

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
- [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
- [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

- [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$

$$ad^2 + 2bd + c = a \cdot a^2 q^6 + 2 \cdot aq \cdot aq^3 + aq^2 =$$

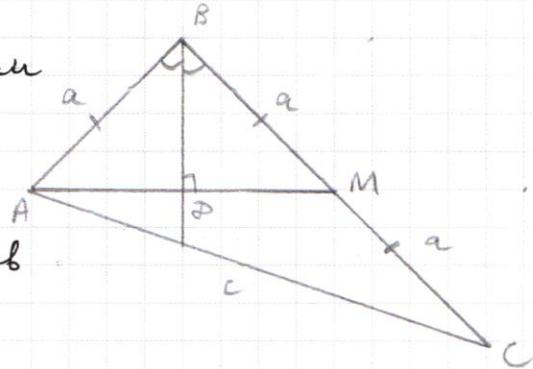
$$= a^3 q^6 + 2a^2 q^4 + aq^2 = 0 \quad (: aq^2) \text{ м.к. } a \neq 0, q \neq 0$$

$$a^2 q^4 + 2aq^2 + 1 = 0, \quad aq^2 = c \Rightarrow c^2 + 2c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$$

(c+1)² = 0

Ответ: -1.

2. Не учитывая общности можем
допустить, что $BD \perp AM$
диск. мед.



BD - диск. и перпендикуляр к AM в

$$\triangle ABM \Rightarrow AB = BM = MC$$

$$AB \equiv a, \quad AC \equiv c$$

$$a + 2a = 3a \succ c, \quad a + c \succ 2a \Rightarrow c \succ a, \quad c + 2a \succ a - \text{прав.}$$

$a + c \succ 0$

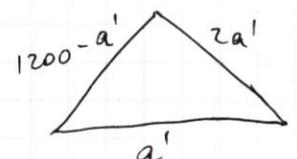
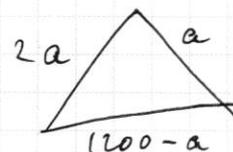
(Значит стороны треугольника) Из неравенства $a < a$,

$$a + 2a + c = 1200 \Rightarrow c = 1200 - 3a$$

$$\begin{cases} 3a \succ c \\ a \prec c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a \succ 1200 - 3a \\ a \prec 1200 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow a \in (200; 300)$$

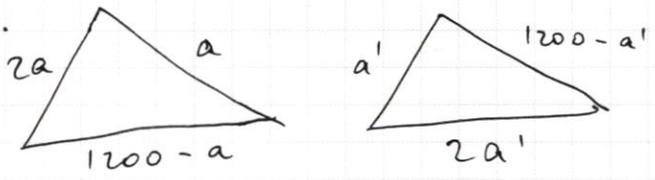
Посмотрим два равных треугольника. $a \neq a'$

$$\begin{cases} 2a = 1200 - a' \\ a = 2a' \\ 1200 - a = a' \end{cases} \Rightarrow a' = \frac{1200}{5} = 240$$



$a = 960 \neq 2a' \Rightarrow$ такого быть не может

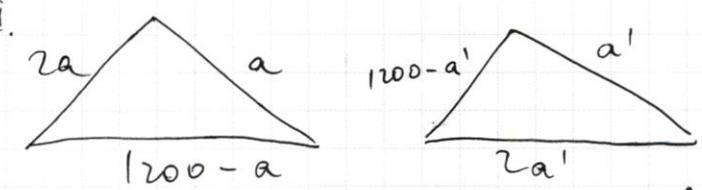
II.



$$\begin{cases} a' = 2a \\ 1200 - a' = a \\ 2a' = 1200 - a \end{cases} \Rightarrow a = 400, \text{ что}$$

может не может быть

III.



и подобные случаи
очевидным способом
исверны, потому что $a \neq a'$
 $2a > a$
и т.д.

Значит, для каждого a^* есть уникальный
треугольник. $a \in [201; 299] \Rightarrow$ число Δ в $299 - 201 + 1 =$
 299

Ответ: 99.

