МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Пусть q — коэфф. прогрессии $\Rightarrow$ $b = aq$, $c = bq = aq^2$.

$\exists$ d — ный член $\Rightarrow$ $d = aq^3$.

Т.к. d — корень ур-ия, то

$$ad^2 - 2bd + c = 0.$$

$$a\cdot(aq^3)^2 - 2(aq)(aq^3) + aq^2 = 0.$$

$$a\cdot a^2\cdot q^6 - 2a^2\cdot q^4 + aq^2 = 0.$$

$$aq^2(a^2q^4 - 2aq^2 + 1) = 0$$

$$aq^2\left((aq^2)^2 - 2(aq^2) + 1\right) = 0$$

$$c(c^2 - 2c + 1) = 0$$

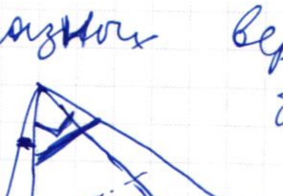
$$c(c-1)^2 = 0.$$

Значит, либо $c = 0$ либо $c = 1$ (и прогр. постоянная).

Ответ: 0 или 1.

№2. Допустим, дан треуг-к со сторонами A, B, C, вершины X, Y, Z $\Rightarrow$ $A, B, C \in \mathbb{N}$ (т.к. по усл. $A, B, C \in \mathbb{Z}$ и $A, B, C > 0$).

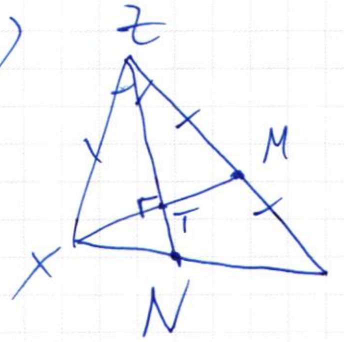
1) Понятно, что бис-са и медиана выходят из разных вершин, иначе бы этот угол



был суммой двух равных углов, внутри одного из кот-ых медиана, поэтому он > 90, поэтому сумма двух равных > 180 — пр-ие.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2) 

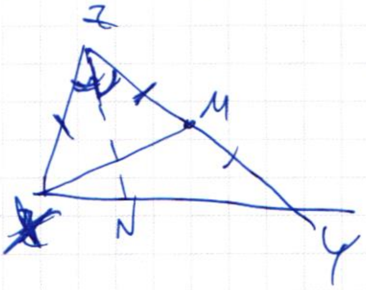
Допустим бис-са из угла ~~Z~~, медиана угла X.

XM - ~~медиана~~,
ZN - бис-са. =>

=> ZM = MY.

$\exists$ $ZN \cap XM = T$. => в $\triangle XZM$ ZT — бис-са и высота => $\triangle XMZ$ — равнобедр => ZM = ZX =>
=> ZY = 2XZ.

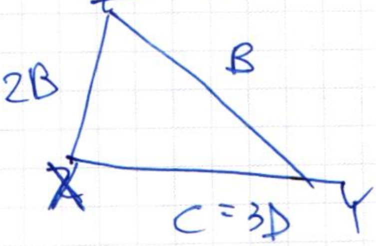
Очевидно, что если в каком-то треуг-ке одна сторона в 2 раза больше другой, то он обл. этим св-вом:



т.к. $\triangle XZM$ — равнобедр, то ZN — бис-са, поэтому и высота => $ZN \perp XM$.

Значит, $ZN \perp XM$ т. и т.т. когда
2XZ = ZY = B.

3. Перейдём к поиску ответа.



ZY = 2XZ = 2B, XY = C. =>
=> 2B + B + C = периметр = 900
3B + C = 900 =>
=> т.к. B, C $\in$ N =>
=> C ⋮ 3 => C = 3D (где D $\in$ N) =>
2B + 3D = 900
=> B + D = 300.

Н-во треуг-ка: ZY < XY + XZ — очев (B < 2B < 2B+C).
XY < XZ + ZY
3D < 2B + B = 3B => D < B.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$xZ < ZY + XZ$.

$2B < B + 3D$

$B < 3D$

$B + D < 4D$.

$300 < 4D$

$75 < D$.

т.к. $B > D$ и $B + D = 300$, то $D < 150$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 75 < D < 150$.

Очев. при любом D существует $B \in \mathbb{N}$ (т.к. $B = 300 - D$) и вып-ся $\begin{cases} B < 3D \\ B > D \text{ (т.к. } B > 150 > D) \end{cases}$

$B < 3D$

$300 - D < 3D$

$300 < 4D$

$75 < D$ – ok.

значит, т.к. для каждого D треуг-к восст. однозначно и при этом (как мы уже поняли) D – наим-ая сторона в тр-ке, то разным D соотв-ют разные тр-ки, причём единств. $\Rightarrow$ для каждого $D = \underbrace{76 \ldots 149}_{149-75=74}$ сущ. ровно 1 ответ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего 74 треуг-ка.

Ответ: 74.

№ 3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$

1) $x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$.

$\exists$ $A=x-6$, $B=y-1$. $\Rightarrow x-6y = x-6-6y+6 = x-6-6(y-1)$ $= A-6B$. $\Rightarrow$ перв. перепишется как $A-6B=\sqrt{AB}$.

2) $x^2-12x+36+2y^2-4y+2-18=0$.

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$.

$A^2+2B^2=18 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} A-6B=\sqrt{AB} \\ A^2+2B^2=18 \end{cases} \Rightarrow A^2-12AB+36B^2=AB. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вычтем из 1го 2ое:

$(A^2-12AB+36B^2)-(A^2+2B^2)=AB-18$.

$34B^2-12AB=AB-18$.

$A=\dfrac{34B^2+18}{13B}$ ($B\neq 0$, что легко видеть, иначе $0=-18$).

Значит, $\left(\dfrac{34B^2+18}{13B}\right)^2+2B^2=18$.

