МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

пусть k - шаг геом прогрессии $a; b; c; \ldots$, тогда $b = ak$; $c = ak^2$, $x_0 = ak^3$, где x_0 - корень $ax^2+2bx+c=0$, ~~но тогда~~

найдём корни этого уравнения:

$$\begin{cases} ax^2+2bx+c=0 \\ b=ak;\ c=ak^2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x^2+2kx+k^2=0$$

$$(x+k)^2=0$$

$$x=-k.$$

т.е. $x_0=-k$.

итог: $ak^3=-k$.

$$\begin{cases} ak^2=-1 \\ k=0 \end{cases}$$

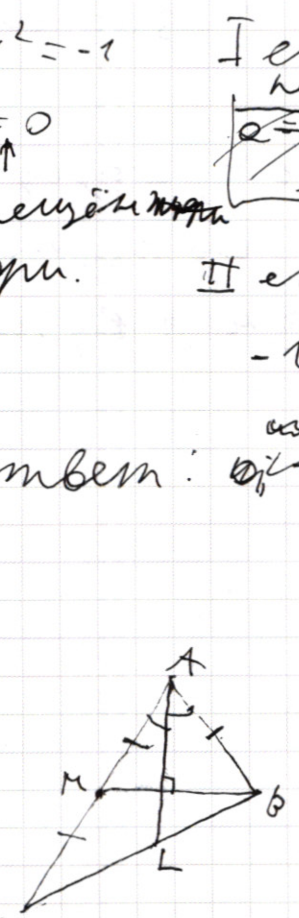
↑ запрещён жюри.

I если $k=0$: ~~все сокращается~~ все члены равны 0 (кроме быть может x_0) но как сказали организаторы, такой ~~$a=0, b=0, c=0$, $0x^2+2\cdot 0x+0=0$~~ ~~0 - корень~~ случай запрещён

II если $k \neq 0$; $ak^2=-1$; $ak^2=c \Rightarrow$
-1 - ответ (т.к. c - 3 член прогрессии)

Ответ: -1.

№2



пусть медиана $BM \perp AL$ (AL - бисс)

$\triangle AMB$: AL - бисс и высота $\Rightarrow$ от р/б $\Rightarrow AB = AM = \frac{1}{2}AC$.

в обратную сторону это тоже верно, т.е.

№2 (продолжение)

если в $\triangle AOC$ 1 сторона в 2 раза больше другой, то соотв. медиана перпендику. биссектрисе (док-во ан-но, только в обратном порядке)

итак, бисс $\perp$ медиане $\Leftrightarrow$ 2 стороны отличаются в 2 раза.

пусть меньшая x, тогда 2-ая $2x$, 3-ая $1200-3x$. $(P_{AOC}=1200)$

запишем нер-ва тр:

$$\begin{cases} x \le 2x+1200-3x \\ 2x \le x+1200-3x \\ 1200-3x \le 2x+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 600 \\ x \le 300 \\ x \ge 200 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [200, 300]$$

тогда способов выбрать x: $300-200+1=$
$=101$.

при этом: при выборе такого x, 2 другие стороны определяются однозначно, и такой тр. существует по нер-ву тр.

Ответ: 101

№3.

$$\begin{cases} (y-2)+(2-2x)=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2\cdot(x^2-2x+1)+y^2-4y+4=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-2)+2(1-x)=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

пусть $x-1=a$; $y-2=b$.

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$$\begin{cases}(b-2a)^2=ab\\ b-2a\geq 0\\ 2a^2+b^2=3\end{cases}$$

$$\begin{cases}b^2-4ab+4a^2=ab \quad (1)\\ b^2+2a^2=3\\ b\geq 2a\end{cases}$$

(1): $b^2-5ab+4a^2=0$

I $b=0$; тогда $a=0$.

