МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 11 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

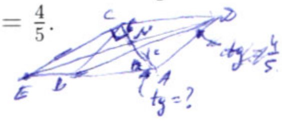
1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Больший корень уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = 17, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = -10. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

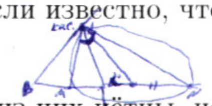
4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 6$, $AN = 12$, а $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{4}{5}$.



а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = 3\sqrt{3}$, $BM = \sqrt{6}$.



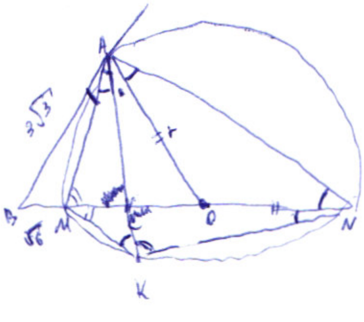
6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них чётны, но не делятся на 3, остальные же делятся на 3 и при этом нечётны. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно чётное и хотя бы одно кратное 3, можно 25 способами. Сколько было выписано чисел?

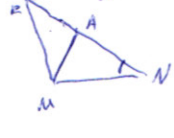
7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

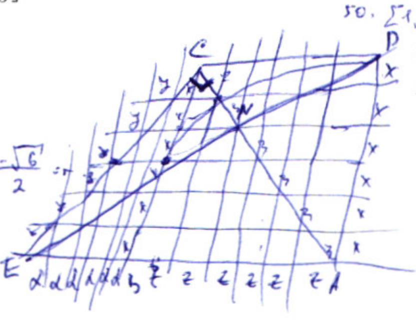
$$-\frac{10x+10}{5x+6} \leqslant ax + b \leqslant 5x + 2 + |10x + 6|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-1; -\frac{2}{5}\right]$.

BN ∥ CE ?







ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3) Пусть шестизначное число — $\overline{abcdef}$, $a>0$. Рассмотрим возможные степени 10, остатки от деления на которые могли суммироваться:

- Если было $\geq 10^6$, то $\overline{abcdef} \underset{10^6}{\equiv} \overline{abcdef} \geq a\cdot 10^5 > 10^5 > 12345$, значит 10^6 — не подх.
- Если иначе ~~макс. степень 10 меньше, чем~~ остаток от деления на 10^5 не использовался, то сумма остатков $S \leq (\overline{abcdef} \bmod 10^4) + (\overline{abcdef} \bmod 10^3) + (\overline{abcdef} \bmod 10^2) \leq (10^4-1)+(10^3-1)+(10^2-1) < 11100 < 12345$, — не подходит.
- Значит использовались 10^5; 10^4 и 10^3.

Тогда сумма остатков $S = 12345 = \overline{bcdef} + \overline{cdef} + \overline{def}$. Теперь будем определять цифры числа:

mod 10

x	2x	3x
0	0	0
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	2
5	0	5
6	2	8
7	4	1
8	6	4
9	8	7

табл. 3.1.

- $3f \underset{10}{\equiv} 5$ (сложение посл. разряда в столбик) $\Rightarrow$ по табл. 3.1. $f = 5$, и при сложении через разряд перешёл 1.
- $3e + 1 \underset{10}{\equiv} 4$ (сложение предпосл. разряда) $\Rightarrow e = 1$, переход через разряд нет.
- $3d \underset{10}{\equiv} 3$ (третий разряд справа) $\Rightarrow d=1$, перехода через разряд нет.
- $2c \underset{10}{\equiv} 2$ (четв. разряд справа) $\Rightarrow$ I $c=1$, пер. нет II $c=6$, переход есть.
- I $b \underset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow b = 1$; II $b+1 \underset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow b=0$.

Итого есть 2 варианта числа $\overline{abcdef}$: $\overline{06115}$ и $\overline{11115}$, можно сложить остатки и убедиться в подходящести. ~~От~~ a может быть любым не 0, значит всего вариантов $9\cdot 2 = 18$.

Ответ: 18.

№6) Пусть чисел x, таких, что $x \vdots 2$ и $x \not\vdots 3$ — a штук, а чисел y, таких что $y \vdots 3$ и $y \not\vdots 2$ — b штук. Тогда число способов выбрать подходящую тройку S это: $S = C_a^1 \cdot C_b^1 \cdot \frac{C^1_{a+b-2}}{2}$, где C_n^k — число сочетаний. S считается именно так, т.к. мы можем сначала выбрать 2 числа из обеих групп (числа различны), а потом выбрать какое-то одно оставшееся. При этом каждая тройка посчитается 2 раза потому что в ней будет 2 числа одной четности (и одно другой) и взятие каждого в C_a^1 или C_b^1 даёт свой вариант, ~~Тт~~ поэтому нужно домножить на $\frac{1}{2}$.