$\dfrac{(34B^2+18)^2}{13^2B^2}+2B^2=18$. Этот x и x из условия разные,

$\exists$ $B^2=x \Rightarrow \dfrac{(34x+18)^2}{169x}+2x=18$. $|\cdot 169x$.

$(34x+18)^2+2x\cdot169x=169x\cdot18$.

$34^2x^2+x\cdot2\cdot18\cdot34+18^2+2x^2\cdot169=x\cdot18\cdot169$.

$\cancel{x^2(34^2+2\cdot13^2)+x(2\cdot18(34-169))+18^2=0}$. $\cdot135$

~~решим кв. ур-ие:~~ $\cancel{D=2^2\cdot18^2\cdot135^2-4\cdot18^2\cdot(34^2+2\cdot13^2)=}$

$\cancel{=4\cdot18^2(135^2-34^2-2\cdot13^2)=}$ $13^2-3\cdot34>13\cdot5$; $13\cdot8>3\cdot34$

$\cancel{=4\cdot18^2((135+34)(135-34)-2\cdot13^2)=4\cdot18^2\cdot(169\cdot101-2\cdot13^2)=}$

$\cancel{=4\cdot18^2\cdot13^2\cdot99=2^2\cdot18^2\cdot13^2\cdot3^2\cdot11}\cdot10^a>10^2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Откуда $x = \frac{2\cdot18\cdot135\pm\sqrt{D}}{2(34^2+2\cdot13^2)} = \frac{2\cdot18\cdot135\pm2\cdot18\cdot13\cdot3\sqrt{11}}{2\cdot2(2\cdot17^2+13^2)} =$

$= \frac{9\cdot135\pm9\cdot13\cdot3\sqrt{11}}{2\cdot17^2+13^2} = \frac{9\cdot135\pm9\cdot13\cdot3\sqrt{11}}{2\cdot289+169} = \frac{9\cdot135\pm9\cdot13\cdot3\sqrt{11}}{578+169} =$

$= \frac{9\cdot135\pm9\cdot13\cdot3\sqrt{11}}{747} = \frac{135\pm13\cdot3\sqrt{11}}{83}$

$34^2x^2 + x\cdot2\cdot18\cdot34 + 18^2 + x^2\cdot2\cdot13^2 = x\cdot18\cdot13^2.$

$x^2(34^2+2\cdot13^2) + x(18(2\cdot34-13^2)) + 18^2 = 0.$

решим кв. ур-ие:

$D = 18^2(2\cdot34-13^2)^2 - 4\cdot18^2(34^2+2\cdot13^2) =$

$= 18^2\left((2\cdot34-13^2)^2 - (4\cdot34^2+4\cdot2\cdot13^2)\right) =$

$= 18^2(2\cdot34-13^2-2\cdot34^2+4\cdot13^2)(2\cdot34-13^2+2\cdot34^2+4\cdot13^2) =$

$= 18^2(-2\cdot34\cdot33+5\cdot13^2)(2\cdot34\cdot35+3\cdot13^2)$

$= 18^2(4\cdot34^2 - 4\cdot34\cdot13^2 + 13^4 - 2\cdot4\cdot13^2 - 4\cdot34^2)$

$= 18^2(13^4 - 13^2\cdot4(2+34)) = 18^2\cdot13^2(13^2-(2\cdot6)^2) =$

$= 18^2\cdot13^2\cdot(13^2-12^2) = 18^2\cdot13^2\cdot5^2.$

Значит, $x = \frac{-18(3\cdot34-13^2)\pm\sqrt{D}}{2(34^2+2\cdot13^2)} = \frac{-18(3\cdot34-13^2)\pm18\cdot13\cdot5}{2(34^2+2\cdot13^2)} =$

$= \frac{-9(3\cdot34-13^2\mp13\cdot5)}{34^2+2\cdot13^2}$

$x_1 = \frac{-9(3\cdot34-13^2+13\cdot5)}{34^2+2\cdot13^2} = \frac{-9(102+65-169)}{34^2+2\cdot13^2} = \frac{18}{34^2+2\cdot13^2} =$

$= \frac{3^2}{2\cdot17^2+13^2} = \frac{3^2}{747} = \frac{1}{83}.$

$x_2 = \frac{-9(3\cdot34-13^2-13\cdot5)}{34^2+2\cdot13^2} = \frac{-9(102-169-165)}{34^2+2\cdot13^2} = \frac{9\cdot232}{747} = \frac{232}{83}$

$B^2 = x \Rightarrow B = \pm\sqrt{\frac{1}{83}},\ B = \pm\sqrt{\frac{232}{83}}.$

$A = \frac{34B^2+18}{13B} \Rightarrow$ A одного же знака, как и B. $\Rightarrow AB > 0$ (!).

$A = \frac{\frac{34}{\sqrt{83}}+18}{\pm 13\sqrt{\frac{1}{83}}}$ и $A = \frac{34\sqrt{\frac{232}{83}}+18}{\pm 13\sqrt{\frac{232}{83}}}.$

~~Ито~~

$x = A+6,\ y = B+1$

$x = \frac{\frac{34}{\sqrt{83}}+18}{\pm 13\sqrt{\frac{1}{83}}} + 6 = \frac{34+18\sqrt{83}}{\pm 13} + 6,\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{83}} + 1$

$x = \frac{34+18\sqrt{\frac{83}{232}}}{\pm 13} + 6,\ y = \pm\sqrt{\frac{232}{83}} + 1.$

$A^2+2B^2=18$ вып-ся из нахождения A и B

$A^2-13AB+36B^2=0$ вып. из того, что первое вып. и по тому, какое взяли A.

т.к. $AB>0$, то $\sqrt{A^2-13AB+36B^2} = \sqrt{AB}$.

$\parallel \leftarrow$ т.к. 2ое (!).

$A-6B.$

Значит, нашли корни, решили систему.

□ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

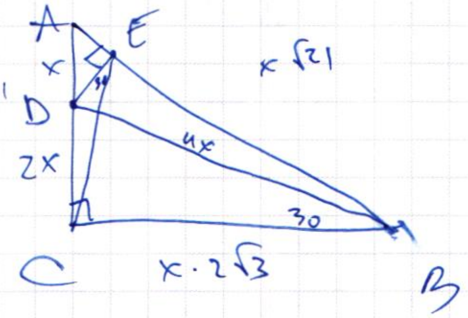
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



] $AD = x \Rightarrow AC = 3x \Rightarrow DC = 2x$.

а) $tg\angle BAC = ?$

б) $AC = \sqrt{7}$. $S_{CED} = ?$.

BCDE – вписанный, т.к. $\angle C = \angle E = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30 \Rightarrow$ в $\triangle CBD$ $\angle C = 90, \angle B = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = 2DC = 4x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по Th. Пифагора $CB = \sqrt{BD^2 - DC^2} = \sqrt{(4x)^2 - (2x)^2} =$

$= x\sqrt{16-4} = x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$.

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{x\cdot 2\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

а) Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

по Th. Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = x\sqrt{3^2 + 12} = x\sqrt{21} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{x\cdot\cancel{2}3}{x\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

~~SIG~~ $\sin\angle CDE = \sin(180 - \angle CDE) = \sin\angle ADE =$

$= \cos(90 - \angle ADE) = \cos\angle DAE = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

$\sin\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{x\cdot 2\sqrt{3}}{x\cdot\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $\triangle EDA$: $ED = AD\sin\angle A = x\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Значит, $SCDE = \frac{1}{2}CD\cdot DE\cdot\sin\angle CDE = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot x\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7} =$

$= x^2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{7}$. $x = \frac{AC}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow S_{CDE} = x^2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

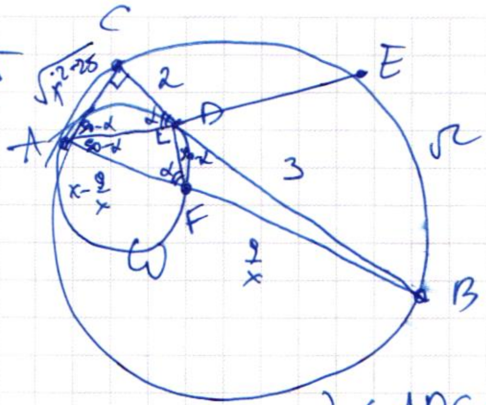
б) Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№5



$\exists AB \cap \omega = F. \Rightarrow$

$\Rightarrow AF$ - диаметр $\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADF = 90$.

$\angle ACB = 90$ (AB - диаметр Ω).

$\exists \angle ADC = \alpha \Rightarrow \angle AFD = \alpha$ (угол. между кас. и хордой).

$\angle DAC = \angle FDB = \angle DAF = 90-\alpha$ (сумма углов).

$\exists AB = x. \Rightarrow$ т.к. $BF \cdot BA = BD^2$ (степень точки отн. ω)

то $BF \cdot x = BD^2 = 9$

$BF = \frac{9}{x} \Rightarrow AF \overset{= AB - FB}{=} x - \frac{9}{x}$.

по Th. синусов в $\triangle FDB$: $\frac{BD}{\sin F} = \frac{FB}{\sin D}$

$$\frac{3}{\sin(180-\alpha)} = \frac{\frac{9}{x}}{\sin(90-\alpha)}$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{3}{x\cos\alpha}, \quad x = 3\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3\,tg\,\alpha.$$

по Th. Пифагора в $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{x^2-25}$.

$$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{x^2-25}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3\,tg\,\alpha = \frac{3\sqrt{x^2-25}}{2}.$$

$4x^2 = 9(x^2-25)$

$5x^2 = 9 \cdot 25$

$x^2 = 9 \cdot 5$

$x = 3\sqrt{5}$

$$R_\Omega = \frac{x}{2} \text{ (т.к. x - диаметр)} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

$$R_\omega = \frac{x-\frac{9}{x}}{2} = \frac{3\sqrt{5}-\frac{9}{3\sqrt{5}}}{2} = \frac{3\sqrt{5}-\frac{3\sqrt{5}}{5}}{2} =$$

$$= 3\sqrt{5}\left(\frac{1-\frac{1}{5}}{2}\right) = 3\sqrt{5}\cdot\frac{\left(\frac{4}{5}\right)}{2} = 3\sqrt{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AC = \sqrt{x^2-25} = \sqrt{9\cdot 5-25} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$AD \cdot DE = CD \cdot DB$ (степень т. D отн. Ω)

$\cancel{DE = \frac{CD\cdot DB}{AD} = \frac{2\cdot 3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}}$ $AD = \sqrt{AC^2+CD^2} = \sqrt{x^2-21} = \sqrt{45-21} = 2\sqrt{6}$

$\sin\alpha = \frac{AC}{AD} = \cancel{\frac{\sqrt{x^2-25}}{2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

$DE = \frac{CD\cdot DB}{AD} = \frac{2\cdot 3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Значит, $S\ ACEB = \frac{1}{2} AE \cdot CB \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} \cdot (AD+DE) \cdot 5 = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\cdot 5 = \frac{25\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $R_\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $R_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{2}$, $S = \frac{25\sqrt{6}}{4}$.