3. $y - 2x = \sqrt{x(y-2) - (y-2)} = \sqrt{(x-1)(y-2)}$: $x-1 \equiv a$, а в то
 $y-2 \equiv b$

$$y - 2x = y - 2 - 2(x-1) = b - 2a = \sqrt{ab}$$

$$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 - 3 = 2(x^2 - 2x + 1) + (y-2)^2 = 3 =$$

$$= 2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 2a^2 + b^2 - 3 = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$\begin{cases} ab = b^2 + 4a^2 - 4ab \\ 0 = b^2 + 2a^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow ab = 2a^2 - 4ab + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{2a^2 + 3}{5a} \quad (a \neq 0, \text{ что можно сделать из того, что при } a=0, 3=0 \text{ - неверно})$$

$$\frac{4a^4 + 9 + 12a^2 + 50a^4}{25a^2} = 3$$

$$54a^4 + 12a^2 - 75a^2 + 9 = 54a^4 - 63a^2 + 9 = 0$$

$$6a^4 - 7a^2 + 1 = 0$$

$$t \equiv a^2 \Rightarrow 6t^2 - 7t + 1 = 0, D = 49 - 24 = 25$$

$$t_1 = \frac{7-5}{12} = \frac{1}{6}, \quad t_2 = \frac{7+5}{12} = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. прог.

$$1) t = \frac{1}{b} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{b}}{b}$$

$$1.1. a = \frac{\sqrt{b}}{b} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot \frac{1}{b} + 3}{\frac{5}{\sqrt{b}}} = \frac{\frac{1}{3} + 3}{\frac{5}{\sqrt{b}}} = \frac{10\sqrt{b}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{b}}{3}, a \cdot b \geq 0 \Rightarrow \Rightarrow \text{удов.}$$

$$1.2. a = -\frac{\sqrt{b}}{b} \Rightarrow b = -\frac{2\sqrt{b}}{3} - \text{удов.}$$

$$2) t = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$2.1. a = 1 \Rightarrow b = \frac{2+3}{5} = 1 - \text{удов.}$$

$$2.2. a = -1 \Rightarrow b = -1 - \text{удов.}$$

$$1.1. x = a + 1 = \frac{\sqrt{b} + b}{b}, y = b + 2 = \frac{2\sqrt{b} + b}{3}$$

$$1.2. x = \frac{-\sqrt{b} + b}{b}, y = \frac{-2\sqrt{b} + b}{3}$$

$$2.1. x = 2, y = 3$$

$$2.2. x = 0, y = 1$$

$$y - 2x \geq 0 \Rightarrow y \geq 2x. \text{ Проверка. } 1.1. \frac{2\sqrt{b} + b}{3} \geq \frac{\sqrt{b} + b}{3}, - \text{ да;}$$

$$1.2. \frac{b - 2\sqrt{b}}{3} \leq \frac{b - \sqrt{b}}{3} - \text{ нет, } 2.1. 3 \not\geq 4 - \text{ нет, } 2.2. 1 \geq 2 - \text{ да}$$

Ответ: $(0; 1), \left(\frac{b + \sqrt{b}}{b}; \frac{b + 2\sqrt{b}}{3}\right)$:

$$\text{Угол } \angle CBA = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle HCB = \alpha$$

$$AD = 3x$$

$$\frac{AD}{AD+DC} = \frac{3}{5} = \frac{3x}{3x+DC} \Rightarrow 15x = 9x + 3DC \Rightarrow DC = 2x$$

$$\begin{array}{l} CH \perp AB \\ DE \perp AB \end{array} \Rightarrow CH \parallel DE, \angle DEC = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle HEC = \angle ECH = 45^\circ \Rightarrow CH = EH$$

$$AE = 3x \cos \alpha \Rightarrow EH = CH = 2x \cos \alpha$$

$$\cancel{AB} = \frac{CH}{\cos \alpha} = 2x \Rightarrow HB = 2x \sin \alpha$$

$$\cancel{CB} \sin \alpha = AB \Rightarrow 5x \cos \alpha + 2x \sin \alpha =$$

$$CH = 2x \cos \alpha = AC \sin \alpha = 5x \sin \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\delta) 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \\ &= \frac{1}{\frac{4}{25} + 1} = \frac{25}{29} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}, \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

