МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$ax^2-2bx+c=0$

a, b, c – первые 3 члена, тогда пусть d – 4ый член геом. прогрессии.

Пусть q - ход геометрической прогрессии, $q \neq 0$.

Тогда: $b = a\cdot q$

$c = b\cdot q = a\cdot q^2$

$d = c\cdot q = a\cdot q^3$

$ax^2-2bx+c=0$

$D = 4b^2-4ac = 4(b^2-ac) = 4((q\cdot a)^2 - a\cdot(a\cdot q^2)) = 0$

$x_{1,2} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = \frac{q\cdot a}{a} = q$

Корень уравнения $=q$, следовательно $d=q$

$d = a\cdot q^3 = q$

$(a\cdot q^2)q = q$

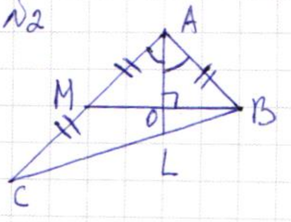
$cq = q$

$q(c-1)=0$

$q=0$ $\quad \underline{c=1}$ $\quad$ т.к. $q\neq 0$ то $c=1$

Ответ: $c=1$

№2



Пусть: $\triangle ABC$, AL - бис, BM - мед., $AL \perp BM$, $AL \cap BM = O$

Тогда:

в $\triangle AMB$: $\angle MAO = \angle OAB$, т.к. AO - бис,
$\angle AOM = \angle AOB = 90°$, т.к. $AL \perp BM$
AO - общая $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AMO = \triangle AOB \Rightarrow AM = AB \Rightarrow AB = \frac{1}{2}AC$

Получается, что в треугольнике, удовлетворяющем условие, одна из сторон равна половине другой.

Пусть меньшая сторона x, тогда другая сторона $=2x$, а третья $=y$.

Правило треугольника: каждая из сторон меньше суммы двух других.

Получаем систему:

$\begin{cases} x+2x+y=900 \\ x<2x+y \\ 2x<x+y \\ y<x+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=900 \\ -x<y \text{ - всегда} \\ x<y \\ y<3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=900 \\ x<y<3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=900-3x \\ x<900-3x<3x \end{cases}$

$x < 900 - 3x < 3x$

$4x < 900 < 6x$

$150 < x < 225 \Rightarrow x \in [151; 224]$

Каждому из этих чисел отрезка x может равняться. Значит разных треугольников столько, сколько целых чисел в отрезке [151; 224]

А их: $225 - 151 = 74$

Ответ: 74 треугольника.

№3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

1) О.О. $x - 6y \geq 0$

$xy - 6y - x + 6 \geq 0$

2) $x(y-1) - 6(y-1) = (x-6)(y-1)$

$(x^2 - 12x + 36) + 2(y^2 - 2y + 1) - 18 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

3) Пусть $x - 6 = a \Rightarrow x = a + 6 \Rightarrow x - 6y = a - 6b$

$y - 1 = b \Rightarrow 6y = 6b + 6$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a \geq 6b, \ ab \geq 0 \\ a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \end{cases}$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$

$a_{1,2} = \dfrac{13b \pm 5b}{2} = \left[\begin{array}{l} 9b \\ 4b \end{array} \right.$

$\begin{cases} a = 9b \\ a = 4b \\ a \geq 6b \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 9b, \text{ при } b > 0 \\ a = 4b, \text{ при } b < 0 \end{array}$

$b \geq 0$

$(9b)^2 + 2b^2 - 18 = 0$

$83b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{18}{83}}, \ b > 0$

$\underline{a = 9b = 9\left(\pm\sqrt{\frac{18}{83}}\right)}, \ \underline{b = \sqrt{\frac{18}{83}}}$

$\begin{cases} x - 6 = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y - 1 = \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$

$\begin{cases} x = 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \\ y = \sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \end{cases}$

$b < 0$

$16b^2 + 2b^2 - 18 = 0$

$18b^2 = 18$

$b^2 = 1$

$\begin{cases} b = \pm 1 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{b = -1}$