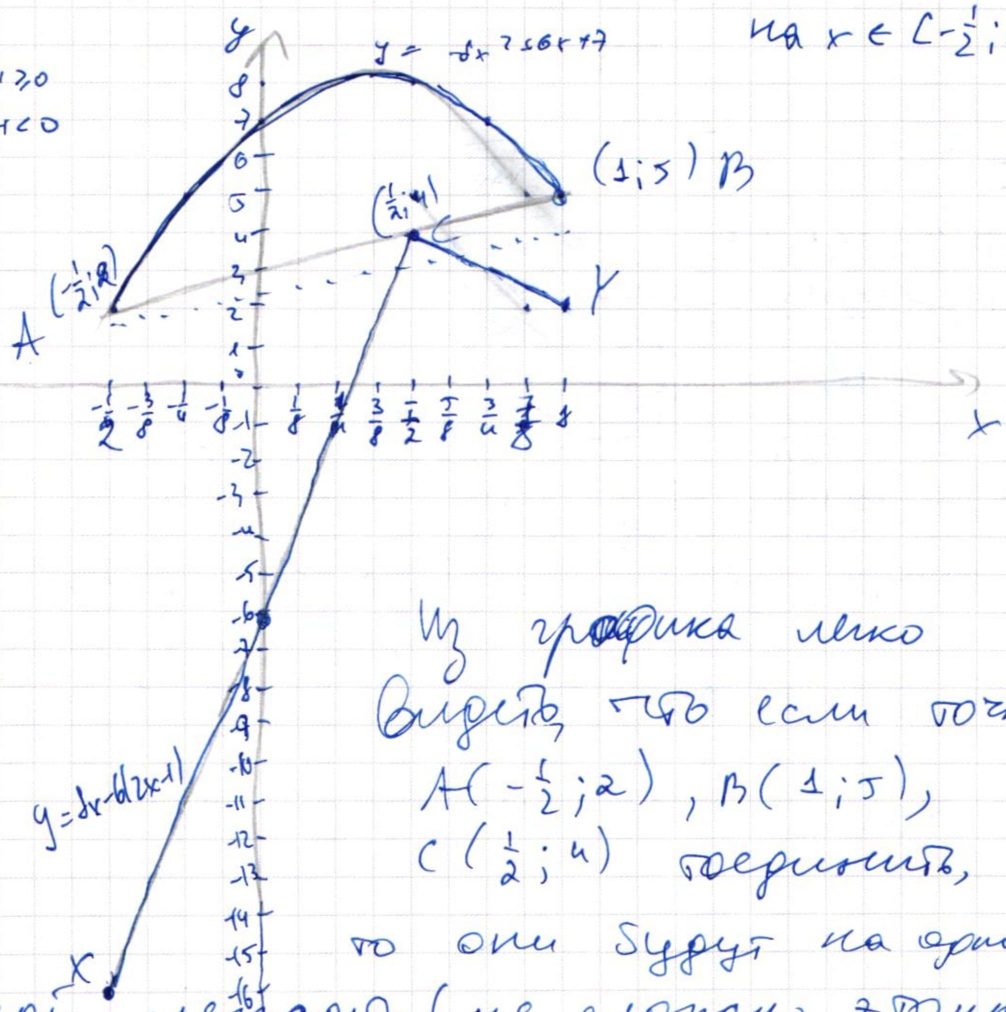
№6.

Построим графики $y = 8x - 6|2x-1|$ и $y = -8x^2+6x+7$ на $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$.

$y = 8x - 6|2x-1|$

$y = \begin{cases} 8x-6(2x-1), & 2x-1 \geq 0 \\ 8x+6(2x-1), & 2x-1 < 0 \end{cases}$

$y = \begin{cases} -4x+6, & x \geq \frac{1}{2} \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$



Из графика легко видеть, что если точки $A(-\frac{1}{2}; 2)$, $B(1; 5)$, $C(\frac{1}{2}; 4)$ соединить, то они будут на одной прямой лежать (не сложно это проверить). Точка A – „левая" точка параболы, B – „правая". C – точка, в которой второй функции „переламывается". До т. C ф-ция монотонно возрастает, после – убывает, т.к. для $x < \frac{1}{2}$ $y = 20x-6$

$x \geq \frac{1}{2}$ $y = 6-4x$.

$X(~~…~~ -\frac{1}{2}; -16)$, $Y(1; 2)$ – крайние точки второй ф-ции, то есть в точках $x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$.

$ax+b$ – прямые $(x \in R)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=ax+b$ пересекает пр. $y=-\frac{1}{2}$ в точке K. Изв-но, что K ниже A, но выше X (не строго), т.к. $8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$ в т. $x=-\frac{1}{2}$, т.к. $x\in[-\frac{1}{2};1]$.

$y=ax+b$ пересек. $y=1$ в т. L:

L ниже B, выше Y (всё ещё не строго).

Если $K=A$, $L=B$, то $C\in AB$, т.е. $C\in KL \Rightarrow$ $\Rightarrow$ выч-сл, т.к. на $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $\cup$ $(\frac{1}{2};1)$ будут строгие, в $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ не строгие знаки.

Если $K \in_{отр} AX$, но $K\neq A$ или $L\in_{отр} BY$, но $L\neq L$, то KL пересечёт $y=8x-6|2x-1|$ (можно проверить, например, параллельным переносом: если $AK<BL$, то сместим $ax+b$ на $|AK|$ вверх, тогда, т.к. $L\in BY$, L ниже B, то угл. AL наклон будет меньше, чем у AB, поэтому пересекает, поэтому и смещённой на $|AK|$ вниз пересекает (из непрерывности на отр $[\frac{1}{2};1]$). Ан-но. $AK>BL$, $AK=BL$.

Значит, $A,B,C\in$ прямой $y=ax+b$.

Теперь найдём a, b: $\begin{cases} a(-\frac{1}{2})+b=2 \\ a(\frac{1}{2})+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=3 \\ a=2. \end{matrix}$

Ответ: единственная пара $(2;3)$.

№7

$f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = f(a_1) + f(a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = \ldots = f(a_1) + \ldots + f(a_n)$

$f(1 \cdot a) = f(1) + f(a)$

$f(a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$.

$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{q}\right)$.