II $b\neq 0$:

$$4\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\frac{a}{b}+1=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=1\\ \frac{a}{b}=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}a=b\\ 4a=b.\end{array}\right.$$

возвращаемся в систему

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}\\ a=b\\ b=4a\end{array}\right.\\ b^2+2a^2=3\\ b\geq 2a\end{cases}$$

$\begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}$ – не подходит, т.к. $0^2+2\cdot0^2\neq3$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b.\\ a\geq 2a\\ 3a^2=3\end{cases}\\ \begin{cases}4a=b.\\ 4a\geq 2a\\ 16a^2+2a^2=3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b\\ a\leq 0\\ a^2=1.\end{cases}\\ \begin{cases}4a=b\\ a\geq 0\\ a^2=\frac{1}{6}.\end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}\\ \begin{cases}a=\frac{\sqrt6}{6}\\ b=\frac{2\sqrt6}{3}\end{cases}\end{array}\right.$$

замены обратно.

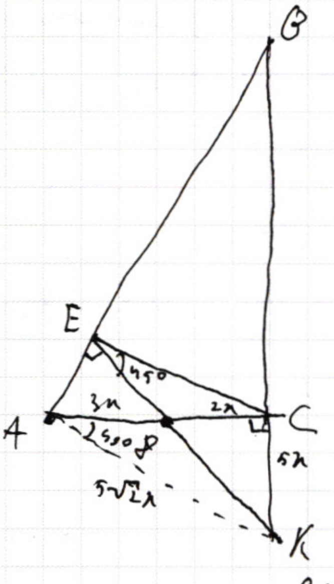
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=-1\\ y-2=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=\frac{\sqrt6}{6}\\ y-2=\frac{2\sqrt6}{6}.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=1.\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\sqrt6}{6}+1\\ y=\frac{2\sqrt6}{6}+2\end{cases}\end{array}\right.$$

№3

Ответ: $(0; 1)$; $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}+1; \frac{2\sqrt{6}}{6}+2\right)$

№4.

а). решение:



1) продлим ED до пер-я с BC: пусть $ED \cap BC = K$

2) пусть $AC = 5x$, тогда $\frac{AC}{AD} = \frac{5}{3} \Rightarrow AD = 3x$, $DC = 5x - 3x = 2x$

3) $\angle AEK = \angle ACK = 90° \Rightarrow$ A, E, C, K лежат на 1-ой ω окр-ти (по признаку)

$\angle CEK = \angle CAK = 45°$ (как вп. на дугу CK)

4) $\triangle ACK$ – пр: $\angle CKA = 90° - 45° = 45° \Rightarrow \triangle CAK$ – р/б с осн AK, т.е. $CA = CK = 5x$.

5) $\angle EAC = \angle CKE$ (как вп. в ω и опирающ. на $\cup CE$)

6) $\triangle CDK$ – пр: $\operatorname{tg}\angle CKD = \frac{CD}{CK}$ (по опр) $= \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

$\angle CKD = \angle BAC \Rightarrow \operatorname{tg} BAC = \frac{2}{5}$

б) $\triangle ACK$ – пр: $AK^2 = AC^2 + CK^2$.

$AK^2 = (5x)^2 + (5x)^2$

$AK^2 = 50x^2$

$AK = 5\sqrt{2}\,x$

2) $\triangle CKD$ – пр: $KD^2 = CD^2 + CK^2$

$KD^2 = 25x^2 + 4x^2$

$KD = \sqrt{29}\,x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3)

№4

3) ~~∠ RER = ∠ KAC (как вн вш и от на ∪CK)~~

$\cdot\ \angle CER = \angle CER = 45^\circ$

$\angle CRE = \angle KRA$ (как верт) $\Rightarrow \triangle CER \sim \triangle KAR$ (по 2 угл)

$$\frac{S_{CER}}{S_{KAR}} = \left(\frac{CR}{RK}\right)^2 = \left(\frac{2x}{\sqrt{29}x}\right)^2 = \frac{4}{29}$$

