МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть члены $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

тогда $x_1 = a = a$

$x_2 = b = aq$

$x_3 = c = aq^2$

$x_4 = aq^3$ – найти

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$k_1 k_2$ – корни

$k_1 k_2 = \frac{c}{a} = \frac{aq^2}{a} = q^2$

$k_1 + k_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2(aq)}{a} = 2q$

$k_1 k_2 = q^2$
$k_1 + k_2 = 2q \Rightarrow k_1 = k_2 = q$

$q = q^3 a \Rightarrow q^2 a = 1$

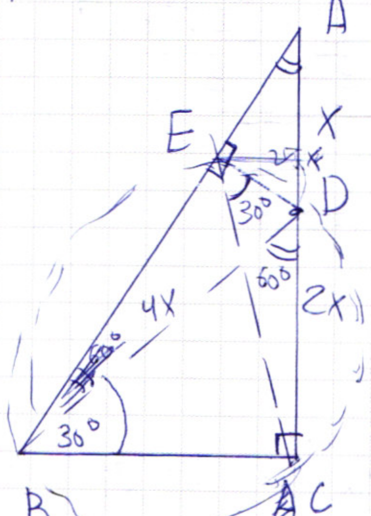
$q^2 = \frac{1}{a}$

$x_4 = q = \frac{1}{\sqrt{a}}$

$c = aq^2 = \frac{a \cdot 1}{(\sqrt{a})^2} = 1$ (третий член)

Ответ: $c = 1$

4.



$\angle DEB = 90^\circ$; $AD = x$; $AC = 3x$
$\angle DCB = 90^\circ$ (по условию)

тогда $BEDC$ – вписанный $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$ (на одну дугу) тогда $BD = 4x$ (гип в Δ с углом 30°)

$\Delta AEC \sim \Delta ADB$ (по 2м углам)

$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EC} = \cancel{\frac{AB}{AC}} \Leftrightarrow \frac{x}{AE} = \frac{4x}{EC} = \frac{AB}{3x}$

$\Delta AED \sim \Delta ABC$ по 2м углам

$\cancel{\frac{x}{AB} = \frac{AE}{3x}}$ $\angle DBC = 30^\circ$ (из вписанности)

тогда $BC = BD\cos 30^\circ = BD\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4x\sqrt{3}}{2}$

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4x\sqrt{3}}{2(3x)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

~~б) $AC = \sqrt{7}$ опустим высоту EX на AC, тогда $XD = a$~~

~~$AX = x - a = \frac{\sqrt{7}}{3} - a$; $EX/AX = tg\angle BAC$~~

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$EX = tg\angle BAC \cdot AX = \left(\frac{\sqrt{7}}{3} - a\right) tg\angle BAC$

$S = \frac{EX \cdot XC}{2}$; $S = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{7}}{3} - a\right)\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{7} + a\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\left(\frac{2\sqrt{21}}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}\sqrt{7} + a\right)\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{9}a -$

б) $AC = \sqrt{7}$; $\angle BAC = \alpha$ $\quad AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$;

$AE = AD \cos\angle BAC = AD \cos\alpha$

$ED = AD \sin\alpha$

$\angle AEC = 120^\circ$

$AC^2 = AE^2 + EC^2 - (2\cos 120^\circ) AE \cdot EC$

$AC^2 = AE^2 + EC^2 + AE \cdot EC$

$7 = \frac{7}{9}\cos^2\alpha + \frac{7}{9}\sin^2\alpha + \frac{7}{9}\sin\alpha\cos\alpha$

$7 = \frac{7}{9} + \frac{7}{9}\sin\alpha\cos\alpha$

$AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2\cos 120\, AE \cdot EC$

$7 = \frac{7}{9}\cos^2\alpha + EC^2 + 4\frac{\sqrt{7}}{3} \cdot EC \sin\alpha\cos\alpha$

По теореме косинусов

$EC^2 = AC^2 + AE^2 - 2\cos\alpha(AC \cdot AE)$

$EC = \sqrt{AC^2 + AE^2 - 2\cos\alpha\, AE \cdot AC}$

$S = \frac{EC \cdot ED \cdot \sin 30^\circ}{2}$

$S = \frac{\sqrt{66 - 6\sqrt{7}}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} \cdot \frac{1}{2}$

$S = \frac{\sqrt{66 - 6\sqrt{7}}}{\sqrt{21}} \cdot \frac{1}{2}$

$tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{12}{9}$

$9\sin^2\alpha = 12\cos^2\alpha \mid + 9\cos^2\alpha$

$9 = 21\cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{21}$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{21}}$

$AE = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$EC = \sqrt{7 + \frac{3}{9} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{3}\right)}$