Тогда $25 = S = C_a^1 \cdot C_b^1 \cdot C_{a+b-2}^1 \cdot \frac{1}{2} \iff 50 = C_a^1 \cdot C_b^1 \cdot C_{a+b-2}^1 = a \cdot b \cdot (a+b-2)$. Понятно, что a и b – целые, а выражение симметрично, поэтому давайте перебирать варианты, считая что $a \geq b$, среди делителей 50 $\{1; 2; 5; 10; 25; 50\}$:

- $a = 50$, тогда $50 \leq 50 \cdot 1 \cdot (51-2)$ – не подходит.
- $a = 25$, тогда $50 \leq 25 \cdot 1 (26-2)$ – не подходит
- $a = 10$, тогда $50 \leq 10 \cdot 1 (11-2)$ – не подходит.
- Теперь переберём все пары (b, a), среди $a, b \in \{1; 2; 5\}$
- $(1,1) \Rightarrow 50 \neq 1 \cdot 1 \cdot 0$ · $(1,2) \Rightarrow 50 \neq 1 \cdot 2 \cdot 1$ · $(1,5) \Rightarrow 1 \cdot 5 \cdot 4 \neq 50$
- $(2,2) \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \neq 50$ · $(2,5) \Rightarrow 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$. · $(5,5) \Rightarrow 5 \cdot 5 \cdot 8 \neq 50$.

Видно, что подошло только $\{a, b\} = \{2, 5\}$. Значит всего чисел $a + b = 7$.

Ответ: 7.

№ 5)

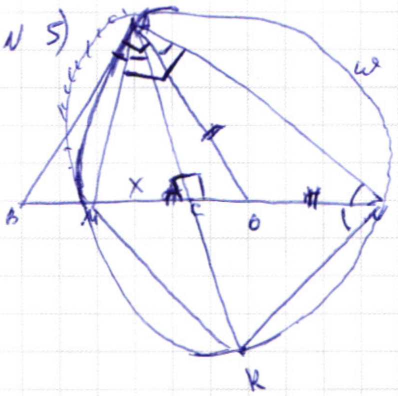


рис 5.1

Построим чертеж, как на рис 5.1. (извиняюсь за не ровную окружность). По свойству бис. внут и внешних углов – ~~угол~~ $\angle MAN = 90°$ (сумма половин от углов, дающих вместе $180°$). Тогда $\triangle AMN$ – прямоугольный, а значит центр O описанной окр. ω лежит на MN и $MO = ON = r$. Тогда и $AO = r$, т.к. лежит на ω. Раз BA – кас. к ω, то степень точки B отн. ω по модулю равна: $BA^2 = BM \cdot BN \Rightarrow BN = \frac{BA^2}{BM} = \frac{27}{\sqrt{6}}$; Тогда $r = OM = \frac{BN - BM}{2} = \frac{27}{2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{27 - \sqrt{36}}{\sqrt{24}} = \frac{21}{2\sqrt{6}}$. ~~Сделаем~~ Посчитаем немного углы: $\angle ANM = \angle BAM$ – т.к. касат; $\angle OAN = \angle ANO$ т.к. $\triangle AON$ – равнобедр.; $\angle MNK = \angle MAK$ и – как впис. Окр. ω симметрична отн MN – т.к. это диаметр, а точки A и K тоже сим. отн. этой прямой, т.к. обе на ω и $\angle ANM = \angle MNK$. $\Rightarrow AK \perp MN \Rightarrow \angle BCA = 90°$, также из симметрии $AC = CK$. Теперь смотрим на прямоугольные треугольники:

~~$\triangle OCA$: $OA^2 = OC^2 + AC^2$; $\triangle BAO$: $BO^2 = BA^2 + AO^2 \Rightarrow OC^2 = BO^2 - BA^2 - AC^2$.~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Пусть~~ $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + CB^2$; $\triangle ACO$: $AC^2 + CO^2 = AO^2$. Тогда: $AB^2 = AO^2 - CO^2 + CB^2$