4) $\triangle KAR$: $S_{\triangle KAR} = \frac{1}{2} RA \cdot AK \cdot \sin\angle KAR$

$$S_{\triangle KAR} = \frac{3x}{2}\cdot 5\sqrt{2}x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{2}x^2$$

5) $S_{\triangle CER} = \frac{4}{29}\cdot S_{\triangle KAR}$

$S_{\triangle KAR} = \frac{15}{2}x^2$ $\Rightarrow S_{\triangle CER} = \frac{15\cdot 2}{29}x^2$

$S_{\triangle CER} = \frac{30}{29}x^2$

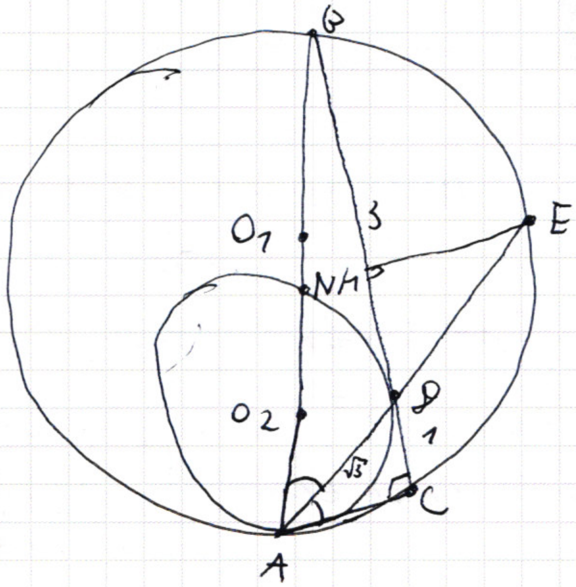
6) $S_{\triangle CER} = \frac{30}{29}x^2$

$AC = \sqrt{29}$

$AC = 5x$ $\Rightarrow$ $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$; $S_{\triangle CER} = \frac{30}{29}\cdot\frac{29}{25} = \frac{6}{5}$

Ответ: а) $\frac{2}{5} = \operatorname{tg}\angle CAO$ б) $S_{\triangle CER} = \frac{6}{5}$

№5



Решение:

1) Известный факт, что если окружности Ω и ω с центрами O_1 и O_2 кас в A,
$A \in (O_1O_2 \Rightarrow O_1 \in AB, O_2 \in AB$

2) ~~т.к.~~ Ω кас и внутр образом в A, BC – хорда Ω, BC кас ω в $D \Rightarrow AD$ – бисс $\angle BAC$ (по лемме Архимеда)

3) $\triangle ABC$: AD – бисс $\angle A$, значит $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{1}$
пусть R – рад Ω, тогда $AB = 2R$
$\cancel{AB}\ \frac{2R}{AC} = \frac{3}{1}$; $AC = \frac{2R}{3}$

4) Ω: AB – диаметр, $(C \in \Omega)$ значит $\angle BCA = 90^\circ$ (по св-ву диаметра)

5) $\triangle ABC$ – пр: $AB^2 = BC^2 + CA^2$
$(2R)^2 = 16 + \left(\frac{2}{3}R\right)^2$
$4R^2 = 16 + \frac{4}{9}R^2 \ \Big| \cdot \frac{9}{4}$
$9R^2 = \cancel{144}\ 36 + R^2$
$R^2 = \frac{36}{8}$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

6) пусть r - радиус ω, тогда $BA \cap \omega = N$

$BN = 2(R-r)$; $BA = 2R$

7) по т. о сек. $BN \cdot BA = BD^2$

$2R - 2r = \frac{9}{2R}$

$2R - \frac{9}{2R} = 2r$

$R - \frac{9}{4R} = r$; $r = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{9}{4 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}R$

8) $\triangle ACD$ - пр:

$AD^2 = CD^2 + AC^2$.

$AD^2 = 1 + 2$.