$EC = \sqrt{7 + \frac{3}{9} - \frac{6\sqrt{7}}{9}}$

$EC = \sqrt{\frac{63 + 3 - 6\sqrt{7}}{9}}$

$EC = \frac{\sqrt{66 - 6\sqrt{7}}}{3}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{21}}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{12}{21}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$S = \sqrt{\frac{66 - 6\sqrt{7}}{21}} \cdot \frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. Найдем максимальное зн. правой части

$x_{max} = -\frac{6}{-(16)} = \frac{3}{8} < 1$ – входит в промежуток

$y_{max} = 7 + \frac{9}{8}$, значит ~~ax+~~ $ax+b < 7\frac{9}{8}$

$8x - 6|2x-1|$ при $x \geq \frac{1}{2}$: $8x - 12x + 6 = 6 - 4x$

$x < \frac{1}{2}$: $8x - 6(1-2x) = 20x - 6$

$x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$:

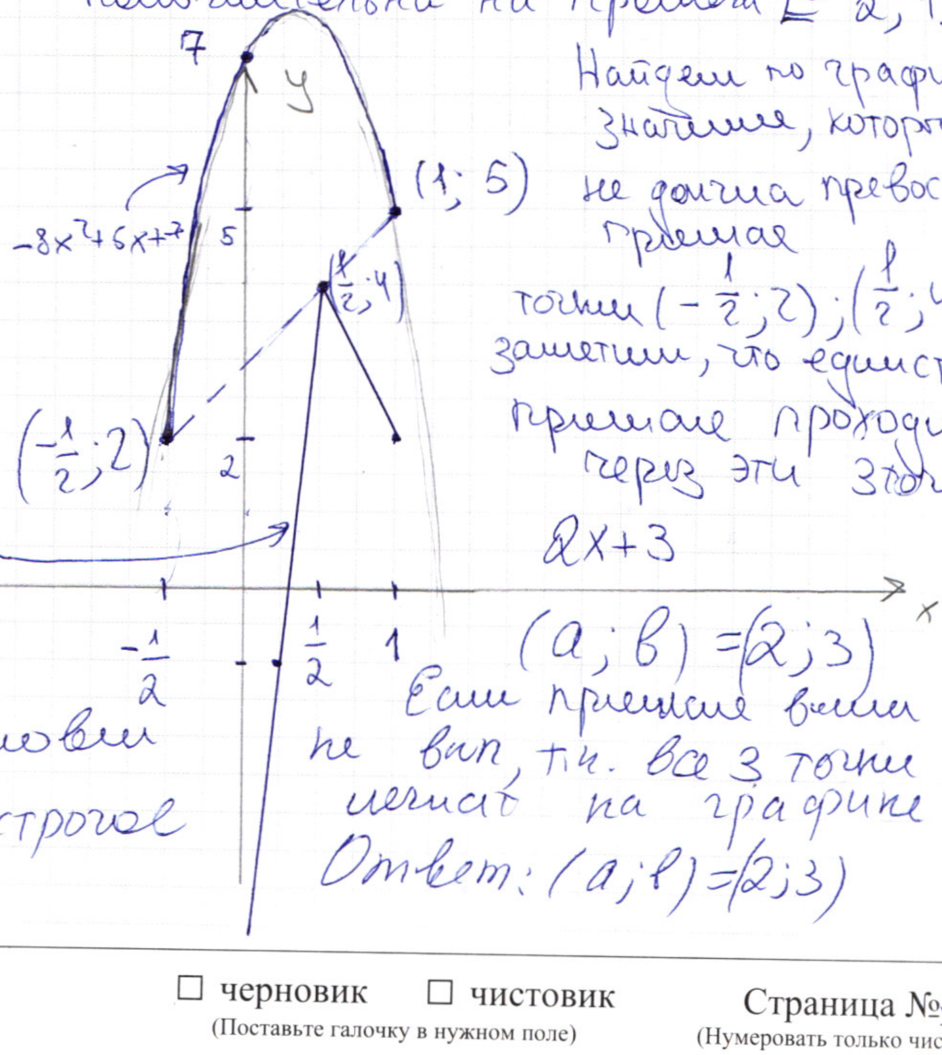
$20x - 6 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$

$x \in [\frac{1}{2}; 1)$

~~6x~~ $6 - 4x \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$

$-8x^2 + 6x + 7$ – положительна на промеж $[-\frac{1}{2}; 1]$

ax+в-ур-е прямой



Найдем по графику значения, которые не должна превосх прямая

точки $(-\frac{1}{2}; 2)$; $(\frac{1}{2}; 4)$; $(1; 5)$

заметим, что единствена прямая проходит через эти 3 точки

$2x + 3$

$(a; b) = (2; 3)$

Если прямая выше или не вып, т.к. все 3 точки лежат на графике и

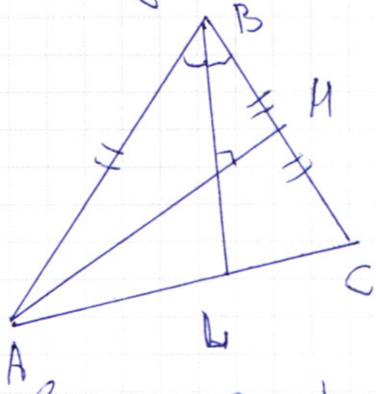
лишь – условие нер-во нестрогое

Ответ: $(a; b) = (2; 3)$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2. Представим искомый треугольник



