \cdot \sin\varphi}{2}$$

т.к. $\sin\varphi = \sin(180-\varphi)$ и $ED = DK = 1$, $BD = DA = 3$

$$S_{AEBC} = \frac{\sin\varphi}{2}(1+3)^2 = 8\sin\varphi$$

$$\frac{DA}{\sin x} = \frac{BA}{\sin(180-\varphi)}$$ (по т. синусов) $\sin x = \frac{KA}{BK} = \frac{1,5}{4,5} = \frac{1}{3}$

$$\frac{3}{\frac{1}{3}} = \frac{2R}{\sin\varphi} \rightarrow \sin\varphi = \frac{2R}{9} = \frac{3\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$S_{AEBC} = \frac{3\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $R = 3\sqrt{2}$, $r = 1,5\sqrt{2}$, $S = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

№3

$$\begin{cases} y - 2x + \cancel{2} = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

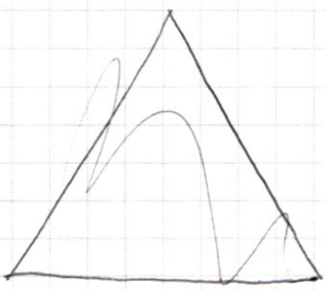
$$\begin{cases} (y-2) + (2-2x) = \sqrt{y(x-1) - 2(x-1)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 + 3 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2 \end{cases}$$

пусть $a = x - 1$ $\quad b = y - 2$

$$\begin{cases} b - 2a = \sqrt{ab} \\ 2a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

№2



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$p = a + y \qquad r = ay$

$p^2 - 2r - 3p + 3 = \sqrt{\frac{r}{2} - p + 2}$

$b - 2a = \sqrt{ab}$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 + 3 = 0$

$2x^2 - 6x + y^2 - 3y + 3 = y - 2x$

$2\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$4x^2 + y^2 + 2x + y - 2 - 5xy = 0$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$2x^2 + 6x + 5y - 5xy - 5 = 0$

$\cancel{6x^2 + 2y^2 - 2x - 3}$

$2x(x-3) + y(y-3)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)