$AD = \sqrt{3}$

9) $\triangle ECD$ и $\triangle BAD$:

$\angle CED = \angle ABD$ (опир. в Ω, оп на $\cup AC$)

$\angle EDC = \angle BDA$

$\Rightarrow \triangle ECD \sim \triangle BAD$ (по 2 углам)

$\frac{EC}{AB} = \frac{CD}{AD}$

~~AB~~ $AB = \frac{EC \cdot AD}{CD}$

~~AB =~~

10) $EC = \frac{CD}{AD} \cdot AB$

$EC = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$EC = \cancel{\frac{3\sqrt{6}}{2}}\ \sqrt{6}$

11) $\triangle BEC$ - р/б (т.к $\cup BE = \cup EC$, т.к $\angle BAE = \angle EAC$)

найдём его площадь $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6.

~~A2)~~ проведём высоту EH, она высота и медиана
11)

Значит $HC = 2$.

12) $\triangle EHC$:- пр. $EH^2 = EC^2 - CH^2$.

$EH^2 = \frac{3}{2}$ ...

$EH^2 = 6 - 4$.

$EH = \sqrt{2}$

13). $S \triangle BEC = \frac{EH \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 2\sqrt{2}$.

14) $S \triangle ABC = \frac{CB \cdot CA}{2}$ (т.к. $\triangle ABC$ - пр)

$S \triangle ABC = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

15) $S\ ACEB = S ABC + S BEC = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $r = \frac{3}{4}\sqrt{2}$; $S\ ACEB = 4\sqrt{2}$

№6

$y = 2x^2 - x - 1$ - график парабола (кв. уравнение)

$x_в = \frac{-b}{2a}$?

$x_в = +\frac{1}{4}$.

$y_в = -\frac{45}{8}$. $y_в = -\frac{9}{8}$

$y = x + |2x - 1|$

при ~~$2x - 1 \geq 0$~~ ~~$x \geq \frac{1}{2}$~~ : $y = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

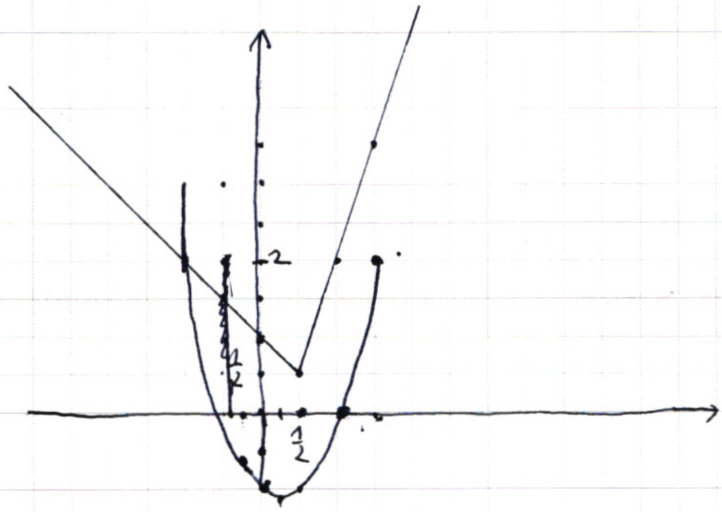
$y=$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



$f(x)=y=ax+b$ - прямая, довольно очевидно, что ~~если f(x)~~ она лежит выше параболы $\Leftrightarrow$

$f(\frac{3}{2}) \geq 2$

$f(-\frac{1}{4}) \geq -\frac{5}{8}$

$\left(\text{т.} \quad 2 = 2\cdot(\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2} - 1 \quad -\frac{5}{8} = 2\cdot(-\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} - 1 \right)$

а что бы ~~прямая~~ искомая прямая лежала ниже графика ф-ии $y = x + |2x-1|$ необходимо и достаточно

$f(\frac{3}{2}) \leq \frac{7}{2}$

$f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{4}) \leq \frac{5}{4}$.