AM - медиана, BL - биссектриса

тогда $\triangle ABM$ - ~~п~~ равнобедренный

$AB = \frac{1}{2} BC = a$

$P = 3a + AC$, $AC = k$

тогда нам нужны $\triangle$ с периметром

вида $3a + k = 900$

Неравенство тр-ка: $3a \geq k$ ~~нестрогое нер-во т.к~~ $a + k \geq 2a$ ~~стороны - целые числа,~~ ~~$2a + k \geq a$ - значит~~

$3a + k = 900$

~~$3a \geq k$~~ $\begin{cases} 3a > k \\ a + k > 2a \\ 2a + k > a \end{cases}$ - ok, т.к. стороны натуральные

$\begin{cases} 3a \geq 453 \\ 2a < 450 \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq 151 \\ a \leq 224 \end{cases}$ => 74 варианта для a

Ответ: 74 треугольника

3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$ $x - 6 = a$ ← замена $(y-1) = b$ ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 1 \end{cases}$

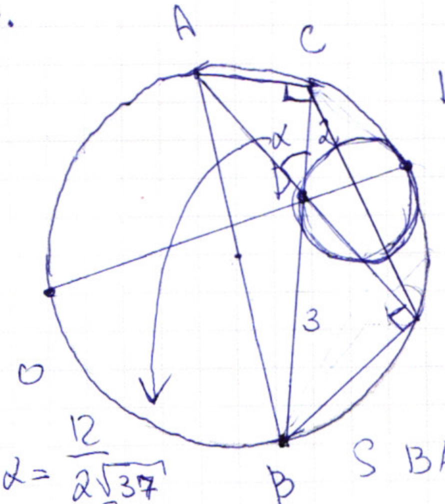
$\begin{cases} a - b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$ $\cancel{a = \sqrt{ab} + b}$

$\begin{cases} a^2 - 3ab + b^2 = 0 \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0 \end{cases}$

$\cancel{ab + b^2 + 2b\sqrt{ab}}$

$\begin{cases} b^2 - 18 + 3ab = 0 \\ a^2 + b^2 - 3ab = 0 \end{cases}$

5.



$DC \cdot DB = AD \cdot DE$ - отр. ки пер. хорд

$DA \cdot DE = 6$

O - середина большей дуги CB

Возьмём пифагорову тройку 5, 12, 13

тогда $AB = 13$, $R_\Omega = 6{,}5$

$AC = 12$

$AD = \sqrt{144+4} = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$

~~BD =~~ $ED = \frac{3\sqrt{37}}{37}$

$S_{ABEC} = S_{ABC} + S_{BDE} + S_{CDE}$

$\sin\alpha = \frac{12}{2\sqrt{37}}$

$\sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$

$S_{BACE} = 30 + \left(\frac{3\sqrt{37}}{37} \cdot \frac{6}{\sqrt{37}} \cdot \frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{6}{\sqrt{37}} \cdot \frac{3\sqrt{37}}{37}\right)$

$S_{BACE} = 30 + \frac{9}{37} + \frac{18}{37} = 30 + \frac{27}{37}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. ~~x-64~~

$$\begin{cases} a-b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=x-6 \\ b=y-1 \end{cases}$$

$f(18)=f(2)+f(3)+f(3)$

$2+1=3$

$a^2=18-2b^2$

$$\begin{cases} a^2+b^2-3ab=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$18-2b^2+b^2=3(b(\sqrt{18-2b^2}))$

$f\left(\frac{1}{9}\right)=2$

$324-36b^2+b^4=9b^2(18-2b^2)$

$324-36b^2+b^4-162b^2+18b^4=0$

$19b^4-198b^2+324=0$

$f\left(\frac{18}{9}\right)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)$

$D=39204-4(324)19=14580$

$b^2=\frac{198\pm\sqrt{14580}}{38} \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{198\pm\sqrt{14580}}{38}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

$-4-6($

$-16\le-\frac{a}{2}+b\le-4-3+7$

$f\left(x;\frac{1}{y}\right)$

$f(2)=1$

$-14\le-\frac{a}{2}+b\le 2$

$p(2)=1 \quad f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{6}{3}\right)=1$

