

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
- [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
- [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

- [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

№1.

По опр. геометрической прогрессии, $a = \frac{c}{k^2}$; $b = \frac{c}{k}$; $x = c \cdot k$

Подставим это в уравнение.

$$\frac{c}{k^2} \cdot c \cdot k^2 + \frac{2c}{k} \cdot c \cdot k + c = 0$$

$$c^3 + 2c^2 + c = 0$$

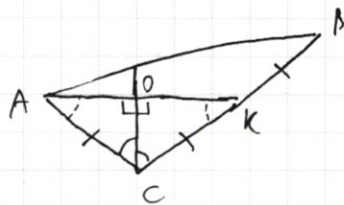
$$c(c^2 + 2c + 1) = 0$$

$$\begin{cases} c = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Если $c = 0$, прогрессия будет иметь вид "0, 0, 0, 0", а это ей не является.

Ответ: третий член = -1

№2.



Пусть CO - бисс., AK - медиан.

$$\text{Тогда } \angle KAC = \angle AKC = 180^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AKB$$

Отсюда $\triangle AKC$ - р/б ($AC = CK$)

$$\text{Сторона } BC = 2AC$$

По неравенству треугольников, $AB < AC + CB$

Отсюда мин. значение для $AC = 207$

$$(BC = 402; AB = 597)$$

AC можно увеличивать, пока сторона $AC + AB < BC$.

~~Стр~~ $AC + AB = BC$, когда $AC = 300$

$$(BC = 600; AB = 300)$$

Таким образом, треугольников будет столько же, сколько и чисел

от 207 до 300 - 93

Ответ: 93 треугольников

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$D = 4b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{-ka \pm \sqrt{k^2 a^2 - k^2 a^2}}{a} =$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ 1 & 2 & 4 & \end{array}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{0}}{a}$$

$$= \frac{-ka}{a} = -k$$

1 2 4

2 4 8

$$b = ka$$

$$c = k^2 a$$

$$4x^2 + 8x + 8 = 0$$

$$a = a$$

$$b = a \cdot k$$

$$c = a \cdot k^2$$

$$d = -k$$

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$ax^2 + 2akx + ak^2 = 0$$

$$-0,25x^2 - k - 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 = -3$$

$$D = 4a^2 k^2 - 4a^2 k^2 = 0$$

$$x = \frac{-2ak}{2a} = -k$$

$$-k = a \cdot k^3$$

$$a \cdot k^3 + k = 0$$

$$k(ak^2 + 1) = 0$$

$$k = 0$$

$$k = -2$$

$$a = -0,25$$

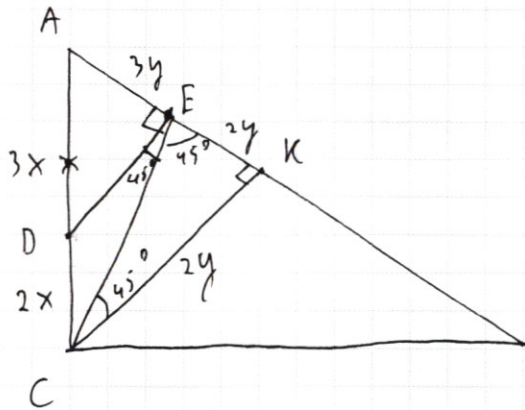
$$-0,25 \quad 10,5 \quad -1$$

$$a = \frac{c}{k^2}; \quad b = \frac{c}{k}; \quad x = ck$$

$$\frac{c}{k^2}x^2 + \frac{2c}{k}x +$$

✓ч.

ΔABC :
 $\angle ACB = 90^\circ$
 $AD:AC = 3:5$
 $DE \perp AD$
 $DE \perp AC$
 $EC \perp AD$
 $\angle CED = 45^\circ$
 $\tan(\angle DAC) = ?$



Проведем из E прямую
 $CK \parallel DE$.