Итого:

$$\begin{cases} 2 \leq \frac{3}{2}a + b \leq \frac{7}{2} & \mid \cdot 2 \\ -\frac{5}{8} \leq -\frac{1}{4}a + b \leq \frac{5}{4} & \mid \cdot 8 \\ \frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2} & \mid \cdot 2. \end{cases}$$

(если $f(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$, ~~тогда~~ то крутое нер-во невыполняется)

$$\begin{cases} a + 2b \leq 1 \\ 4 \leq 3a + 2b \leq 7 & \mid \cdot 2 \\ -5 \leq -2a + 8b \leq 10 & \mid \cdot 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b\le 1 \\ 8\le 6a+4b\le 14 \\ -15\le -6a+24b\le 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7\le \cancel{2b}\, 28b\le 44 \\ 8-4b\le 6a\le 14-4b \\ a\le 1-2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}\le b\le \frac{11}{7} \\ 6\le 6a+4b\le 14 \\ -30\le 6a-24b\le -15 \\ a\le -2b+1 \end{cases} (*)$$

№6.

(*):

$$\begin{cases} 6\le 6a+4b\le 14 \quad |\cdot 6 \\ -30\le 6a-24b\le -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36\le 36a+24b\le 84 \\ -30\le 6a-24b\le 15 \end{cases} +$$

$$\begin{cases} 6\le 42a\le 99 \\ \frac{1}{7}\le a\le \frac{33}{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b\le 1 \\ 8\le 6a+4b\le 14 \end{cases}$$

изначальная система равносильна:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+2b\le 1 \\ 8\le 6a+4b\le 14 \end{cases} (*) \\ \begin{cases} a+2b\le 1 \\ -15\le -6a+24b\le 30 \end{cases} (**) \\ \begin{cases} \frac{1}{7}\le a\le \frac{33}{14} \\ -\frac{1}{4}\le b\le \frac{11}{7} \end{cases} \end{array}\right.$$

(*)

$$\begin{cases} a+2b\le 1 \quad |\cdot -2 \\ 8\le 6a+4b\le 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a-4b\ge -2 \\ 6a+4b\ge 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a\ge 4 \\ a+2b\le 1 \\ 8\le 6a+4b\le 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\ge 1 \\ -6a-12b\ge -6 \\ 6a+4b\ge 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\ge 1 \\ -8b\ge 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a\ge 1 \\ b\le -\frac{2}{8} \\ 8\le 6a+4b\le 14 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$(**)\begin{cases} a+2b\le 1 \quad |\cdot 2 \\ -5\le -2a+8b\le 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+4b\le 2 \\ -5\le -2a+8b\le 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12b\le 12 \\ a+2b\le 1 \quad |\cdot(-4) \\ -5\le -2a+8b\le 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\le 1 \\ -4a-8b\ge -4 \\ -2a+8b\ge -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a\ge -9 \\ b\le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\le \frac{3}{2} \\ b\le 1 \\ -5\le -2a+8b\le 10 \end{cases}$$

теперь объединим все результаты

$$\begin{cases} \begin{cases} a\le\frac{3}{2} \\ \frac{1}{7}\le a\le\frac{33}{14} \\ a\ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b\le 1 \\ b\le -\frac{2}{8} \\ -\frac{1}{4}\le b\le\frac{11}{7} \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1\le a\le\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ответ: $a\in[1;\frac{3}{2}]$; $b=-\frac{1}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$a = 1.$

$f(b) = f(1) + f(b)$

$f(1) = 0$

рассмотрим $f(\frac{x}{y})$:

$f(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}) = f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x})$

$0 = f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x})$

т.е в каждой паре $(x;y)$ соответствует пара $(y;x)$, ~~поскольку~~ при этом среди этих пар: либо обе $f(\frac{x}{y})$ и $f(\frac{y}{x})$ - равны 0 либо ровно 1 меньше 0, ровно 1 больше.