$-28\le-a+2b\le 4$

$p(22)=p(2)$

$3{,}2 \quad \frac{7}{2}$

$p(4)=p(2$

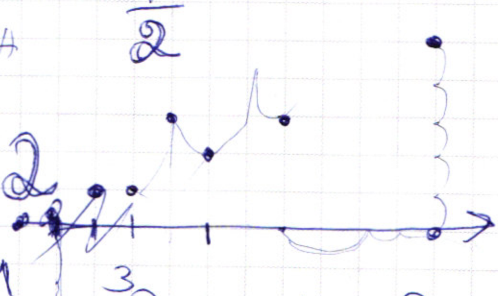
$3{,}4$

$p(2)=1$

$3{,}7$

$p(6)=p(3)+p(2)$

$f(6)=1+1=2$

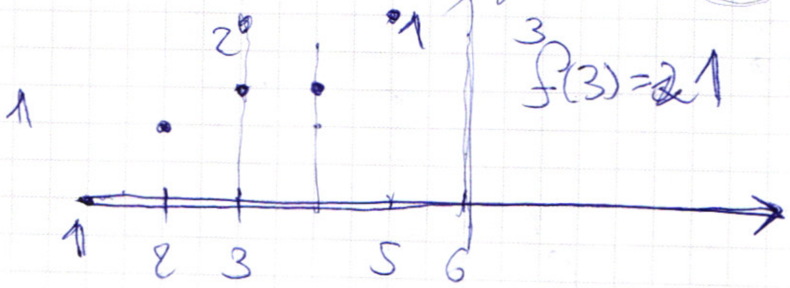


$p(6)=\frac{1}{2}$

$p(9)=$

$f(3)=1$

$f(6)=$



$f\left(\frac{6}{2}\right)=f(6)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

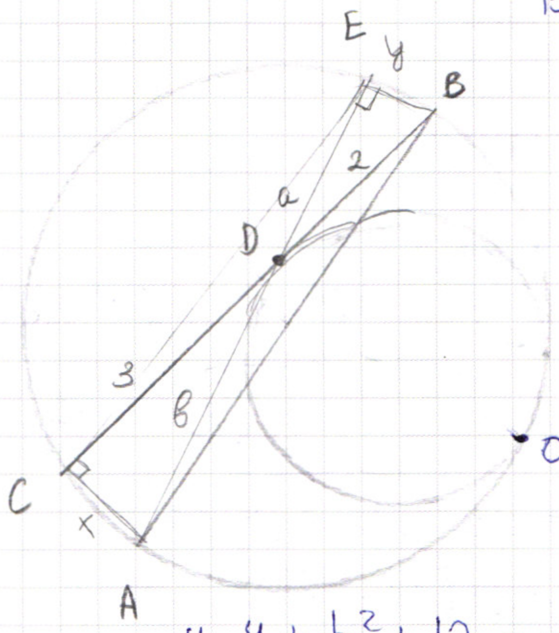
$1 \quad 2 \quad (-1)$

☒ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$BD \cdot DC = AD \cdot DE$

$AD = b$

$ED = a$

$6 = ED \cdot AD$

$ab = 6$

$\triangle EAB$ и $\triangle CBA$ – прямоуг

$y = EB$; $x = AC$

$y^2 + (a+b)^2 = x^2 + 36$

$y^2 + a^2 = 4$

$x^2 + \cancel{b^2}\ 9 = b^2$

$$\begin{cases} y^2 + a^2 + b^2 + 2ab = x^2 + 36 \\ y^2 + a^2 = 4 \\ x^2 - b^2 = -9 \end{cases}$$

$y^2 + a^2 + b^2 + 12 = x^2 + 36$

$y^2 + a^2 + b^2 = x^2 + 24$

~~$4 + b^2 + 12 = x^2 + 36$~~

~~$y = 24 - 9$~~

~~$y = 15$~~

$-2 + 3 \cdot 7$

$$\begin{cases} -28 \le -a + 2b \le 4 \\ -6 \le b \le 7 \\ 2 \le a + b \le 5 \\ 8 \le a + 2b \le 16 \end{cases}$$