$0 = f(1) = f\left(\frac{x}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Q}_+ : f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Теперь пусть $\ell \in \mathbb{Q}_+ : \ell = \frac{s}{z}$ $(s \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{N}, s \neq 0)$.

$\Rightarrow s = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ (разл-ние на простые, они могут повт-ся).

$z = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$ ($z, s \in \mathbb{N}$, т.к. число полож-ое, положи-ые).

$p_i \in \mathbb{P}, q_j \in \mathbb{P}$.

$\Rightarrow f(\ell) = f\left(\frac{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_m}\right) =$

$= f\left(p_1 \cdot \frac{p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}{z}\right) = f(p_1) + f\left(\frac{p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}{z}\right) = \ldots =$

$= f(p_1) + \ldots + f(p_n) + f\left(\frac{1}{z}\right) =$

$= f(p_1) + \ldots + f(p_n) + f\left(\frac{1}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_m}\right) = f(p_1) + \ldots + f(p_n) + f\left(\frac{1}{q_1}\right) +$

$+ f\left(\frac{1}{q_2 \cdot \ldots \cdot q_n}\right) = \ldots = f(p_1) + \ldots + f(p_n) + f\left(\frac{1}{q_1}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{q_n}\right) =$

$= f(p_1) + \ldots + f(p_n) - f(q_1) - \ldots - f(q_m) =$

$= \lfloor p_1 \rfloor + \ldots + \lfloor p_n \rfloor - \lfloor q_1 \rfloor - \ldots - \lfloor q_m \rfloor$

(если $q = 1$, то просто это ноль, очевидно)

Значит, если $f(\ell) < 0$, то

$\lfloor p_1 \rfloor + \ldots + \lfloor p_n \rfloor < \lfloor q_1 \rfloor + \ldots + \lfloor q_m \rfloor$.

$f(p_1 \cdot \ldots \cdot p_n) < f(q_1 \cdot \ldots \cdot q_m)$, т.е. $f(s) < f(z)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Осталось найти, сколько x, y таких, что $2 \le x, y \le 22$ и в разл. x и y на простые это выполняется (что $f(x) < f(y)$)

Простые от 2 до 22: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

$f(p)$ принимает: 1, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 соотв.

~~1) $x = 2 \Rightarrow y = 4 \dots 22$ — 19 вариантов~~

2) $x = 3 \Rightarrow y = 4 \dots 22$ — ещё 19.

$f(x) = 1$

3) $x = 4 \Rightarrow y = 7 \dots 22$ — ещё 17.

$f(x) = 2$

4) $x = 5 \Rightarrow y = 7 \dots 22$ $+17$

$f(x) = 2$

5) $x = 6$

$f(x) = f(2) + f(3) = 2$

~~Выпишем~~ Должно $f(x) < f(y)$. Выпишем $f(x)$ для $x = 2 \dots 22$.

$f(2) = 1$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, $f(5) = 2$, $f(6) = 2$, $f(7) = 3$, $f(8) = 3$, $f(9) = 2$, $f(10) = 3$, $f(11) = 5$, $f(12) = f(2) + f(2) + f(3) = 3$, $f(13) = 6$, $f(14) = 4$, $f(15) = 3$, $f(16) = 4$, $f(17) = 8$, $f(18) = 3$, $f(19) = 9$, $f(20) = 4$, $f(21) = 4$, $f(22) = 6$.

Итого: $\underbrace{1, 1}_{2}, \underbrace{2, 2, 2, 2}_{4}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3}_{6}, \underbrace{4, 4, 4, 4}_{4}, \underbrace{5}_{1}, \underbrace{6, 6}_{2}, \underbrace{8}_{1}, \underbrace{9}_{1}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(2, 4, 6, 4, 1, 2, 1, 1)

Откуда хороших пар: $2(4+6+4+1+2+1+1)+$
$+4\cdot(6+4+1+2+1+1)+6(4+1+2+1+1)+4(1+2+1+1)+$
$+1\cdot(2+1+1)+2\cdot(1+1)+1\cdot1=$

$=2(21-2)+4(21-2-4)+6\cdot9+4\cdot5+1\cdot4+2\cdot2+1=$

$54+20+4+4+1=38+60+54+20+8+1=$

$=2\cdot19+4\cdot15+\cancel{14+6\cdot1}=\cancel{20+15+20}\ldots=38+74+9=107+74=181$

181

Ответ: ~~[illegible]~~ 181 пара

(считали так: берем в группе кол-во чисел x: в больших y, тогда к сумме $x\cdot y$, поэтому посчитали для каждой пары).