Пусть $MC = x$. тогда: $AB^2 = AO^2 - (r-x)^2 + (MB+x)^2 = r^2 - (r^2 - 2rx + x^2) +$

$+(MB^2 + 2MBx + x^2) = 2rx + MB^2 + 2MBx \Rightarrow x(2r + 2MB) = AB^2 - MB^2 \Rightarrow$

$x = \frac{AB^2 - MB^2}{2r + 2MB} = \frac{27-6}{\frac{21}{\sqrt6} + 2\sqrt6} = \frac{21}{\frac{21+12}{\sqrt6}} = \frac{21\sqrt6}{33}$. Тогда $AC^2 = r^2 - (r-x)^2 = r^2 - (r^2 - 2rx + x^2)$

$= 2rx - x^2 = \frac{21\sqrt6}{33} \cdot 2 \cdot \frac{21}{2\sqrt6} - \frac{21^2 \cdot 6}{33^2} = \frac{21^2}{33} - \frac{21^2 \cdot 6}{33^2} = \frac{21^2}{33^2}(33-6) = \frac{21^2}{33^2} \cdot 27$. Мы уже знаем, что $\angle BCA = 90°$, а $\triangle AMN = \triangle KMN$ из сим. значит $S_{ANKM} = MN \cdot AC =$

$= \frac{21}{\sqrt6} \cdot \frac{21}{33} \cdot 3\sqrt3 = \frac{21^2}{11\sqrt2}$

Ответ: $\frac{21}{2\sqrt6}$; $90°$; $\frac{21^2}{11\sqrt2}$.

№1) Решаем квадр. уравнение $x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$. Понятно, что $\frac{\sqrt{b^2-ac}}{a} > 0$, значит больший корень это $x = \frac{b}{a} + \frac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$. Пусть разность а.п. это d, тогда: $b = a+d$, $c = a+2d$. Подставляем: $x = \frac{a+d}{a} + \frac{\sqrt{a^2+2ad+d^2-a^2-2ad}}{a} = \frac{a+d}{a} + \frac{|d|}{a}$. Мы знаем, что $a > c = a+2d \Rightarrow d < 0$, а значит $|d| = -d$, и следовательно $x = \frac{a+d}{a} - \frac{d}{a} = \frac{a}{a} = 1$. А это очень странно, ведь $x = c+d < c < 0$, но $1 \not< 0$, значит такого не бывает.

Ответ: такого не бывает.

№2) Вычтем из первого равенства второе и получим $x - y = 27$. Тогда $x = 27+y$ и его можно подставить во второе: $y - \sqrt[3]{y^2 - (27+y)^2} = -10$;

$y + 10 = \sqrt[3]{y^2 - 27^2 - 27 \cdot 2y - y^2}$. Теперь можно возвести обе стороны в куб и не потерять решений и не получить новых, т.к. степень нечётная: $y^3 + 30y^2 + 300y + 1000 = -27^2 - 27 \cdot 2y$; $(27^2 = 729)$ $y^3 + 30y^2 + 354y + 1729 = 0$. Заметим, что $y = -13$ — корень, и преобразуем: $(y^3 + 30y^2 + 354y + 1729) = (y+13)(y^2 + 17y + 133) = 0$. Решаем, когда вторая скобка равна 0: $y_{12} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 532}}{2}$, значит у второй скобки нет действительных корней. Значит только первая скобка бывает 0, при $y = -13$, му а тогда $x=14$. Пару $(14;-13)$ можно подставить и убедиться, что она подходит, а других нет.

Ответ: $(14;-13)$.

№7) Преобразуем левую часть в $\frac{10x+10}{5x+6}=-2+\frac{2}{5x+6}$. А правую раскроем по определению $\begin{cases}15x+8, \text{ при } x>-\frac{3}{5}\\ -1, \text{ при } x=-\frac{3}{5}\\ -5x-4, \text{ при } x<-\frac{3}{5}\end{cases}$. Построим их в одной системе координат, как на рис. 7.1. Графики построены по точкам и видно, что при $x=-1$: $0\le ax+b\le 1$, при $x=-\frac{3}{5}$: $-\frac{4}{3}\le ax+b\le -1$, а при $x=-\frac{2}{5}$: $-\frac{3}{2}\le ax+b\le 2$