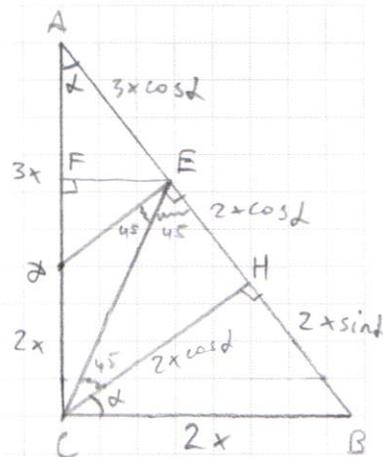
$$AE = 3x \cos \alpha = 3; \quad ED = 3x \sin \alpha = 3 \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$$

$$S_{AED} = \frac{AE \cdot DE}{2} = \frac{3 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{S_{AED}}{S_{AEC}} = \frac{AD \cdot EF}{DC \cdot EF} = \frac{AD}{DC} = 1,5 \Rightarrow S_{AEC} = \frac{2}{3} S_{AED} = \frac{6}{5}$$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$,

б) $\frac{6}{5}$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

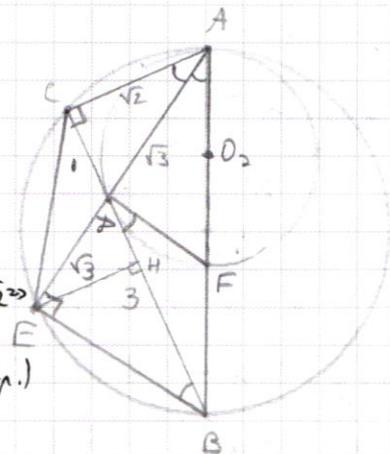
5. По lemma Архимеда, $\angle EAE = \angle DAB$

Пл. к. BC касается окружности ω ,
 $\angle FDB = \angle DAF$

AD - диаметр в $\triangle ACB \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{3}$

$$AC = x \Rightarrow AB = 3x \Rightarrow 9x^2 = x^2 + 16 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AB = 3\sqrt{2}, R_1 = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (больш. окр.)}$$



$$AD = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}. \quad ED = y, \quad CD \cdot DB = ED \cdot AD \Rightarrow y\sqrt{3} = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

$$\angle EBC = \frac{\angle EC}{2} = \angle CAE \stackrel{?}{=} \angle FDB \Rightarrow AF \parallel EB \Rightarrow \triangle ADF \sim$$

$$\sim \triangle AEB \text{ (по углам)} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow AF = R_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ (F и } O_1 \text{ на самом деле совпадают)}$$

$$EB = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{18 - 12} = \sqrt{6}$$

$$S_{EBA} = \frac{ED \cdot EB}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{S_{CED}}{S_{EDB}} = \frac{CD \cdot EH}{DB \cdot EM} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{CED} = \frac{S_{EDB}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad S_{ACB} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 2\sqrt{2}$$

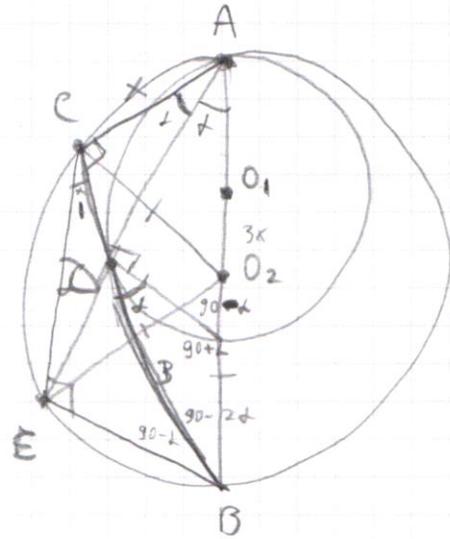
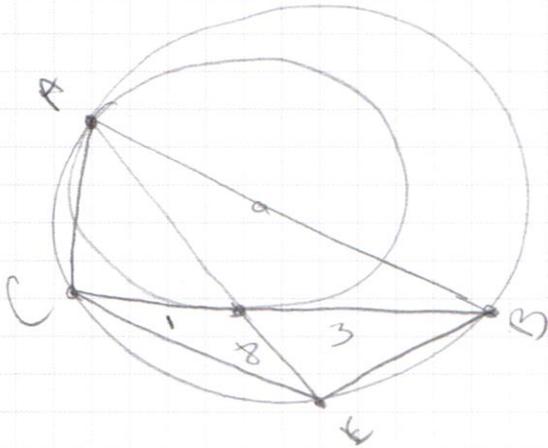
$$S_{BAE} = S_{ACB} + S_{CED} + S_{EDB} = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Ответ: $R_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2},$