$\cancel{2} \cancel{\le}$

$8 \cancel{\le}\ 4 \le a + 2b \le 18$

$x \ge \frac{1}{2}$

$x < \frac{1}{2}$

$b \in [6; 7)$

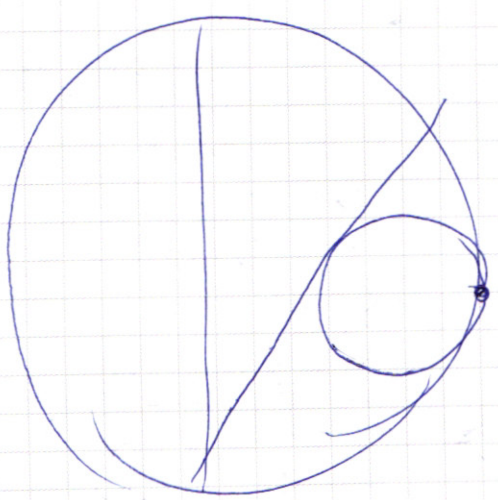
2024

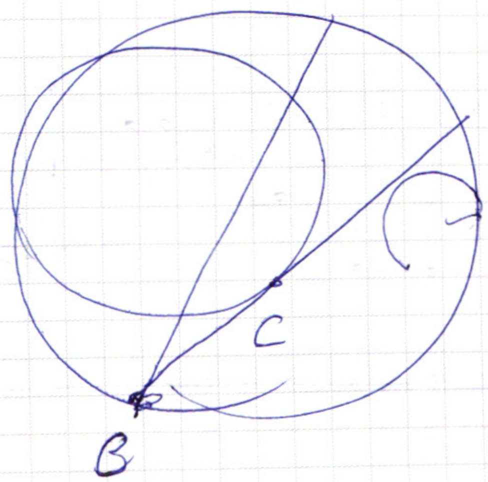
$8x - 6(1 - 2x)$

$\cancel{8x} + \cancel{6x}\ 12x - 6 \le a\cancel{x} + b \le$

$36 + 56 \cdot 4$

$\frac{-b}{2a}$ $\frac{-6}{16}$





☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

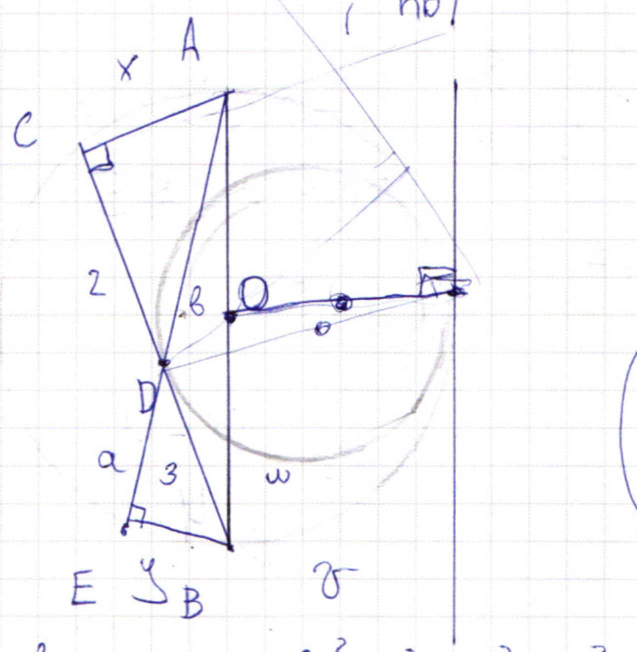
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

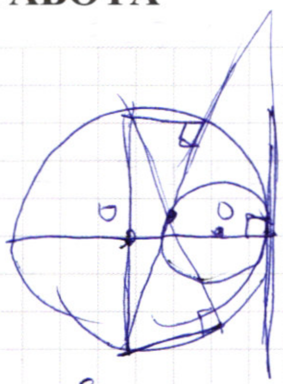
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$a+3=5$