допустим $f(\frac{x}{y}) = 0$, тогда $f(\frac{y}{x}) = 0$ и:

$f(x) + f(\frac{1}{y}) = 0$ но; $f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x})$

$f(y) + f(\frac{1}{x}) = 0$ $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

$$\begin{cases} f(x) - f(y) = 0 \\ f(y) - f(x) = 0 \end{cases}$$

$f(y) = f(x)$, где x, y - натуральные.

~~Итак~~ Итого: во всех парах $(x;y)$: $f(x) = f(y)$ $f(\frac{x}{y}) = 0$

во всех других парах: из 2 наборов $(x;y)$ и $(y;x)$ ровно один имеет $f(\frac{x}{y}) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Найдем $f(x)$ для всех нат x.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
fx	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

итого: 0 - 1
2 - 4
3 - 6
4 - 4
5 - 1
6 - 1
7 - 0
8 - 1
9 - 1

~~всего пар $(x;y) = 21^2$~~
~~нам не подходят те, у которых $f(x)=f(y)$: их.~~
~~$4\cdot 4+6^2+4^2$~~
~~итого. Ответ: $21^2-32-36=373$~~
~~Ответ: 373~~

всего пар $(x;y)$: 21^2, нам не подходят пары вида $(x;x)$: их 21, а так же пары $(x;y)$ в которых $f(x)=f(y)$: их $4\cdot 3+6\cdot 5+4\cdot 3 = 24+30=54$
осталось $21^2-75=366$, это пары вида $(x;y)$, $x\neq y$ и $f(x)\neq f(y)$, по доказанному ранее они делятся на пары $(x;y)$ и $(y;x)$, среди которых ровно 1 подходящая.
значит нужных пар $\frac{366}{2}=183$.
Ответ: 183

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$a,\ b{=}ak;\ ak^2;\ ak^3$ $\qquad a, b, c = 0.$

$an^2+2akn+ak^2=0$

$n^2+2kn+k^2=0.$

$(n+k)^2=0.$

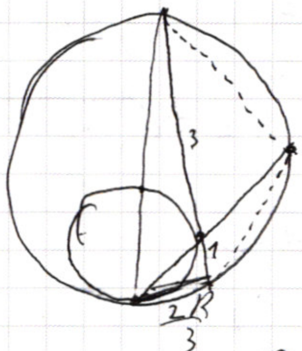
$n+k=0$

$n=-k.$

$ak^3=-k;$

$ak^2=-1.$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ +42 \\ \hline 441 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 441 \\ -68 \\ \hline 373 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 441 \\ -32 \\ -36 \\ \hline \end{array}$$



$2R\cdot(2R-2r)=3^8$

$n;\ 2n.$

$1200-n.$

$2R$

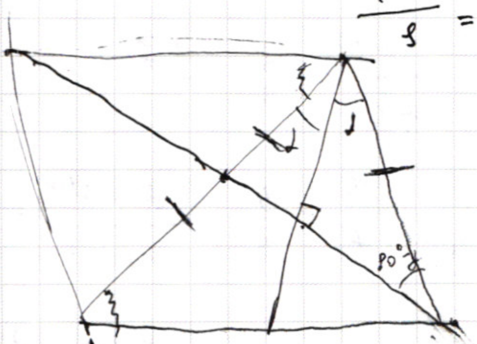
$$\begin{array}{r} 441 \\ -75 \\ \hline 366 \end{array}$$

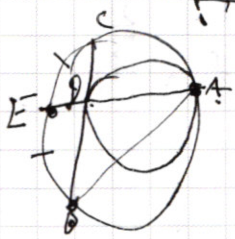
$\frac{\sqrt2}{\sqrt3}=\frac{\sqrt6}{3}.$