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

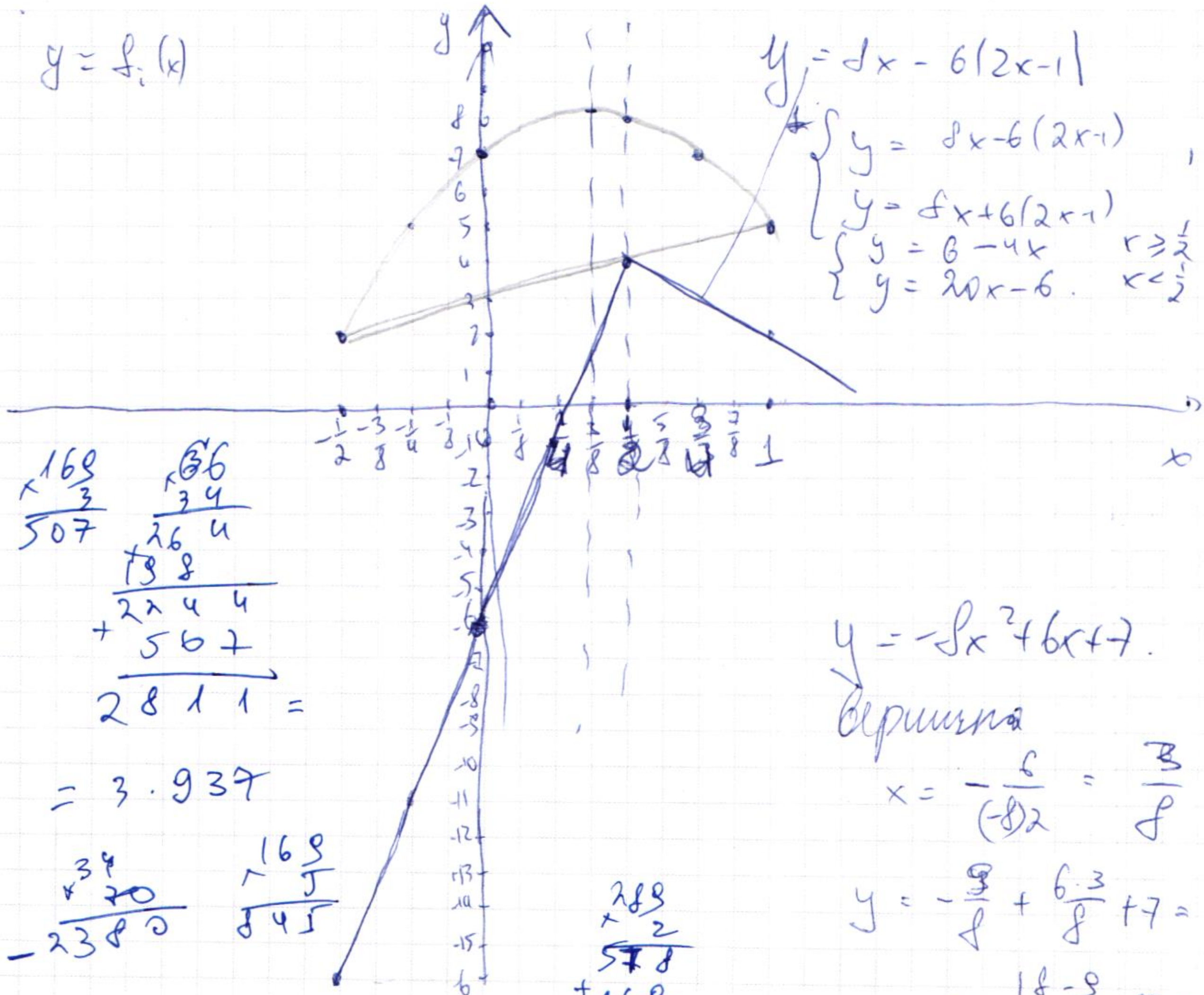
Страница № 14

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

$y = f_1(x)$



$y_1 = 8x - 6|2x-1|$

$\begin{cases} y = 8x - 6(2x-1), & 2x-1 \geq 0 \quad x \geq \frac{1}{2} \\ y = 8x + 6(2x-1) & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} y = 6 - 4x & x \geq \frac{1}{2} \\ y = 20x - 6. & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$169 \cdot 3 = 507$

$66 \cdot 34 = 264 + 198 = 2244$

$2244 + 567 = 2811 = 3 \cdot 937$

$34 \cdot 70 = 2380$

$169 \cdot 5 = 845$

$289 \cdot 2 = 578$

$578 + 169 = 747$

$747 : 9 = 83$

-72

27

$83 \cdot 9 = 747$

$y = -8x^2 + 6x + 7.$

Вершина

$x = -\frac{6}{(-8)2} = \frac{3}{8}.$

$y = -\frac{9}{8} + \frac{6 \cdot 3}{8} + 7 =$

$= \frac{18-9}{8} + 7 = \frac{9}{8} + 7$

$= 8\frac{1}{8}.$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 =$

$= -2 - 3 + 7 = 2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 =$

$= -2 + 3 + 7 = 8.$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -8 \cdot \frac{1}{4 \cdot 4} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 7 =$

$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 7 =$

$= -2 + 7 = 5$

$f(1) = -8 + 6 + 7 =$

$= 13 - 8 = 5.$

$f(0) = 7.$

$2 \cdot 17^2 + 13^2 = 88 \cdot 9 = 9^2 \cdot 3^2.$

$2 \cdot 17^2 = (27-13)(27+13) =$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = -8 \cdot \frac{9}{4 \cdot 4} + 6 \cdot \frac{3}{4} + 7 =$

$= -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 7 = 7.$

$= -\frac{9}{2} + 6 + 7 = 13 - 4,5 =$

$= 8,5.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

$f(\mathbb{Q})$.

$f(ab)=f(a)+f(b)$.

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right] \quad \forall p\in\mathbb{P}$.

? Number of $(x;y)$: $2\le xy\le 22$, $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$.

$f(a)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

$f(2\cdot2)=f(2)+f(2)=2f(2)=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(4)=2$.

$f\left(p\cdot\frac{1}{p}\right)=f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(p)=-f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right)<0$.

$f\left(p\cdot\frac{4}{p}\right)=f(p)+f\left(\frac{4}{p}\right)=2$

$f\left(\frac{4}{p}\right)=2-\left[\frac{p}{2}\right]$, $p\ge5$

$f\left(\frac{4}{p}\right)<0$.

$\Rightarrow \frac{7,11,13,17,19}{2,3,5,7,11,13,17,19}$ 6.

$168-165=102$... $168+163=232$, $232=4\cdot58=4\cdot2\cdot29$; $168-102=67$.

$f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(p\cdot\frac{1}{q}\right)=f(p)+f\left(\frac{1}{q}\right)=f(p)-f(q)$.