$a=2$

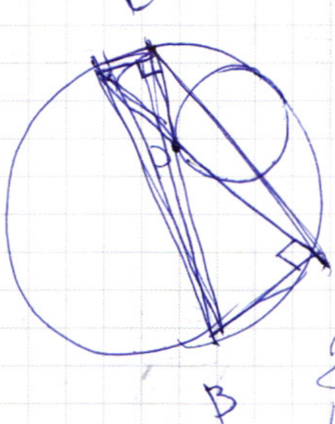
$ax+b=$

$\frac{a}{2}+b=4$

$-\frac{a}{2}+b=2$

$2b=6$

$b=3$



$ab=6$ $\quad (a+b)^2+y^2=x^2+6^2$

$a^2+b^2+6+y^2=x^2+6^2$

$9=90$

$f(xy)=f(x)+f(\frac{1}{y})$

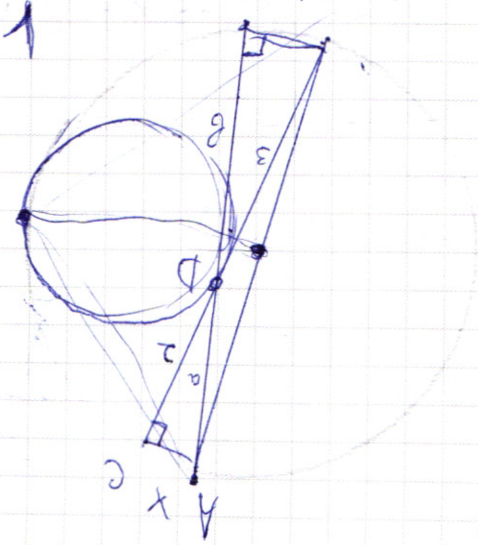
$f(1)=2f(1)$

$f(1)=0$

$\cancel{f(a\cdot b)=f(a)+f(b)}$

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1)$

$f(3)=1$



$2b-a>0$

-12

$8\le 4b\le 20$

$2\le b\le 5$

$a=0$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

6. $8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$ $x=0$

$-6|-1| \le b \le 7$ $-6 \le b \le 7$

$x=1$

$8-6 \le a+b \le -8+6+7$ $2 \le a+b \le \cancel{7}5$

$x=\frac{1}{2}$

$4 \le \frac{a}{2}+b \le -2+3+7$

$12 \le 2b \le 10$

$4 \le \frac{a}{2}+b \le 8$

$\cancel{6 \le b \le 5}$

$-6 \le b \le 7$

$2 \le a+b \le 5$

$x=-\frac{1}{2}$

$-4+12 \le -\frac{a}{2}+b \le -2-3+7$

$8 \le -\frac{a}{2}+b \le 2$

$b=-6$

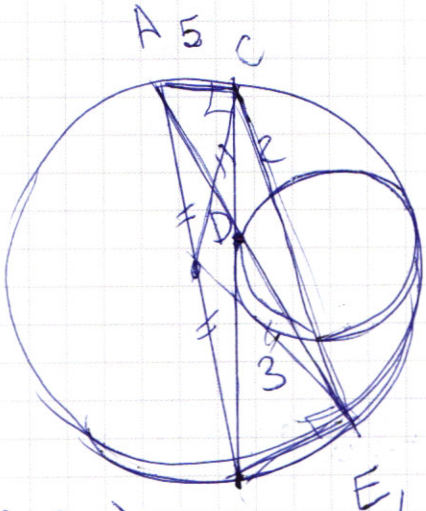
$a+b-$

$8x-0$

$a=8$

4

7



$-2-3+7$

$8x-6(1-2x) \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$ax+3$ $\frac{1}{4}=5-$

$-4-6|-2|$

$-4-12$

$-16 \le -\frac{a}{2}+x$

$ax+b$

$\frac{a}{2}+b=2$

$5=$

$a+b=5$

$-\frac{1}{2}a+3=2$ $\frac{a}{5}$

a

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

6. Рассмотрим случаи $x=-\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{2}$; $x=1$; $x=0$

$x=-\frac{1}{2}$: $-4-6|-2| \le -\frac{a}{2}+b \le -2-3+7$

$\cancel{-10} \le -\frac{a}{2}+b \le 2$ $\quad -16 \le -\frac{a}{2}+b \le 2$

$\cancel{-20 \le a+2b \le 4}$ $\quad -32 \le -a+2b \le 4$

$x=\frac{1}{2}$: $4 \le \frac{a}{2}+b \le -2+3+7$

$4 \le \frac{a}{2}+b \le 8$ $\quad 8 \le a+2b \le 16$

$x=0$: $-6 \le b \le 7$

$x=1$: $2 \le a+b \le 5$

Решим сист неравенств

$$\begin{cases} \text{I) } 2 \le a+b \le 5 \\ \text{II) } -6 \le b \le 7 \\ \text{III) } 8 \le a+2b \le 16 \\ -32 \le 2b-a \le 4 \quad (\text{IV}) \end{cases}$$

~~$8 \le a+2b \le 16$~~

~~$-20 \le a+2b \le 4$~~

расмотрим $b=-6$

~~I) $a \in [8; 11]$~~

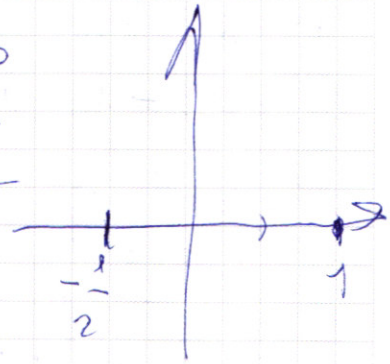
~~III) $a \in [20; \dots]$~~ решимет

пусть

~~$a+b=2$: $b\,[5, 14]$~~

$$\begin{cases} \text{I и III} \Rightarrow b \in [6; 11] \Rightarrow \\ \text{II} \end{cases}$$

$b \in [6; 7]$



$56+9$ $\quad \frac{65}{8}$

$198 \cdot 1898$

$39600 - 396$

$39600 - 396 = 39204$

$324 \cdot 76 = 1944 + 2268 = 24624$

$39204 - 24624 = 14580$

14580

$19 \cdot 4 = 76$

$-\frac{9}{64}\cdot 8$ $\quad \frac{9}{8}+7$ $\quad -\frac{9}{8}+\frac{18}{8}$

$324 \cdot 76$: 1944, 1268, 4624

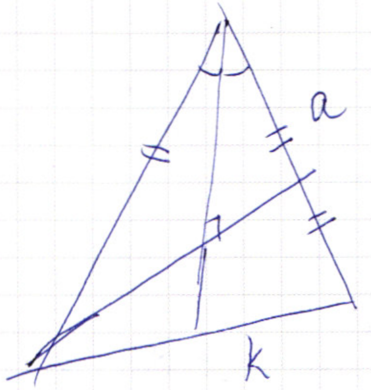
☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2.