$$R_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$S = 4\sqrt{2}.$$

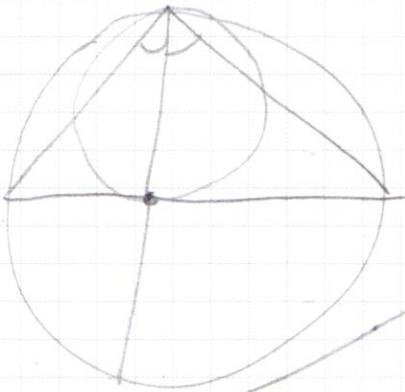
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$9x^2 = x^2 + 16$$

$$8x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{2}$$



$$2x^2 - x - 1$$

$$x_0 = \frac{1}{4}$$

$$y_0 = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$$

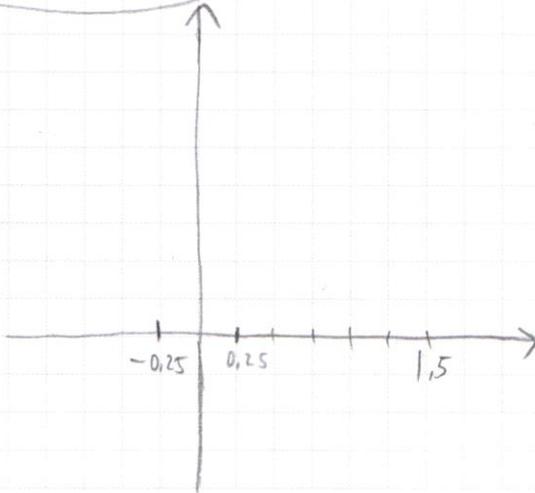
$$= \frac{1 - 2 - 8}{8} = \frac{-9}{8}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 =$$

$$= \frac{1+2-8}{8} = \frac{-5}{8}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 =$$

$$= \frac{9-6-4}{8} = \frac{-1}{8}$$



$$2x^2 - (a+1)x - (b+1) \leq 0$$

$$(3) \quad y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2 \quad (\text{привести})$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$$

$$y^2 + 2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4y + \frac{2x^2 - 4x + 3}{a} = 0$$

$$y = \frac{\pm \sqrt{16 - 4a} + 4}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - a}$$

$$4 - a \geq 0$$

$$4 - a = 1 - 2x^2 + 4x \geq 0$$

$$x(y - 2) - (y - 2) = (x - 1)(y - 2) \leftarrow$$

$$1) y = 2 + \sqrt{4 - a} \quad y^2 = 8 - a + 4\sqrt{4 - a}$$

$$\left(2x^2 + 4 + 4 - a + 4\sqrt{4 - a} - 4x - 8 - 4\sqrt{4 - a} + 3 = 0 \right)$$

$$2x^2 + 8 - 4x - 2x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$4 + 4 - a + 4\sqrt{4 - a} + 4x^2 - 8x - 4x\sqrt{4 - a} + 2x + 2 + \sqrt{4 - a} - 2 = 0$$

$$= 8 - a + 5\sqrt{4 - a} + 4x^2 - 6x - 4x\sqrt{4 - a} = 0$$

$$\rightarrow 8 - a + 4\sqrt{4 - a} - 10x - 5 + \sqrt{4 - a} + 4x^2 + 2x + 2 + \sqrt{4 - a} = 0$$

$$8 - a + 5\sqrt{4 - a} - 5 + \sqrt{4 - a} - 10x + 4x^2 = 0$$

$$5\sqrt{4 - a}(1 - x) = -4x^2 + 8x - 8 + a = -4x^2 + 8x - 8 + 2x^2 - (-4x + 3)$$