$f\left(\frac{p_1\dots p_n}{q_1\dots q_m}\right)=f\left(\frac{p_1}{q}\right)+\dots+f\left(\frac{p_n}{q}\right)=\sum f\left(\frac{p_i}{q_j}\right)=$

$=\sum f(p_i)-\sum f(q_j)=$

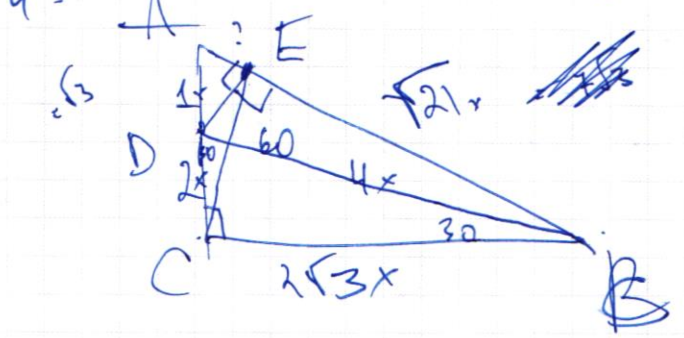
$=m\left(\sum p_i\right)-n\sum(q_j)$

всё!

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{3^2+12} = \sqrt{21}$

4.



$tg\angle A = ?$

а) $\sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow tg\angle A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

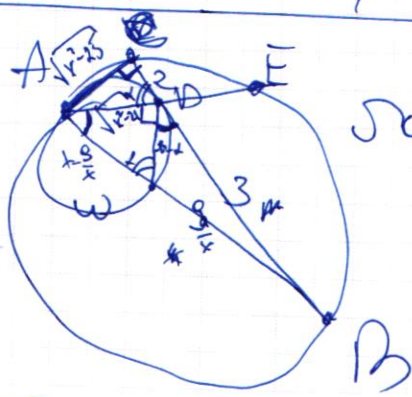
4. б) $AC = \sqrt{7} = 1$ $\quad \frac{?}{x} = \frac{\sqrt{21}}{3x}$ $\quad x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$? = \frac{3}{\sqrt{21}}x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}x = \frac{\sqrt{21}}{7}x$

$\sin\angle D = \frac{?}{x} = \frac{\sqrt{21}}{7}x$

найти $\sqrt{h}$. муф. $DE = 1$ $\quad S_{CDE} = CD \cdot DE \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\angle D$

5.



Ω $\quad r, R, S_{BACE} = ?$

$CD = 2$

$BD = 3$

$x \cdot a = 9$

$a = \frac{9}{x}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{x^2-25}{x^2-21}}$ $\quad \sqrt{\frac{x^2-25}{x^2-21}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-\frac{9}{x}}$

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ $\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{x^2-21}}{x-\frac{9}{x}}$

$\left(x-\frac{9}{x}\right)\sqrt{x^2-25} = x^2-21$

$\sqrt{1-\frac{x^2-25}{x^2-21}} = \sqrt{\frac{4}{x^2-21}}$

$\frac{\sin(90-\alpha)}{\frac{9}{x}} = \frac{\sin\alpha}{3}$ $\Rightarrow x\sqrt{\frac{4}{x^2-21}} = 3\cdot\sqrt{\frac{x^2-25}{x^2-21}} \Rightarrow 4x^2 = 9(x^2-25)$

$5x^2 = 9\cdot 25 \Rightarrow x^2 = 5\cdot 9$

$x = 3\sqrt{5}$

$18^2(2\cdot 34-18)^2 - 4\cdot 18^2(34^2-2+13^2) = 18^2(2\cdot 34 - 13^2)$

$A^2 = 18 - 2B^2$

$A^2 - 34AB^2 - 18 + 36B^2 = 0$

$A^2 - 13B \cdot \frac{34B^2-18}{13B} + 36B^2 = 0$

$A^2 - 134AB + 36B^2 = 0$

6. $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

1) $8x - 6|2x-1| \le -8x^2+6x+7$

$2x - 6|2x-1| \le -8x^2+7$.

$1 \le -8\cdot\frac{1}{4}+7$. $\quad 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 6\cdot 2 \le -8\cdot\frac{1}{4}+7$

$\cdot 1 \le b \le 7 \quad (x=0)$.

$\Rightarrow -6 \le b \le 7$

если $x \ne -\frac{b}{a}$.

$-8x^2 + x(6-a) + 7 - b \ge 0$.

$D = (6-a)^2 + 4\cdot 8(7-b)$

$x = \dfrac{-(6-a) \pm \sqrt{(6-a)^2 + \underbrace{4\cdot 8(7-b)}_{\ge 0}}}{-2\cdot 8}$

$x_1 = \dfrac{-(6-a) + \sqrt{(6-a)^2 + 4\cdot 8(7-b)}}{-2\cdot 8}$

$-8x^2+6x+7$.

$2ax+b=0$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2\cdot 8} = \frac{3}{8}$.

$x=1$

$8-6 \le a+b \le -8+6+7$.

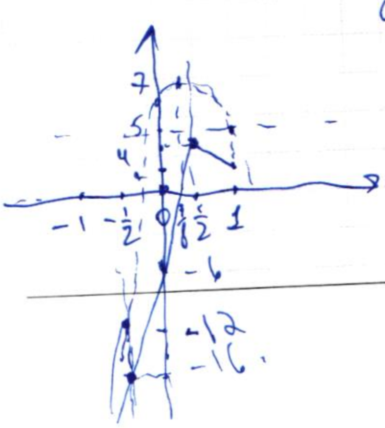
$-2 \le a+b \le 5$.

$-8\cdot\frac{1}{2}-6\cdot 2 \le -\frac{1}{2}a+b \le -8\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{2}+7 = -2+3+7 = 8$.

$-16 \le -\frac{1}{2}a+b \le 2$

$a \ge -2-b \ge -2-7 = -9$.

$a \le 5-b \le 5-(-6) = 11$.



1) $2x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2}$ и

$8x - 6(2x-1) = 6-4x$.

2) $8x+6(2x-1) = 20x-6$.

$x=\frac{1}{2} = 6-2 = 4$.

$x=1 = 6-4 = 2$.