Если медианы ⊥ бисс.
тогда $P = 3a+k = 900$

$\begin{cases} 3a > k & \text{неравенств} \\ a+k > 2a & \text{гр.} \end{cases}$

$3a \geq 453$ из 1 нер.

$2a < 450$ из вт

$\begin{cases} a \geq 151 \\ a < 225 \end{cases}$ $a \leq 224$

Вариантов для a — 73 (наборов подходящих сторон)
(симметрия и поворот — одно и то же)

Ответ: 73 треугольника

3. $\begin{cases} x - 6 + y = \sqrt{(y-1)(x-6)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$ одз: $(x-6)(y-1) \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$x^2-12x+36 + 2(y^2-2y+1) - 18 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$

$(x-6) = a$

$(y-1) = b$

$x - 6y \quad 1 + 6 - 1 = a - b$

$\begin{cases} a-b = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2 = 18 \end{cases}$ $\quad a^2 - 2ab + b^2 = ab \quad \cancel{ab = v}$
$a^2 + 2b^2 = 18 \quad \cancel{a+b = u}$

$\begin{cases} a^2-2ab+b^2 = ab \\ a^2+2b^2 = 18 \end{cases}$

$b^2 + 2ab = 18 - ab$

$b^2 + 3ab = 18$

$b(b+3a) = 18$

$\cancel{(y-1)(x+y-7) = 18}$

$a^2 + 2b^2 = b^2 + 3ab$

$\begin{cases} a^2+b^2 = 3ab \\ a^2+2b^2 = 18 \end{cases}$

$a^2 = 18 - 2b^2$

$18 - 2b^2 + b^2 = 3b\sqrt{18-2b^2}$

$18 - b^2 = 3b(\sqrt{18-2b^2})$

$\cancel{18^2 - 36b^2 + b^4 = 9b^2(18-2b^2)}$

$\cancel{324 - 36b^2 + b^4 - 9b^2(18-2b^2) = 0}$

$\cancel{324 - 36b^2 + b^4 - 162b^2 + 18b^4 = 0}$

$\cancel{19b^4 - 198b^2 + 324 = 0}$

$$\begin{array}{r} 224 \\ -\ 151 \\ \hline 73 \end{array}$$

$\cancel{a^2}$ см стр.

черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

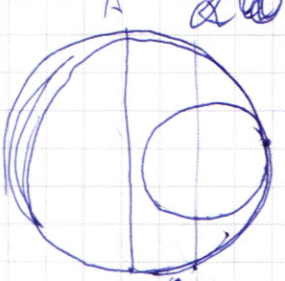
(заполняется секретарём)

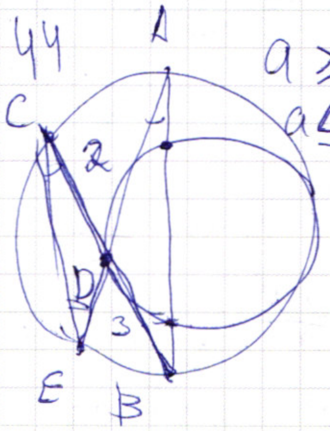
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

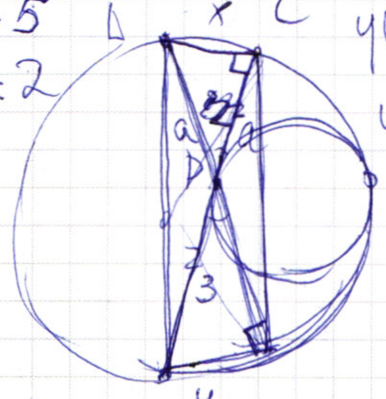
$a < 225$ $\quad > 450$ $\quad a = 225$ $\quad 224$

$2a$ $\quad 44$ $\quad AD \cdot ED = 6$ $\quad 448$

$a \geq 5$ $\quad a \leq 2$ $\quad 452$







$\operatorname{tg}\alpha =$ $\quad \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $\quad 2^2 + x^2 = a^2$

$b^2 + y^2 = 3^2$

$y(x-6) + (6-x)$

$ab = 6$ $\quad \left(\frac{4x\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{163}{4}x^2$