$\underline{a = 4b = -4}$

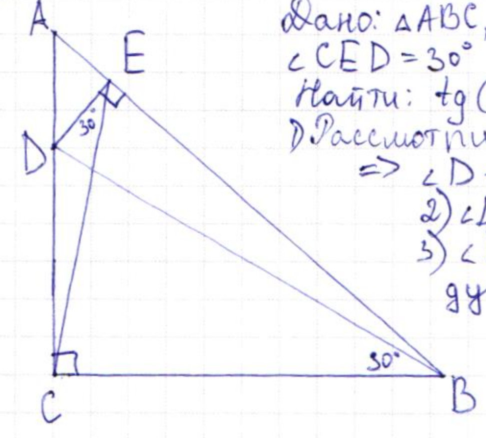
$\begin{cases} x - 6 = -4 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \geq 6y \\ (x-6)(y-1) \geq 0 \\ (2;0) \\ \left(9\sqrt{\frac{18}{83}}+6;\ \sqrt{\frac{18}{83}}+1\right) \end{cases} \Rightarrow (2;0)\ \left(27\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ 3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$$

Ответ: $(2;0)$; $\left(27\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ 3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$

№4а



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $D \in AC$, $E \in AB$, $AD:AC = 1:3$, $DE \perp AB$, $\angle CED = 30°$

Найти: $tg(\widehat{BAC})$ - ?

1) Рассмотрим $CDEB$: $\angle C = 90°$, $\angle E = 90° \Rightarrow \angle C + \angle E = 180°$ $\Rightarrow \angle D + \angle B = 360 - 180 = 180°$

2) $\angle D + \angle B = 180$, $\angle E + \angle C = 180 \Rightarrow CDEB$ - можно описать

3) $\angle DEC$ - впис, $\angle DBC$ - впис - опираются на дугу $DC \Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30°$

4) $AD = x \Rightarrow AC = 3x \Rightarrow DC = 2x$

5) $\triangle DCB$: $\angle B = 30°$, $DC = 2x \Rightarrow DB = 4x$

6) По т. Пифагора:

$CB = \sqrt{DB^2 - DC^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = x\sqrt{12}$

7) $AC = 3x$, $CB = 2\sqrt{3}x \Rightarrow tg(\widehat{BAC}) = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

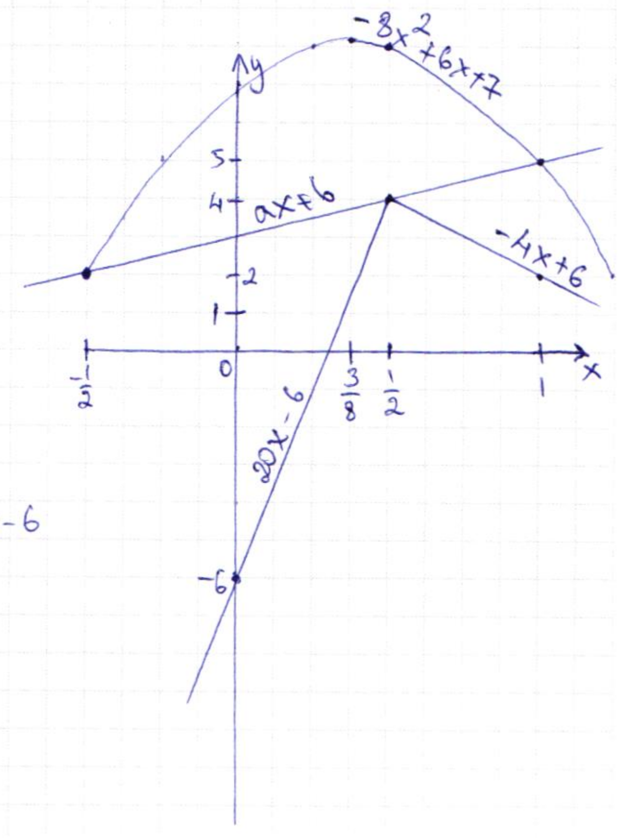
Ответ: $tg(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