По теореме о пропорциональ-
 ных отрезках,
 $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EK}$

Пусть $AE = 3y$, $EK = 2y$
 $AD = 3x$, $DC = 2x$

$$\angle KEC = 90^\circ - \angle DEC = 45^\circ$$

$$\angle ECK = 180^\circ - \angle CEK - \angle CKE = 45^\circ$$

Отсюда $\triangle CKE$ - р/б, $EK = CK = 2y$

По т. Пифагора, $DE = \sqrt{9x^2 - 9y^2} = 3\sqrt{x^2 - y^2}$

$\left. \begin{array}{l} \angle A - \text{общий} \\ \angle AED = \angle ACK \end{array} \right\} - \triangle DEA \sim \triangle CKA$

$$\frac{CK}{DE} = \frac{CA}{DA} \quad \frac{2y}{3\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{5x}{3x}$$

$$\tan \angle DAC = \frac{DE}{AE} = \frac{3\sqrt{x^2 - y^2}}{3y} =$$

$$= \frac{3\sqrt{\frac{4}{25}y^2}}{3y} = \frac{6}{5y} = \frac{2}{5}$$

$$5y = 15\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$36y^2 = 225x^2 - 225y^2$$

$$261y^2 = 225x^2$$

$$\sqrt{261}y = 15x$$

$$3\sqrt{29}y = 15x$$

$$x = \frac{\sqrt{29}}{5}y \quad \left(y = \frac{5x}{\sqrt{29}}\right)$$

~~Ответ: $\frac{2}{5}$~~

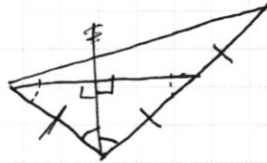
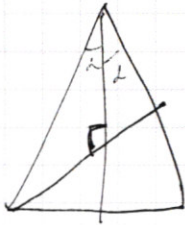
$$S_{CED} = S_{CKA} - S_{CKE} - S_{DEA} = 5y^2 - 2y^2 - \frac{1}{2}(3y \cdot 3\sqrt{x^2 - y^2}) =$$

$$= 3y^2 - \frac{1}{2}(3y \cdot 3 \cdot \frac{2}{5}y) = 3y^2 - \frac{1}{2}(9y^2) = 3y^2 - \frac{9}{2}y^2 = 3y^2 - 4,5y^2 = -1,5y^2$$

$$= -3y - 1,8y^2 = 1,2y^2 = \frac{25x^2}{29} \cdot 1,2 = \frac{25 \cdot 29}{29 \cdot 29} \cdot 1,2 = 1,2$$

$$\text{ОТВЕТ: } \alpha) \frac{2}{5} = 0,4 \quad \beta) \frac{6}{5} = 1,2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(\sqrt{4})^2 = 4$$

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

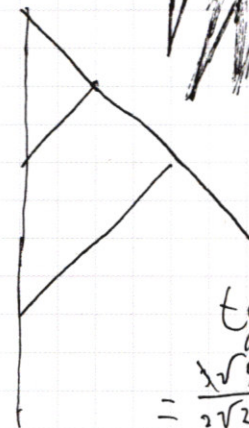
$$\sqrt{-1} = i$$

$$i^2 = -1$$

$$(y-2x)^2 = xy-2x-y+2$$

$$y^2 + 2xy - 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$y^2 + 2xy - 4x^2$$

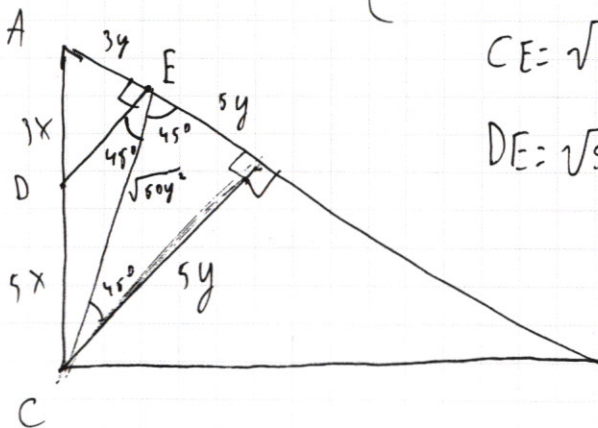
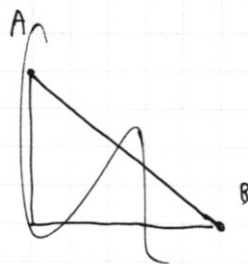


$$\operatorname{tg} \angle DAC = \frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{\frac{75}{8}y^2}}{3y}$$

$$= \frac{\sqrt{75}y}{2\sqrt{2} \cdot 3y} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{83}}{2\sqrt{2}} y^2 = x^2$$