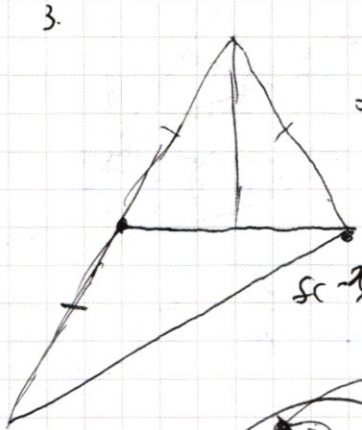
$\frac{4\cdot 6}{9}=\frac{4\cdot 2}{3}=\frac{128}{3}.$

$\frac{1}{n}:$

$f\ 0=$

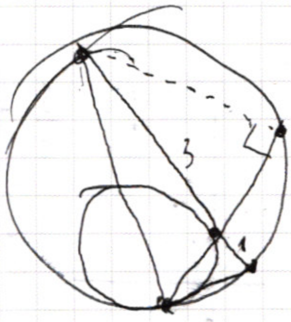






$f(-x/y)<0 \quad x/y=\frac{1}{n}.$

$$\begin{array}{r} 441 \\ -75 \\ \hline 366 \end{array}$$



$y^2-4ny+4n^2=ny-2n-y+2.$

$4n^2+y^2-5ny+2n+y-2=0.$

$2n^2+y^2-\ \dots\ -4n-4y+3=0.$

4 5 6 8

$\begin{array}{r} 150 \\ +35 \end{array}$

4 5 $\quad$ 5 6 $\quad$ 6

4 6 $\quad$ 5 8

4 8 $\quad$ 5 4

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y^2-4y+4 \quad (y-2)^2$

$2x^2-4x+2 \quad 2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4=3$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3.$

$y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)}$

$x-1=a$

$2a=2x-2$

$-2a=2-2x. \quad -\frac{9}{8}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$

$2a^2+b^2=3$

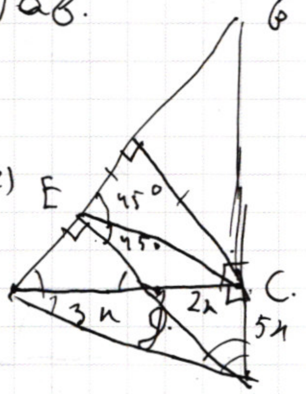
$b-2a=\sqrt{ab}.$

$-\frac{1}{8}.$

$f(\frac{1}{2}\cdot 2)=f(\frac{1}{2})+f(2)$

$0 \quad 1$

$f(\frac{1}{2})=-1.$



$\frac{l}{x}=\frac{3}{5};$

$f(1)=0$

$f(2)=1. \quad f(11)=9$

$f(3)=1. \quad f(13)=6.$

$f(5)=2 \quad f(17)=8.$

$f(7)=3. \quad f(19)=9.$

$f(z)\geq 0$

$4\left(\frac{9}{8}\right)^2-5\frac{9}{8}+1=0$

$4x^2-5x+1=0$

$x=1. \quad f(b)=f(1)+f(b)$

$x=\frac{1}{4} \quad f(1)=0$

$\alpha=$

$\frac{3}{2}+7 \quad \frac{21}{14}.$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

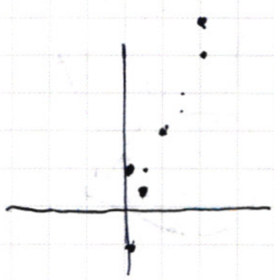
$\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5} \quad AD$

$\frac{AC}{AD}=\frac{5}{3} \quad \frac{AD+DC}{AD}=\frac{5}{3}$

$\frac{DC}{AD}=\frac{2}{3}.$

$2x-1>0$

$\frac{5}{4}-\frac{3}{2}. \quad \frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1= \quad 3x-1.$



$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1. \quad \frac{1}{8}+\frac{2}{8}-1=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$

$2.$

$\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-1= \quad x-2x+1$

$1-x.$

$-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{8}{8}$