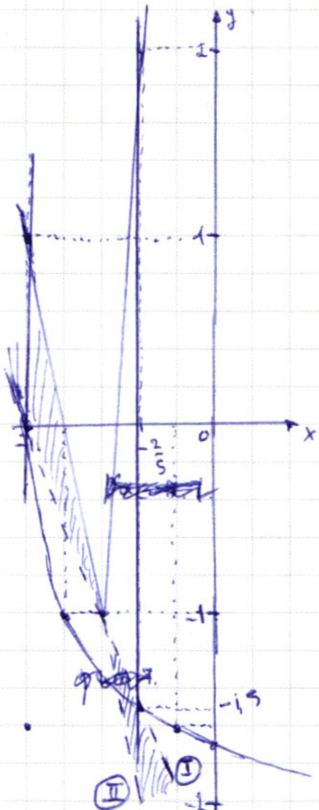
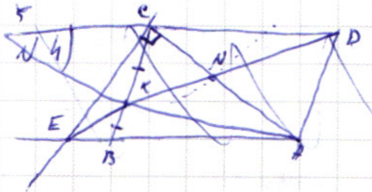


рис 7.1.

Также очевидно, что если $a>0$, то в точке $x=-\frac{2}{5}$ прямая $ax+b$ должна быть не выше -1, а значит при $x=-1$ будет $ax+b<-1$ и точно не попадёт в диапазон $[0;1]$. Если же $a<0$, то прямая $ax+b$ должна лежать между двух пунктиров (включая их), т.к. (I) показывает наибольший коэф. a (и наим. b), а (II) показывает наим. коэф a. и наиб. b. Ну а область, ограничиваемая пунктирами в точке $x=-\frac{2}{5}$ имеет только одну точку $y=-1,5$ удовлетворяющую неравенству с гиперболой. Значит прямая $ax+b$ проходит через точку $(-\frac{2}{5};-\frac{3}{2})$. А при $x=-\frac{3}{5}$ пунктиры оставляют лишь $y=-1$, значит точка $(-\frac{3}{5};-1)$ тоже на прямой. Через эти две точки можно провести только прямую $-2,5x-2,5=ax+b$, значит $a=-2,5$ и $b=-2,5$.

Ответ: $(-2,5;-2,5)$.

№4)



~~Пр.~~ Продлим $XC=CD$. Тогда X — середина AY, значит $BX=XC$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

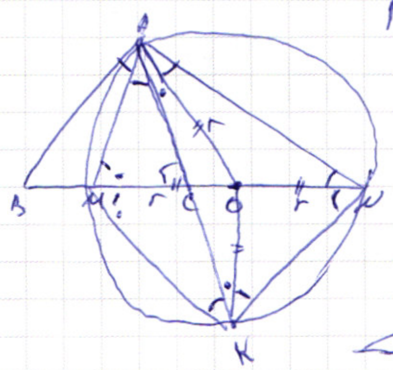
☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

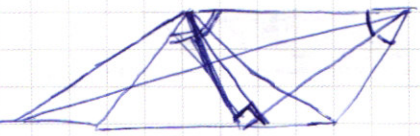
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



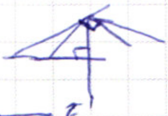
$POW(B,\omega): BA^2 = BM \cdot BN.$

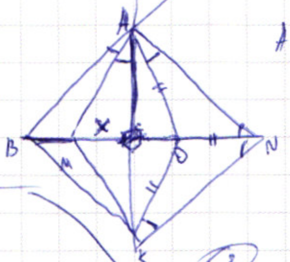
$27 = \sqrt{6} \cdot BN;\ BN = \frac{27}{\sqrt{6}} = 9\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$r = \frac{9\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \sqrt{6}}{2} = \frac{\frac{27}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}}{2} = \frac{27}{2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{27-18}{2\sqrt{6}} = \frac{9}{2\sqrt{6}}$



$\angle ACB.$





$AC^2 = AB^2 - BC^2.\quad \triangle ABC$

$AC^2 + CO^2 = AO^2$

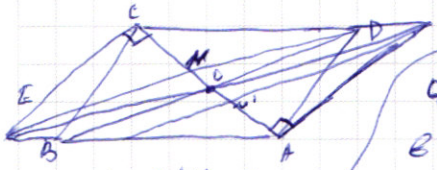
$AB^2 + CO^2 - BC^2 = r^2$

$(r-x)^2 + (MB+x)^2 = r^2 - AB^2.$

$r^2 - 2rx + x^2 - MB^2 - 2MBx - x^2 = r^2 - AB^2$

$-MB^2 + AB^2 = x(2MB + 2r)$

$-6 + 27 = x\left(3\sqrt{2} + \frac{9}{\sqrt{6}}\right)\quad x = \ldots$



$CN : AN = 6 : 12$

$tg(\angle DBA) = \frac{4}{5}$

$a, b, c.$

$b = \frac{a+c}{2};$

$d = b + c - b = 2c - b.$

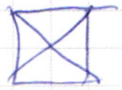
$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$