$S_{CED} =$



$$CE = \sqrt{50y^2} = 5y\sqrt{2}$$

$$DE = \sqrt{9x^2 - 9y^2} = 3\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$\frac{5y}{3\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{8}{3}$$

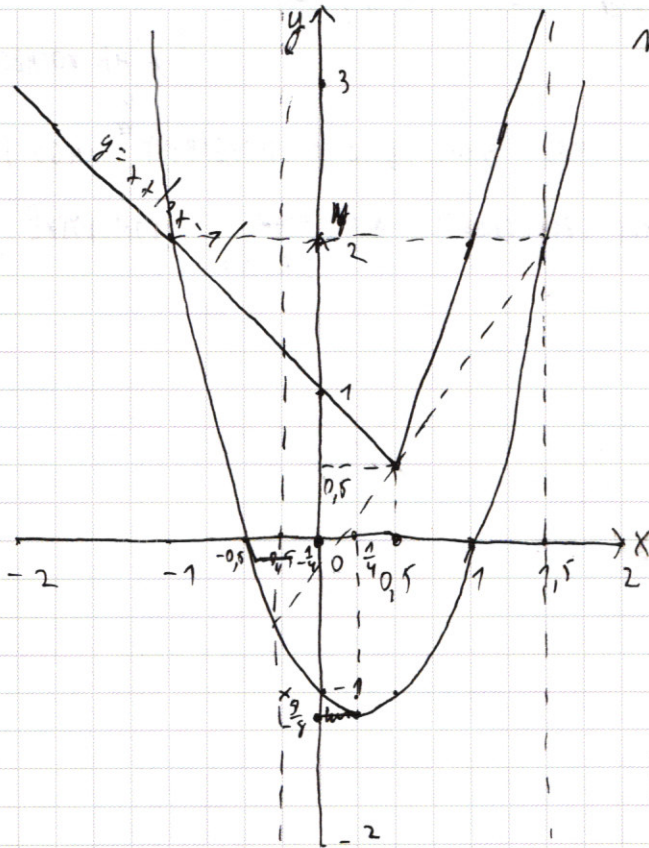
$$249y^2 = 24x^2$$

$$10,375y^2 = x^2$$

$$15y = 24\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$225y^2 = 24x^2 - 24y^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



√6

Построим ГРАФИК ФУНКЦИИ;

$$y = x + |2x - 1|$$

$$|2x - 1| = 0$$

$$x = 0,5$$

$$x = 0,5 \Rightarrow y = 0,5 + 0 = 0,5$$

$$x \geq 0,5 \Rightarrow$$

$$x \geq 0,5: y = 3x - 1$$

$$x < 0,5: y = -x + 1$$

Построим ГРАФИК ПАРАБОЛЫ:

$$y = 2x^2 - x - 1$$

$$x_D = \frac{1}{4}$$

$$y_D = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$$

$$\text{КОРНИ: } 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1; -0,5$$

$$x = 0; y = -1$$

$$x = 1,5; y = 2$$

$$x = -1; y = 2$$

Проведём прямую через точки

$$(0, -1), (0,5, 0,5) \text{ и } (1,5, 2)$$

Заметим, что если ОКА попадёт

на точку, лежащую на параболе с координатой $x = \frac{1}{4}$, пара a и b будет

всего одна. Проверим это.

$$\begin{cases} 0,5 = 0,5a + b \\ 2 = 1,5a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1,5 \\ b = -0,25 \end{cases}$$