№6

$8x - 6|2x-1| \leq ax + 6 \leq -8x^2 + 6x + 7$

Заметим: $ax+6$ - график прямой

Построим графики:



1) $8x - 6|2x-1| = y$

1) $x \geq \frac{1}{2}$

$y = 8x - 12x + 6 = -4x + 6$

x	$\frac{1}{2}$	1
y	4	2

2) $x \leq \frac{1}{2}$

$y = 8x + 12x - 6 = 20x - 6$

x	$\frac{1}{2}$	0
y	4	-6

2) $y = -8x^2 + 6x + 7$

$x_0 = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$ $y(x_0) = 8\frac{1}{8}$

$y(1) = 5$

$y(-\frac{1}{2}) = 2$

$y(\frac{1}{2}) = 8$

$ax+b$ - прямая, где b - точка пересечения оси y, a - коэффициент наклона.
Чтобы выполнялось неравенство, нужно чтобы график этой прямой всегда был не ниже, чем график выражения с модулем и не выше, чем график параболы на отрезке $[-\frac{1}{2};1]$. На графике видно, что существует лишь одна прямая, подходящая под условие. При любых действиях с этой прямой, она перестает удовлетворять условию.
Прямая пересекает графики в точках: $(-\frac{1}{2};2)$; $(\frac{1}{2};4)$; $(1;5)$

Подставим 2 и 3 точки:

$$\begin{cases} 4 = \frac{a}{2}+b \\ 5 = a+b \end{cases}$$

$$1 = \frac{a}{2}$$

$$2 = a$$

$$4 = \frac{2}{2}+b \Rightarrow b=3 \rightarrow a=2;\ b=3 \quad 2x+3 \text{ - график прямой}$$

Ответ: $(2;3)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

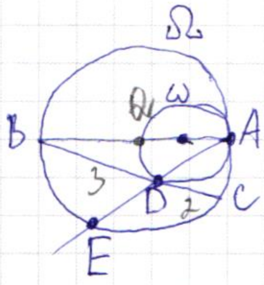
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

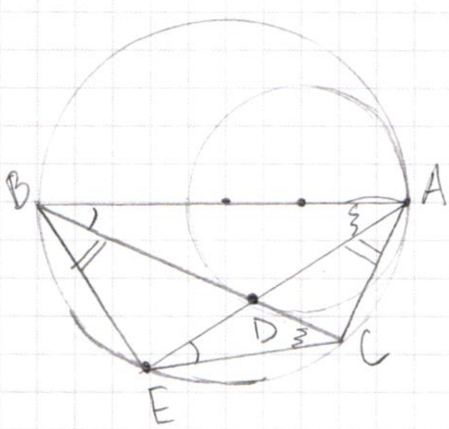
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R_\Omega - ?$ $r_\omega - ?$ $S_{BACE} - ?$, $CD = 2$, $BD = 3$





$AB = 2R$

$BQ = 2R - 2r$

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$BQ \cdot QA = BD^2$

$(2R - 2r)2r = 9$

$4(R - r)r = 9$

$Rr - r^2 = \frac{9}{4} = 2,25$

$(a;b)$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7 \iff \begin{cases} 8x - 6|2x-1| \le ax+b \\ ax + b \le -8x^2 + 6x + 7 \end{cases}$