$a = a$

$b = a + d$

$c = a + 2d$

$x_2 = a + 3d.$



$a + 3d = \frac{a+d}{a} +$

$+ \frac{\sqrt{a^2 + 2ad + d^2 - a^2 - 2ad}}{a} = \frac{a+d}{a} + \frac{|d|}{a} = 1 + \frac{d}{a} + \frac{|d|}{a}$

$a^2 + 3ad = a + d + |d|$

$a^2 + 3ad - a = 0.$ $a = 0$; $a + 3d = 1 \Rightarrow d = \frac{1-a}{3}$

$a + 3d = 1$???

$\frac{10x + 10}{5x + 6} = \frac{-10x + 10}{\ldots}$ $\quad -10x + 12 \quad | \; 5x+6,\ -2$

$-2 + \frac{2}{5x+6}$

$x \neq -\frac{6}{10}.$

$a + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a \geq 0$

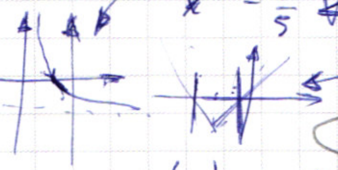
$x \quad -\frac{c}{5} \quad -\frac{2}{5}$

$15x + 8 \quad (x > -\tfrac{2}{10})$

$5x + 2 \quad (x = -\tfrac{6}{10})\ -3+2.$

$-5x - 4. \quad (x < -\tfrac{6}{10})$

$ax + b \leq$ в 3 точках



$-a + b \leq 1$

$-\frac{6}{10}:\ -\frac{6}{10}a + b \leq -1.$

$-\frac{2}{5}:\ -\frac{2}{5}a + b \leq 2$

$\begin{cases} b \leq 1 + a. \\ b \leq -1 + \frac{6}{10}a \\ b \leq 2 + \frac{2}{5}a \end{cases}$

$f(-1):\ 0$

$f(-\tfrac{2}{5}):\ -2 + \frac{2}{4} = -\frac{3}{2}$

$\frac{4-10}{-2+6} = \frac{-6}{4}$

$-\frac{6}{10} \quad -1$

$-2 + \frac{2}{-3+c} = -2 + \ldots$

$1729 \,|\, 7$: -14, 32, -28, 49; 247

$t = \sqrt[3]{y^2 - x^2}$

$x - t = 17$

$y + t = -10.$

$x - y = 27$

$x = 27 + y.$

$y - \sqrt[3]{y^2 - 27^2 - 2\cdot 27y - y^2} = -10.$

$y^3 + 30y^2 + 300y + 1000 = -27^2 - 54y$

$y^3 + 30y^2 + 354y + 1729 = 0$

$2478 + 343 = 2821$; $\quad 1729 + 1470 = 3199$; $\quad 49 \cdot 7 = 343$

$354 \cdot 7 = 2478$; $\quad 1729 \,|\, 11$: 11, 62, 55, 79

$-343 + 1470 - 2478 + 1729 =$

$-2197 + 5070 - 4602 + 1729.$

$1729 + 5070 = 6799$; $\quad 2197 + 4602 = 6799$

$169 \cdot 13 = 507 + 169 = 2197$; $\quad 16 \cdot 32$

$354 \cdot 13 = 1062 + 354 = 4602$

$1729 \,|\, 13$: 13, 42, 39, 39; 133

$y^3 + 30y^2 + 354y + 1729 \,|\, y + 13$

$-\,y^3 + 13y^2 \qquad y^2 + 17y + 133$

$17y^2 + 354y$

$-\,17y^2 + 221y$

$133y + 1729$

$y^2 + 13y^2$

$17y^2 + 354y + 1729$

$17y + 133$

$43 \cdot 13 = 129 + 43 = 559$; $\quad 559 + 354 = 913$

$17 \cdot 13 = 51 + 17 = 221$

$354 - 221 = 133$

$433 \cdot 4 = 532$

$17 \cdot 17 = 119 + 17$; $\quad 285$

$196 - 169 = 27$