Подставим эти значения в формулу параболы. $-0,25 = 2 \cdot 1,5^2 - 1,5 - 1$

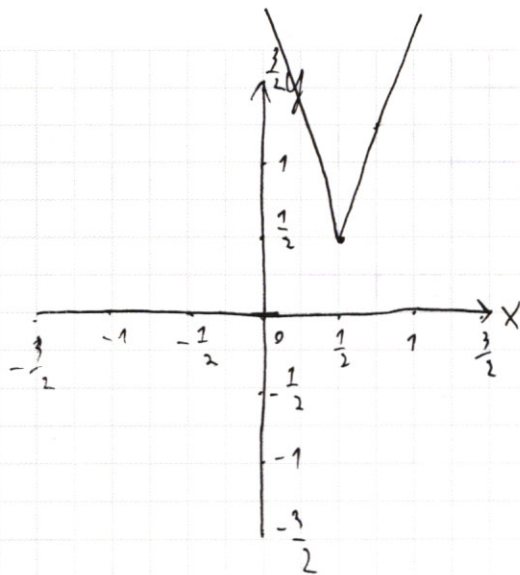
Подставим $x = -\frac{1}{4}$ (мин. граница) в формулы получим: прямая и парабола
пр.: $y = 1,5 \cdot -\frac{1}{4} - 0,25 = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$
пар.: $y = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$ только одна

Координаты совпадают, ~~т.к. пара~~ возможна пара (a, b) ~~для~~
следовательно.

(А не коснется)

Иначе, при сдвиге нашей прямой вверх или вниз, она ~~же~~ пересечет ~~или~~ либо график ~~или~~ либо параболу, что не может происходить ~~на~~ ~~данном~~ промежутке.

Ответ: $(1,5; -0,25)$



$$y = x + |2x - 1|$$

$$y = 2x^2 - x - 1$$

$$\frac{1}{4}$$

$$D = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1; 0,5$$

$$y = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$$

$$x = 0 \quad y = -1$$

$$x_0 = \frac{1}{4}$$

$$y_0 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{9}{8}$$

$$x = -1$$

$$y = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$x \geq 0,5; y = 2x - 1$$

$$x < 0,5; y = -x + 1$$

$$\begin{matrix} 2 & -5 \\ & -1 \end{matrix}$$

$$y = 2x^2 - x - 1$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1; -0,5$$