$-1: -8 - 6 + 7$

$0: 7$

$2: -8 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 7 = -13$

$-8x^2 + 6x + 7 = 0$

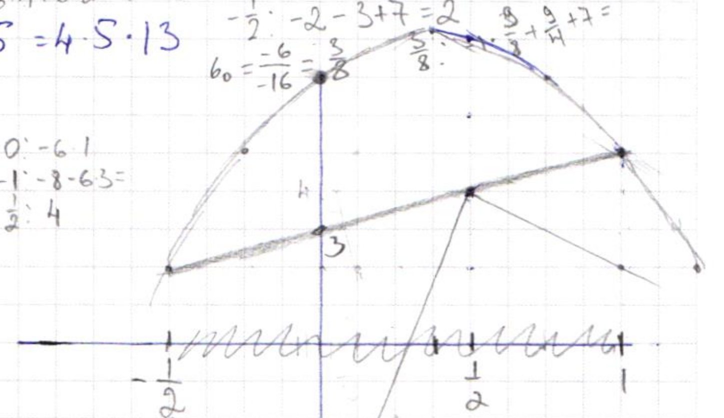
$D = 36 + 4 \cdot 8 \cdot 7 = 4(9 + 8 \cdot 7) = 4 \cdot \cancel{65}\,56 = 4 \cdot 5 \cdot 13$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{65}}{-16}$

$-\frac{1}{2}: -2 - 3 + 7 = 2$

$\frac{3}{8}: -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7 =$

$b_0 = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$



$8x - 6|2x-1|$

$1: 8 - 6 = 2$ $= -2$

$2: 16 - 6 \cdot 3 = -2$

$3: 24 - 6 \cdot 5 = -6$

$4 - 6(2)$

$0: -6 \cdot 1$

$-1: -8 - 6 \cdot 3 =$

$\frac{1}{2}: 4$

1) $x \ge \frac{1}{2} \to 8x - 12x + 6 = -4x + 6$

$x \le \frac{1}{2} \to 8x + 12x - 6 = 20x - 6$

$ax + b$:

при $x = -\frac{1}{2}$ $16 \le ax + b \le 2$

$x = \frac{1}{2}$ $ax + b \ge 4$

$x = 1$ $2 \le ax + b \le 5$

$-2 + 3 + 7$

$\begin{cases} 16 \le -\frac{a}{2} + b \le 2 \\ 4 \le \frac{a}{2} + b \le 4 \\ 2 \le a + b \le 5 \end{cases}$

$b = 3$

$a = 2$

$(2;3)$

$4 = \frac{a}{2} + b$

$5 = a + b$

$\frac{a}{2} =$

$2 \le -\frac{a}{2} + b \le 2$ (1)

$4 \le \frac{a}{2} + b \le 8$ (2)

$2 \le a + b \le 5$ (3)

$4 - \cancel{16} \le 2b \le 10$

$-6 \le b \le 5$

$2(1) + (3)$: $3b \le 9$

$\boxed{b \le 3}$

$2(2) - (3)$

$6 \le 2b$

$b \le 6$

$\frac{a}{2} + b \le 2$

$-a + b \le 5$

$\frac{3}{2}a \le 3$

$\frac{1}{2}a \le 1$

$a \le 2$

$4 \le \frac{a}{2} + b$

$2 \le a + b$

$-2 \le \frac{a}{2}$ $-4 \le a$

$-\frac{8 \cdot 3 \cdot 3}{8 \cdot 8} + \frac{6 \cdot 3}{8} + 7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c , q - шаг

$b = qa$, $c = qb \Rightarrow q^2 a$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$

$x_{1,2} = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a} = \frac{qa \pm \sqrt{q^2a^2 - q^2a^2}}{a} = q$

a, b, c, d

$d = q^3 a = q$

$q^3 a = q$

$cq = q$

$cq - q = 0$

$q(c-1) = 0$

$q = 0$ $\boxed{c = 1}$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x^2 - 12x + 36) + 2(y^2 - 2y + 1) - 18 = 0$

$t = x - 6$ $x = t + 6$

$z = y - 1$ $6y = 6z + 6$ $x - 6y = t - 6z$

$\begin{cases} t - 6z = \sqrt{tz} \\ t^2 + 2z^2 - 18 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} tz \geq 0 \\ t \geq 6z \\ t^2 - 13tz + 36z = 0 \end{cases}$