$$= -2x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$5xy + 4y + 4x^2 + 2x + y - 2 - 2x^2 + 4x - 3 = 2x^2 + 6x + 5y + 5xy - 5 = 0$$

$$y(5 + 5x) = \frac{5 - 2x^2 + 6x}{5(x + 1)}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\sqrt{\frac{6}{9}}$$

$$\frac{2\sqrt{6} + 6 - \sqrt{6} - 6}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a, b = aq, c = aq^2, d = aq^3$$

$$ad^2 + 2bd + c = a \cdot a^2 q^6 + 2aq^2 a q^3 + aq^2 = 0 \quad (: aq^2)$$

①

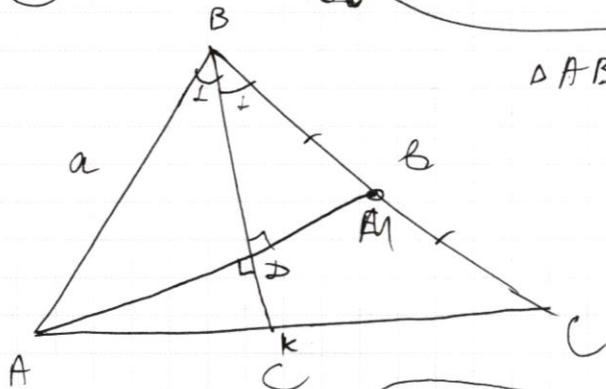
$$a^2 q^4 + 2aq^2 + 1 = 0$$

$$aq^2 = t$$

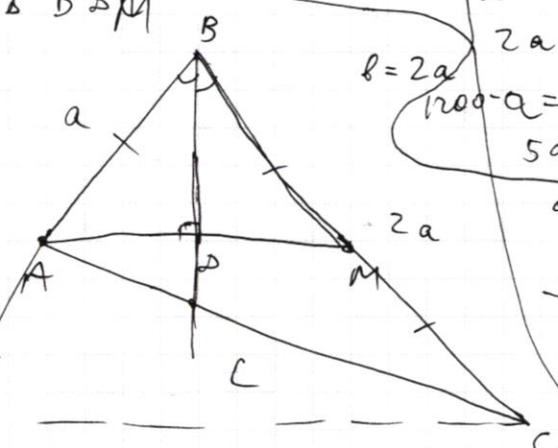
$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$t = -1$$

② $a + b + c = 1200$



$\triangle ABD = \triangle B \Rightarrow M$



$$\begin{aligned} a &= 2a' \\ 2a &= 1200 - a' \\ 1200 - a &= a' \\ 5a' &= 1200 \\ a' &= 60 \\ \frac{1200}{5} &= 240 \\ \frac{240}{3} &= 80 \end{aligned}$$

$(a, 2a, c)$

$$3a + c = 1200$$

$$3a \leq 1200 - 1$$

$$c = 1200 - 3a$$

$$\begin{cases} a \leq c \Rightarrow 3a \leq 3c \\ 3a \geq c \end{cases}$$

$$3a \in (c; 3c)$$

$$a \in \left(\frac{c}{3}; c\right)$$

$$\begin{cases} a + c \geq 2a \\ c \geq a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a \geq c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2a &\dots 299 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (99) \text{ шт} \end{aligned}$$

$a +$

$$\begin{cases} 2a + c \geq a \\ a + c \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq 1200 - 3a \\ 3a \geq 1200 - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 300 \\ a \geq 200 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3a + c &= c + c = 2c = 1200 \Rightarrow c = 600 \\ &= 2c \Rightarrow c = 300 \end{aligned}$$

$$y^2 = \frac{(2x^2 - 6x - 5)(2x^2 - 6x - 5)}{25(x^2 + 2x + 1)} = \frac{4x^4 - 12x^3 - 10x^2 - 12x^3 + 36x^2 + 30x - 10x^2 + 30x + 25}{25x^2 + 50x + 25}$$

$$= \frac{4x^2 - 24x^3 + 16x^2 + 60x + 25}{25x^2 + 50x}$$

$$a \equiv x - 1, \quad b \equiv y - 2$$

$$\frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$y - 2x = y - 2 - 2(x - 1) = b - 2a$$