$$1,5x^2 - 0,25$$

$$x = -\frac{1}{4}; \text{ ПРЯМАЯ: } -0,375 + 0,25 = -0,125 = -\frac{5}{40}$$

$$\text{ПАРАБОЛА: } y = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$$

$$x + |2x|$$

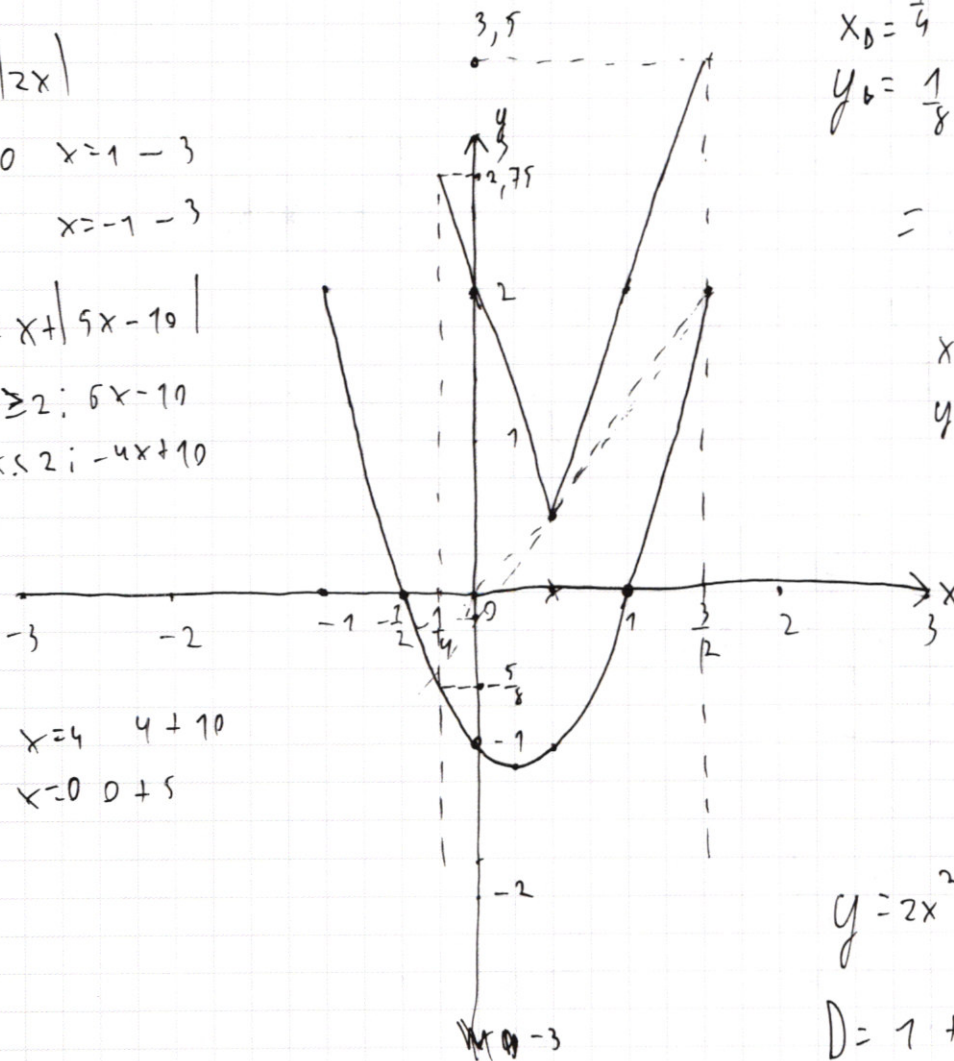
$$x = 0 \quad x = 1 - 3$$

$$x = -1 - 3$$

$$y = x + |5x - 10|$$

$$x \geq 2; 5x - 10$$

$$x < 2; -4x + 10$$



$$x = 4 \quad 4 + 10$$

$$x = 0 \quad 0 + 5$$

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b$$

$$\left(\frac{3}{2}; 2\right) \quad 2 = \frac{3}{2}a + b$$

$$1,5 = a$$

$$a = 1,5$$

$$b = -0,25$$

$$-0,25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x + y - 2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - 4y + 2$$

$$D = 16 - 8 = 8$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x + y - 2 = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3$$

$$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 2 = 0$$

$$25y^2 - 100y + 50$$

$$25y^2 - 100y + 20$$

$$2x^2 - 5x(y+1)$$

$$D = (-5y+6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (5y-2)$$

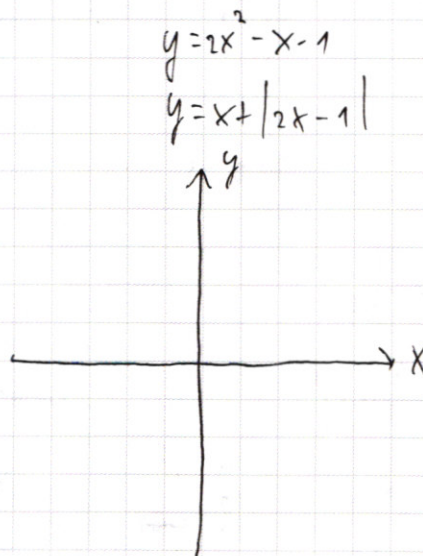
$$D = 25y^2 - 60y + 36 - 40y + 16 = 25y^2 - 100y + 52$$

$$5y+6 \pm \sqrt{25y^2 - 100y + 52}$$

$$x_{1,2} = \frac{5y+6 \pm \sqrt{25y^2 - 100y + 52}}{2}$$

$$2x^2 - x - 1 \leq x + |2x - 1|$$

$$2x^2 - x - 1 \leq \begin{cases} 3x + 1 & \text{if } x \geq 0.5 \\ -x - 1 & \text{if } x < 0.5 \end{cases}$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

--

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)