$2\sqrt{2}(A-6B)^2 = 2\sqrt{2}AB$,

$A+B\sqrt{2}$

$(A+B\sqrt{2})^2 = 18$.

$A^2 + 2\sqrt{2}AB + 2B^2 = 18 + 2\sqrt{2}AB$.

$(A+B\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}(A-6B)^2 = 18$

$(A+B\sqrt{2})^2 - (8A-48B)^2 = 18$.

$(A+B\sqrt{2} - 8A + 48B)(A+B\sqrt{2}+8A-48B) = 18$.

$A - 6B = \sqrt{AB} \Rightarrow A > 6B$.

$A^2 - 13AB + 36B^2 = 0$.

$A^2 - A(34B^2+18) + 36B^2 = 0$.

$A^2 = 2B^2 - 18 =$

$A^2 = 18 - 2B^2 \Rightarrow 18 - 2B^2 - 13AB + 36B^2 = 0$.

$A = \dfrac{34B^2+18}{13B}$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$aq^2 = ?$

1. a, b, c ; $a = a$, $b = aq$, $c = aq^2$

$\Rightarrow a \cdot x^2 - 2aqx + aq^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot (aq^3)^2 - 2aq(aq^3) + aq^2 = 0 \;\Big|\; : a \cdot q^2.$

$a^2q^4 - 2aq^2 + 1 = 0$

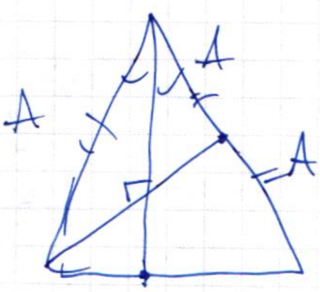
$aq^2 = d.$

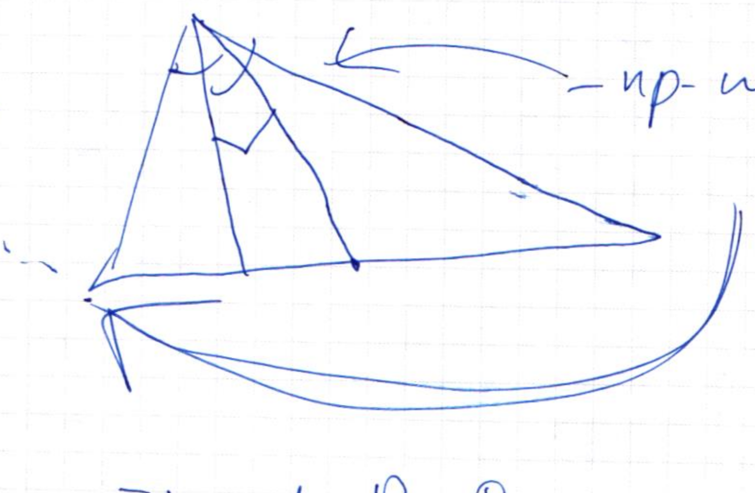
$d^2 - 2d + 1 = 0$

$(d-1)^2 = 0 \Rightarrow d = 1.$

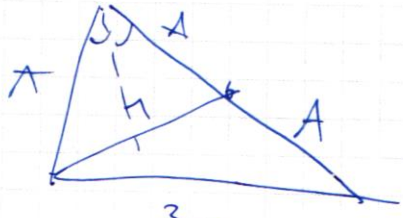
$D = 900 . \quad A, B, C \in N.$

2.





— пр-ие.



$\Rightarrow 3A + B = 900 \Rightarrow$

$\Rightarrow B = 3C \Rightarrow$

$\Rightarrow A + C = 300 .$

$3A > 3C \Rightarrow A > C.$

$2A + 3C > A$ - очев.

$A + 3C > 2A \Rightarrow 3C > A \Rightarrow$

$\Rightarrow 4C > A + C = 300 \Rightarrow C > 75 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 76 \ldots 149$

$149 - 75$ вар-ов .

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3. $$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$2(y^2-2y+10) = 2(y^2-2y+1)$$

$$x^2-12x+18 = x^2-12x+16+2 =$$

$$2\cdot1\cdot6 = x^2-$$

$$x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)-18=0$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0.$$

$$(x-6y)\left(x-\frac{1}{3}y\right)=x^2+2y^2-\frac{1}{3}xy-6xy=$$

$$=x^2+2y^2-6\frac{1}{3}xy.$$

$$x^2-12xy+36y^2=\cancel{xy}-6y-x+6.$$

$$(x-6)(y-1)$$

$$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}. \qquad x-6=A.$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2=18. \qquad y-1=B.$$

$$x-6y=x-6-6(y-1)=$$

$$=A-6B=>$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A-6B=\sqrt{AB}. \\ A^2+2B^2=18. \end{cases} \qquad AB>0.$$

$$\begin{cases} A^2-12AB+36B^2=AB \\ A^2+2B^2=18. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^2-13AB+36B^2=0 \\ A^2-18+2B^2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow 34B^2-13AB+18=0.$$

$$A=\frac{34B^2+18}{13B}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{34B^2+18}{13B}-6B=\sqrt{\frac{34B^2+18}{13}} \\ \left(\frac{34B^2+18}{13B}\right)^2+2B^2=18. \end{cases}$$

... капитал.

$135 < 13\cdot3\sqrt{11}$

$45 < 13\sqrt{11}$

$45^2 < 169\cdot11$

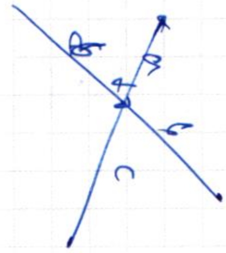
$45\cdot45=2025$

$169\cdot11=1859$

$\frac{1}{2}bc\sin\alpha(a+c)$

$\frac{1}{2}ac\sin\alpha(a+c)+\frac{1}{2}bc\sin\alpha(a+c)$

$\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\alpha$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)