$$\boxed{b - 2a = \sqrt{ab}}$$

$$2(x^2 - 2x + 1) = 2(x - 1)^2$$

$$y^2 - 4x + 4 = (y - 2)^2$$

$$\dots = 2(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 3 = \boxed{2a^2 + b^2 - 3 = 0}$$

$$\begin{cases} ab = b^2 + 4a^2 - 4ab \\ 0 = b^2 + 2a^2 - 3 \end{cases}$$

$$ab = 2a^2 - 4ab + 3$$

$$\frac{2a^2 + 3}{5a} = b$$

$$\frac{4a^4 + 9 + 12a^2 + 50a^4}{25a^2} = 3$$

$$54a^4 - 63a^2 + 9 = 0$$

$$6a^4 - 7a^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = 49 - 24 = 25$$

$$a^2 = \frac{7 \pm 5}{12}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ -12 \\ \hline 63 \end{array}$$

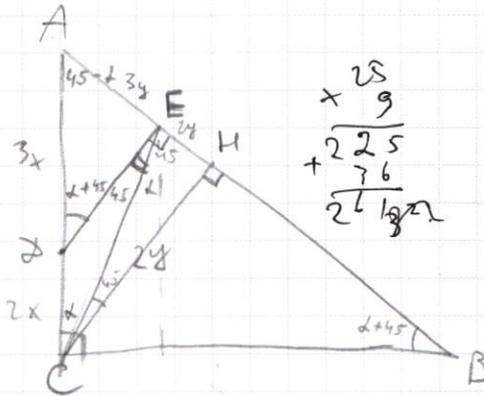
$$\begin{array}{r} 1 \quad x \quad 3 \\ \hline 3 \\ \hline 89 \\ \hline 63 \\ \hline 2079 \\ \hline 189 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$1 = \sqrt{2-1}$$

$$1 - 4 + 3 = 0$$

$$1 = \sqrt{6 - 4 - 5 + 2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 9 \\ \hline + 225 \\ 76 \\ \hline 261 \end{array}$$

$$\frac{2x}{\sin \alpha} = 2x \sin \alpha + 5 + \cos \alpha$$

$$\frac{2x}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg} \alpha + 5$$

$$\frac{261}{21} = 12.42857$$

$$2 + \cos \alpha = 5 \sin \alpha$$

$$\frac{87}{27} = 3.2$$

$$\frac{86 + 225}{25} = \frac{311}{25} = 12.44$$

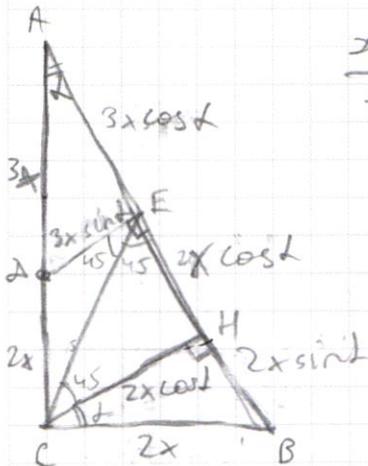
$$9 + \frac{36}{25} = \frac{225 + 36}{25} = \frac{261}{25}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{CE}{BC}$$

$$t = \sqrt{4y^2 + z^2}$$

$$\frac{AE}{t} = \frac{3y}{5z} \Rightarrow AE = \frac{3y}{5z} \sqrt{4y^2 + z^2}$$

$$= \frac{9 \cdot 29}{25} = \frac{261}{25}$$



$$AE^2 + 2x^2 + 2 \cos \alpha \cdot AE \cdot 2x = 8y^2$$

$$\frac{9}{25} \frac{y^2}{z^2} (4y^2 + z^2) + 2x + \frac{12}{5} \frac{xy}{z} \sqrt{4y^2 + z^2} = 8y^2$$



$$\cos(180 - \beta) = -\cos \beta = -\sin \alpha$$

$$\left(y \left(5 + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \right)^2 = 25x^2 + \left(\frac{5x}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2$$

$$y^2 \left(25 + \frac{20}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = 25x^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right)$$

$$2x \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha (5 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)$$

$$5 \sin^2 \alpha = 2 \cos \alpha$$