$D = (5z)^2$

$t_{1,2} = \frac{13z \pm 5z}{2} \left[\begin{array}{l} 9z \\ 4z \end{array} \right.$

$9z - 6z = \sqrt{9z^2}$

$3z = 3z$

$81z^2 + 2z^2 - 18 = 0$

$\begin{cases} t = 9z \\ t = 4z \\ t \geq 6z \end{cases} \rightarrow t = 9z$

$P = 900$, $a, b, c \in Z$, бис $\perp$ мед $83z^2 = 18$

$z = \sqrt{\frac{18}{83}} = 3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$x - 6 = 9y - 9$

$x = 3(3y - 1)$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$D = 144 - 4(2y^2 - 4y + 20) =$

$= 144 - 8y^2 + 16y - 80 = 64 - 8y^2 + 16y$

$= 8(-y^2 + 2y + 8) = 8 \cdot (y+2)(y-4)$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

о.о. $\begin{cases} x - 6y \geq 0 \\ xy - 6y - x + 6 \geq 0 \end{cases}$ $x \geq 6y$

$x(y-1) - 6(y-1) \geq 0$

$(x-6)(y-1) \geq 0 \Longleftrightarrow \left\{ \cancel{x - 6 \leq 0} \right. \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 1 \\ \begin{cases} x - 6 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 6 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

$x = 9 \cdot 3\sqrt{\frac{2}{83}}$

10

$\frac{13}{9} \cdot 6^2 = 4$

$a > 6b$ 3.

$x - 6 \geq 6y - 6$

$x \geq 6y$

$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$

$y_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{-2} \left[\begin{array}{l} -2 \\ 4 \end{array} \right.$

$x_{1,2} = 12 \pm \sqrt{-8(y+2)(y-4)}$ ≥ 0

-2 4

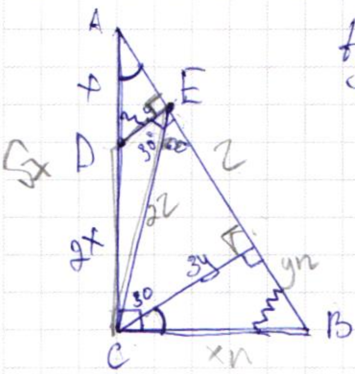
$y \in [-2; 4]$

☑ черновик ☐ чистовик

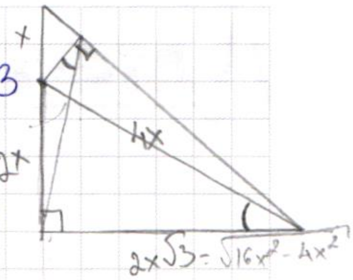
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$tg\,BAC - ?$, $\angle CED = 30°$ $\qquad \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ $\quad DE \perp AB$

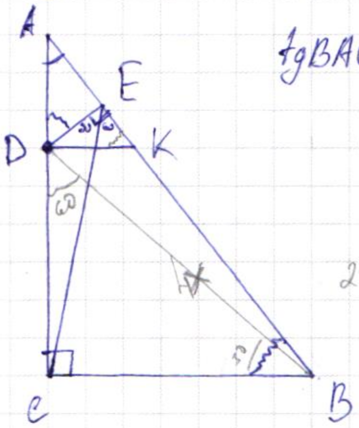


$\triangle AED \sim \triangle ACB$

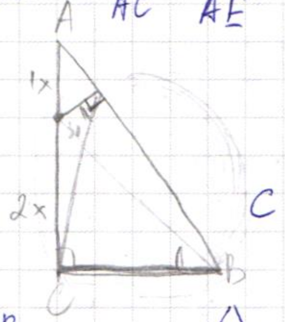
$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{3x} = \frac{x}{AB}$ $\qquad AE \cdot AB = 3x^2$