$(y-1)(4-6)$

$\cancel{8} \leq \frac{a}{2} + b \leq -3+7+-2$

$-4 \leq \quad \leq 2$ $\quad 9 \leq \frac{a}{2} + b \leq -2+3+7$

12 $\quad 40+12$ $\quad 4 \leq \frac{a}{2} + b \leq$

$8 \leq a+b \leq -8+6+7$

$8 \leq a+b \leq$ $\quad \boxed{6 \leq b \leq 7}$ $\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

37 $\quad 13, 12,$

$y^2 - 4y + 4$

$450 = 30\sqrt{9a+k} > 2a+k$ $\quad 4 + \frac{144\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{12}{9}$ $\quad 2\sqrt{37}$

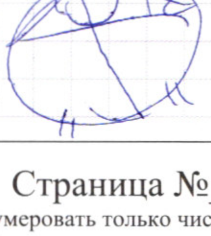
5

$k = 451$ $\quad \sin^2\alpha\, 9 = 12\cos^2\alpha + 9\cos^2\alpha$ $\quad 13$

$9 = 21\cos^2\alpha$ $\quad 2+12$ $\quad 25$ $\quad 3 = 1{,}5$

453 $\quad 447$

$447 \mid 3$ $\quad 8 \quad 100+50+1$ $\quad 151$ $\quad 447$



$5^2 + 144 = 169$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}$ $3x+k=900$ $3x>k$ $(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

$x-6y\geq 0$

$y+16$

$+36+2$

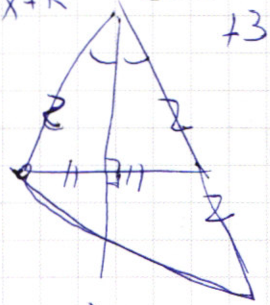
$x^2-12x+36$

$(x-6)^2+2(y-1)^2$

$y^2+2y+1\ (y^2-2y+1)$

$2y^2-4y+2$





$xy-6y=6y(x-6)-(x-6)=(y-1)(x-6)$

$x-6y=$

y^2-4y

$2\cdot 6x$

$2\cdot 6$

$x_1x_2=\frac{c}{a}$ $x_1+x_2=\frac{2b}{a}$

$x^2-12x+36=(x-6)^2$

$\cancel{2y^2-4y}$

$18-18$

$a=a$

$b=aq$

$c=aq^2$

$l=aq^3$

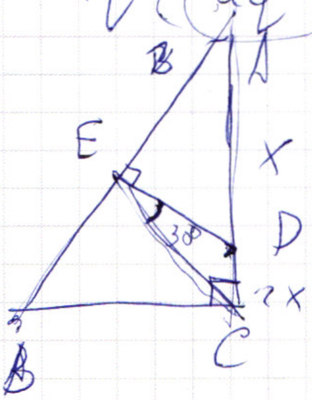
$x_1x_2=\frac{aq^2}{a}=q^2$ $x_1+x_2=\frac{2(qa)}{a}=aq$

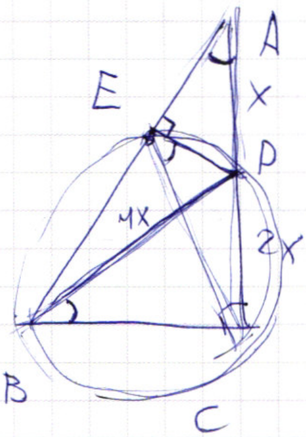
$x_1 l=q^2$ $aq^3+aq=c$

$\frac{aq^3}{aq}$

$=200+364$

$36+224=$





$\frac{x}{AB}=\frac{3x}{}$

$\frac{4x}{EC}=\frac{x}{AC}$

$a=a$ $4=aq^4$

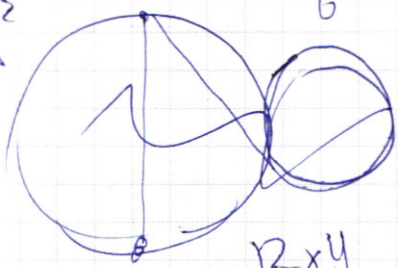
$b=aq$

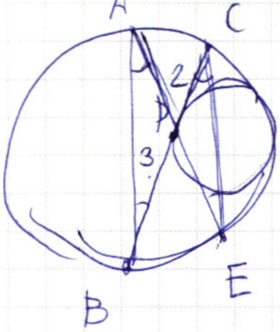
$c=aq^2$

$x^2-36+36y^2$

$\frac{x_4}{b}=q^2$

$x_1x_2=\frac{aq^2}{a}=q^2$





$x_1x_2=\frac{aq}{3a}=q^2$

$aq^3,\frac{1}{aq}$ $\frac{1}{b}$

$aq^3+\frac{1}{aq}=q$

$-12xy$

$\frac{a^2q^4+1}{aq}=q$ a^2q^3

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$a^2+2b^2=18$ $\sqrt{ab}=x-6y$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)