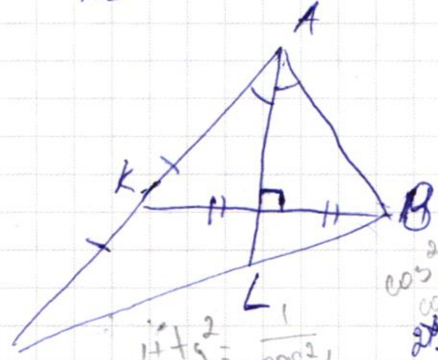
$x^2 n^2 = 9y^2 + y^2 n^2$

$\boxed{tg A = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}}$



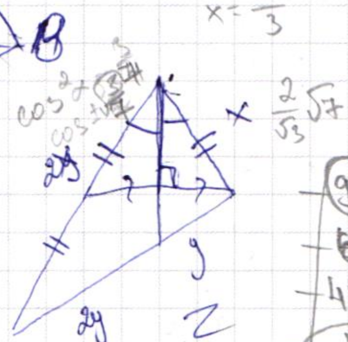
$tg BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$

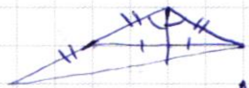


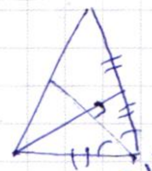


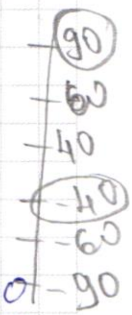
$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$1 + tg^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$









$$\begin{cases} x + y = 300 \to y = 300 - x \\ x < 3y < 3x \end{cases}$$

$x < 900 - 3x < 3x$

$4x < 900 \leq 6x$

$2x < 450 \leq 3x$

$x < 225 \qquad x > 150$

$x \in [151; 224]$

$225 - 151 = 49 + 25 = 74$

$900 \mid 4$, 225

$900 \mid 6$, 150

$$\begin{cases} x + 2x + z = 900 \\ x < 2x + z \text{ всегда} \\ 2x < x + z \\ z < 2x + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + z = 900 \\ x < z \\ z < 3x \end{cases}$$

$x + z < z + 3x$

$0 < 2x$

$$\begin{cases} x < z < 3x \\ 3x + z = 900 \end{cases}$$

$3x : 3 \to z : 3 \quad 900 : 3$

$z = 900 - 3x$

$z = 3(300 - x) \; \vdots \; 3$

$z = 3y, \; y \in Z$

$3x + 3y = 900$

$$\begin{cases} x + y = 300, \; x, y \in Z \\ x < 3y < 3x \end{cases}$$

$\frac{x}{3} < 3y < 3x$

$y < x$

$$\begin{cases} 3x + y = 900 \\ x < y < 3x \end{cases}$$

$x \leq 900 - 3x \leq 3x$

$4x \leq 900 \leq 6x$

$x \leq 225$

$x \geq 150$

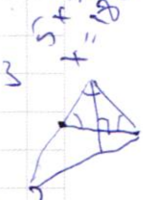
$7x = 900$

x, $2x$, $4x$

$2x + 2x$

$5x = 900$

$x = 180$



$x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$

$x^2 - 12x + 2(y^2 - 2y + 10) = 0$

$(x^2 - 2 \cdot 6x + 36) + 2y^2 - 2 \cdot y \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} + 2$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

$(\sqrt{2}y - \sqrt{2})^2$

$t = x - 6$

$z = y - 1 \qquad y = z + 1 \qquad 6y = 6z + 6$

$x = t + 6$

$x - 6y = t + 6 - 6z - 6 = t - 6z$

$$\begin{cases} t^2 + 2z^2 - 18 = 0 \\ t - 6z = \sqrt{tz} \end{cases}$$

$t^2 - 12tz + 36z^2 = tz$

$t^2 + 2z^2 - 18 = 0$

$t^2 - 13tz + 36z^2 = 0$

$D = z^2(169 - 4 \cdot 36) = (5z)^2$

$t_{1,2} = \frac{13z \pm 5z}{2} \Bigg[\begin{array}{l} 9z \\ 4z \end{array}$

$36 \cdot 4 = 144$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА