

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Ответ: 1

Решение: Пусть  $q$ -знам. геом. прогрессии,  
т.е.  $a=a$ ,  $b=aq$ ,  $c=aq^2$ , тогда уравнение

$$ax^2 - 2bx + c = 0 \quad \text{принимает вид}$$

$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$

$$a(x^2 - 2qx + q^2) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 & (1) \\ x^2 - 2qx + q^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$x^2 - 2qx + q^2 = 0 \quad (2)$$

1)  $a=0$ , тогда  $b=0$ ,  $c=0$

а ур-ие принимает вид

$$0 \cdot x^2 - 2 \cdot 0 \cdot x + 0 = 0; \quad 0=0$$

т.е. любое число  
является его корнем

$$2) x^2 - 2qx + q^2 = 0$$

$$(x-q)^2 = 0$$

$$x=q;$$

тогда  $q$ -4-ый член этой прогрессии  $\Rightarrow$

$$aq^3 = q^4 \Rightarrow aq^2 = 1 \Rightarrow c = 1 \quad (\text{опишем, что } q \neq 0,$$

если имелись бы, что  $q$  или  $a$  может

быть равно нулю, то есть и второй ответ  $c=0$ )

или так можно  
по условию (в условии  
не сказано, что такое  
может или не может  
быть) то  $c=0$   
тоже  
подходит.



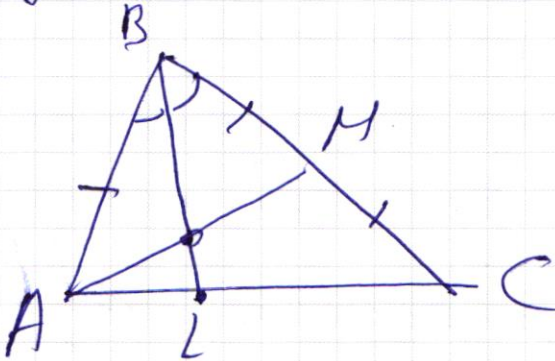
Ответ: 74

## Задача 2.

1) Пусть дан

Решение:

1) Пусть в  $\triangle ABC$  бис  $BL \perp$  мед  $AM$



Тогда в  $\triangle ABM$  мед  $BL$  содержит и  
высоту и бис.  $\angle ABM \Rightarrow$  он рб т.е  
 $AB = BM \Rightarrow \angle AB = \angle BC$

2) Обратно Пусть в  $\triangle ABC$   
 $\angle AB = \angle BC$ ,  $M$  - сф  $BC \Rightarrow AM$  - медиана.  
но  $\triangle ABM$  рб  $\Rightarrow$  бис  $\angle ABM = \angle ABC \perp AM$

Т.е. биссектриса  $\triangle ABC$  перпендикулярна  
одной и его медиан, тогда и только  
тогда, когда одна из сторон  $\triangle ABC$  в  
два раза больше другой

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Предметные задачи 2

Итак тогда в каждом из таких  
А одна сторона может быть обозначена  
за  $a$ , а вторая за  $2a$ , тогда

третья сторона  $900 - 3a$ .

При этом должны выполняться  
свойства  $\Delta$

$$(1) a + 2a = 3a > 900 - 3a$$

$$6a > 900$$

$$a > 150 \Rightarrow a \geq 151$$

$$(2) a + 900 - 3a = 900 - 2a > 2a \Rightarrow 900 > 4a \Rightarrow$$

$$a < 225 \Rightarrow a \leq 224$$

Всего существует  $224 - 150 = 74$  способа  
выбрать значение  $a$ , каждому  
из которых соотв. ровно один такой  $\Delta$ .



### Задача 3

Ответ:  $(9\sqrt{\frac{18}{13}} + 6, \sqrt{\frac{18}{13}} + 1); (2; 0)$

Решение:

1) Обозначим  $x-6=a, y-1=b \Rightarrow$   
 $x=a+6 \quad y=b+1$

Тогда  $\sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{y(x-6)-1(x-6)} =$   
 $= \sqrt{(x-6)(y-1)} = \sqrt{ab}$

$x-6y = a+6 - 6(b+1) = a-6b$

При этом из ~~уравн~~ уравн

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$  следует, что

$(x^2 - 12x + 36) + (2y^2 - 4y + 2) = 18 \quad \text{т.е.}$

$a^2 + 2b^2 = 18$

Итак, получаем систему

$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} & (1) \\ a^2 + 2b^2 = 18 & (2) \end{cases}$

из (1)  $\neq a^2 - 12ab + 36b^2 = ab^2 \quad (*)$

из ~~(2)~~ ~~18~~

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$  (решим относительно  $a$ )

$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$

$a_1, a_2 = \frac{13b \pm 5b}{2} = \begin{cases} 9b \\ 4b \end{cases}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

случай 1:

$$a = 9b \Rightarrow$$

$$a^2 + 2b^2 = 81b^2 + 2b^2 = 18$$

$$83b^2 = 18$$

$$b^2 = \frac{18}{83}$$

$$b = \sqrt{\frac{18}{83}} \quad a = 9\sqrt{\frac{18}{83}}$$

или

$$b = -\sqrt{\frac{18}{83}} \quad a = -9\sqrt{\frac{18}{83}}, \text{ но}$$

$$a - 6b = \sqrt{a^2 b^2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$a = -9\sqrt{\frac{18}{83}} \quad b = \sqrt{\frac{18}{83}} \text{ не подходит}$$

$$a - 6b = -9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6\sqrt{\frac{18}{83}} < 0$$

$$\Rightarrow a = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \quad b = \sqrt{\frac{18}{83}}$$

случай 2:

$$a = 4b \Rightarrow$$

$$a^2 + 2b^2 = 16b^2 + 2b^2 = 18$$

$$b = \pm 1 \quad a = \pm 4 \quad (a = 4 \quad b = 1 \text{ не подходит}$$

$$\Rightarrow a = -4 \quad b = -1$$

$$a - 6b < 0)$$



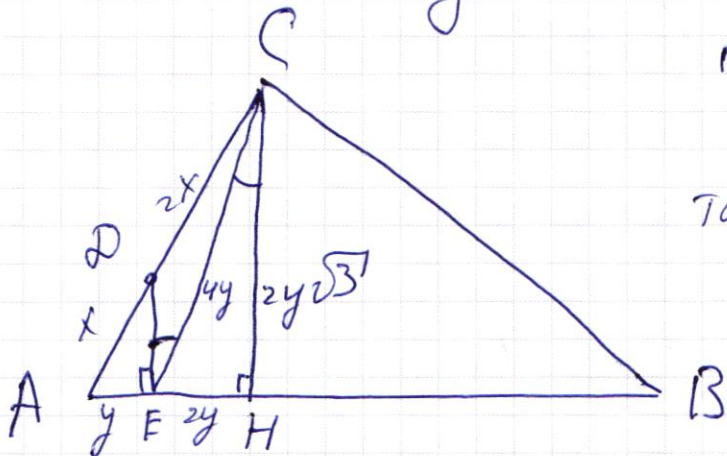
$$1) a = g \sqrt{\frac{1P}{P_3}} \quad b = \sqrt{\frac{1P}{P_3}}$$

$$x = g \sqrt{\frac{1P}{P_3}} + 6 \quad y = \sqrt{\frac{1P}{P_3}} + 1$$

$$2) a = -4 \quad b = -1$$

$$\cancel{a} = x = 2 \quad y = 0$$

Задача 4



1) Применим

Пусть  $AD = x$

Тогда  $DC = 2x$

( $AD:AE = 1:3$ )

2) ~~AE~~ Опустим высоту  $CH \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle A$

$DE \parallel CH$ , тогда по т. Фалеса  $AD:DC = AE:EH$

Пусть  $AE = y \Rightarrow EH = 2y$

из параллельности  $\angle CED = \angle ECH = 30^\circ \Rightarrow$

$CE = 2EH = 4y$ ,  $CH = 2y\sqrt{3}$ , тогда

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg} \angle HAC = \frac{CH}{AH} = \frac{2y\sqrt{3}}{3y} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Пусть  $AC = \sqrt{7} \Rightarrow$

$$BC = AC \cdot \operatorname{tg} \angle BAC = \sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

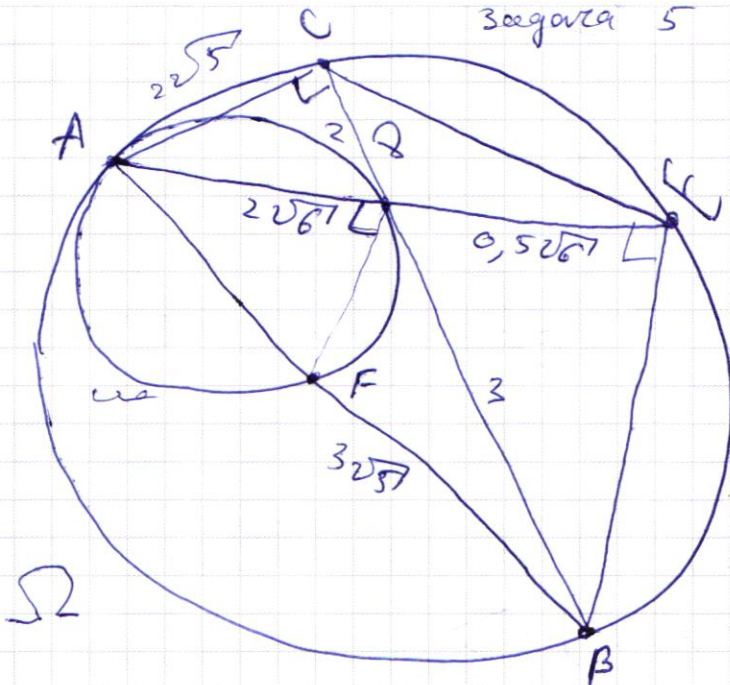
$$\text{Тогда } S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{2\sqrt{21}}{2 \cdot 3} \cdot \sqrt{7} =$$

$$= \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Ответ:  $\frac{7\sqrt{3}}{3} = S_{ABC}$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Лемма архимеда:

~~Пусть~~

Пусть две окр.  
 $\Omega$  и  $\omega$  кас. внутр.  
образом в точке A  
( $\omega$  внутри  $\Omega$ )

BC - хорда окр.

$\Omega$  кас  $\omega$  в точке

D, луч AD пересекает

$\Omega$  в точке E, тогда E - середина дуги BC

Решение:

~~По лемме~~ По лемме архимеда E-сер.  
дуги BC  $\Rightarrow$  AD - бис.  $\Delta$  BAC т. тогда по св-ву

бис-сы AB: AC = BP: CD = 3:2, пусть AC = 2x, тогда

AB = 3x, AB - диаметр по условию  $\Rightarrow$

$\angle BFA = 90^\circ$ , тогда по т. Пифагора для  $\Delta$  BAC

$$4x^2 + 25 = 9x^2 \Rightarrow 5x^2 = 25 \quad x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$AC = 2\sqrt{5}, \quad AB = 3\sqrt{5} \quad (\text{отсюда } R_{\Omega} = 1,5\sqrt{5})$$

по т. Пифагора для  $\Delta$  ACP

$$AP^2 = 20 + 4 = 24 \Rightarrow AP = 2\sqrt{6}, \quad \text{при этом по}$$

$$\text{св-ву хорд } AD \cdot DE = CD \cdot BP = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow$$

$$DE = \frac{6}{2\sqrt{6}} = 0,5\sqrt{6}$$



Известно что точка A лежит на линии  
центров AB - диаметр  $\Omega \Rightarrow$

AF - диаметр  $\omega$  ( $F = AB \cap \omega$ )  $\Rightarrow$

$\angle ADF = 90^\circ$  (опир. на AF),  $\angle AEB = 90^\circ$  (опир. на AB)

$\Rightarrow DF \parallel EB \Rightarrow$  по т. Фалеса.

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{2\sqrt{6}}{2,5\sqrt{6}} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$AF = AB \cdot \frac{4}{5} = 3\sqrt{5}, \quad \frac{4}{5} = \frac{12}{2,5} = \frac{12\sqrt{5}}{3} = 2,4\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$R_\omega = 1,2\sqrt{5}$$

2) Заметим что  $\sin \angle APB = \sin \angle CPE =$   
 $\sin \angle APC = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$  (из  $\triangle APC$ )  $\Rightarrow$

$$S_{APD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 3 = 3\sqrt{5}$$

$$S_{CPE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot 2 \cdot 0,5\sqrt{6} = 0,5\sqrt{5}$$

по т. Пифагора для  $\triangle BDF$

$$BE^2 = 9 - 1,5 = 7,5 = 25 \cdot \frac{3}{10} = \left(\sqrt{\frac{75}{10}}\right)^2 = \left(5\sqrt{\frac{3}{10}}\right)^2$$

$$BE =$$

$$S_{APC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$S_{BDE} = 5 \cdot \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = 5 \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5} \cdot 3}{4} = 0,75\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$S_{ABACE} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 0,5\sqrt{5} + 0,75\sqrt{5} = 6,25\sqrt{5}$$

Ответ:  $S_{ABACE} = 6,25\sqrt{5}$ ,  $R_\omega = 1,2\sqrt{5}$ ,  $R_\Omega = 1,5\sqrt{5}$



**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

Задача 7

Ответ: 202

Решение:

Заметим, что  ~~$f(\frac{x}{y}) =$~~

$$f(x) = f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(y) + f(\frac{x}{y}) \Rightarrow$$

$$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) < 0$$

тогда и только тогда, когда  
 $f(y) > f(x)$

Вниманием первые значения функции  
 $f(2) = f(p) = [\frac{p}{2}] = 1$  ( $p=2$  - простое)

$$f(p) = \frac{p-1}{2} \quad (p \geq 3) \quad \text{т.е. } f_p$$

- $f(2) = 1$
- $f(3) = 1$
- $f(5) = 2$
- $f(7) = 3$
- $f(11) = 5$
- $f(13) = 6$
- $f(17) = 8$
- $f(19) = 9$

$$\begin{aligned} f(2) &= f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \\ f(6) &= f(3) + f(2) = 1 + 1 = 2 \\ f(4) &= f(2) + f(2) = 1 + 1 = 2 \\ f(8) &= f(4) + f(2) = 2 + 1 = 3 \\ f(9) &= 2 \cdot f(3) = 2 \\ f(10) &= f(5) + f(2) = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 f(12) &= f(6) + f(2) = 3 \\
 f(14) &= f(7) + f(2) = 3 + 1 = 4 \\
 f(15) &= f(5) + f(3) = 2 + 1 = 3 \\
 f(16) &= 4 \cdot f(2) = 4 \\
 f(18) &= f(2) + f(9) = 1 + 2 = 3 \\
 f(19) &= f(20) = f(10) + f(2) = 1 + 3 = 4 \\
 f(21) &= f(3) + f(7) = 1 + 3 = 4 \\
 f(22) &= f(2) + f(11) = 5 + 1 = 6
 \end{aligned}$$

Итак.

$f(1) = 0$	$f(12) = 3$
$f(2) = 1$	$f(13) = 6$
$f(3) = 1$	$f(14) = 4$
$f(4) = 2$	$f(15) = 3$
$f(5) = 2$	$f(16) = 4$
$f(6) = 2$	$f(17) = 8$
$f(7) = 3$	$f(18) = 3$
$f(8) = 3$	$f(19) = 9$
$f(9) = 2$	$f(20) = 4$
$f(10) = 3$	$f(21) = 4$
$f(11) = 5$	$f(22) = 6$

Среди этих значений  
будем обозначать кол-во как #

#0 = 1
#1 = 2
#2 = 4
#3 = 6
#4 = 4
#5 = 1
#6 = 2
#7 = 0
#8 = 1
#9 = 1

~~Итак есть одно число~~

# Тогда для каждой группы выберем в ней число  $y$ , а число  $x$  мы можем выбирать только из меньших групп (разбиение на группы по значениям  $f(a)$ )  
т.е. если число  $y$ , такое, что  $f(y) = a$ , то  $f(x) < a$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда если  $f(y)=0$ , то кол-во способов выбрать  $x=0$

если  $f(y)=1$ , то  $f(x)=0 \Rightarrow x=1, y=1$  или  $y=2$

Если, например  $f(y)=3$ , то есть 6 вариантов

выбрать  $y$  и  $\#0 + \#1 + \#2 = 1+2+4=7$

вариантов выбрать  $x$ , и т.д.

получаем, это общее число пар

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 7 + 4 \cdot 13 + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 18 + 0 \cdot 20 +$$

$$1 \cdot 20 + 1 \cdot 20 = 0 + 2 + 12 + 42 + 52 + 17 + 36 + 0 + 20 + 21 =$$

$$= 108 + 17 + 36 + 41 = 108 + 94 = 112 + 90 = 202$$



# Задача 6.

~~Астро~~

Решение: Построим график

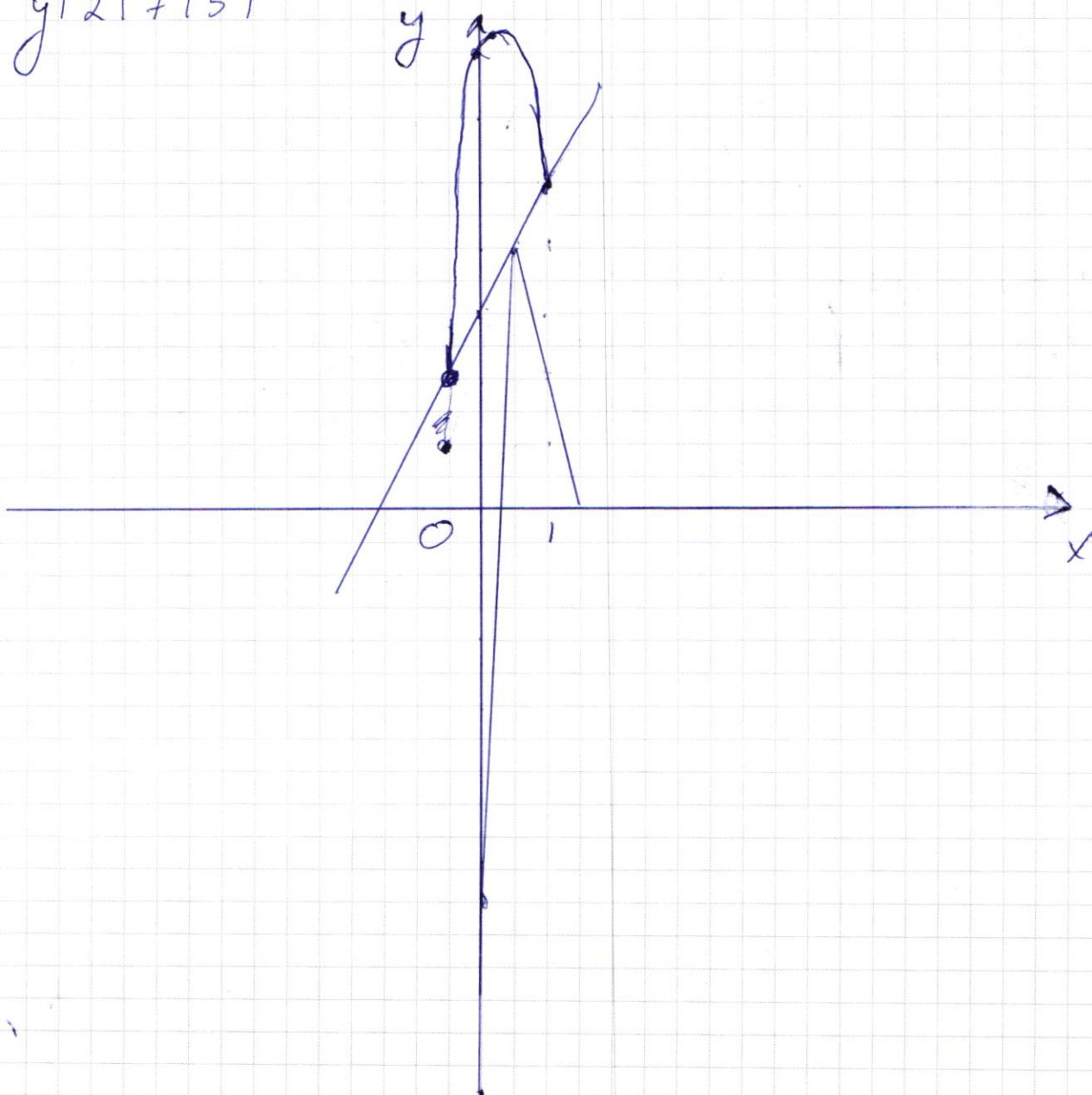
$$y = 8x - 6 \quad | \quad 2x - 1$$

~~$$y = 8x \quad | \quad 8x - 12x + 6 - 4x + 6, \quad x \geq \frac{1}{2}$$~~

$$y = 20x - 6 \quad | \quad x < \frac{1}{2}$$

$$y = -8x^2 + 6x + 7$$

x	-\frac{1}{2}	0	1
y	2	7	5



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$f(x) = ax + b$~~  Теперь введём обозначение

$$f(x) = ax + b$$

$$f_1(x) = 2x - 6(2x - 1)$$

$$f_2(x) = -2x^2 + 6x + 7$$

Будем рассматривать эти функции  
на промежутке  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  тогда

$$f(-\frac{1}{2}) \leq f_2(-\frac{1}{2})$$

$$f(\frac{1}{2}) \geq f_1(\frac{1}{2})$$

$$f(1) \leq f_2(1)$$

т.е.

$$-\frac{a}{2} + b \leq 2 \quad (1)$$

$$\frac{a}{2} + b \geq 4 \quad (2)$$

$$a + b \leq 5 \quad (3)$$

Тогда из (2) и (3)  $5 + \frac{a}{2} + b \geq 4 + a + b$

т.е.  $1 \geq \frac{a}{2} \quad 2 \geq a$

из (2) и (1)  $2 + \frac{a}{2} + b \geq 4 + b - \frac{a}{2} \quad \text{т.е. } a \geq 2$

из  $2 \leq a$  и  $a \geq 2$  следует, что  $a = 2$ .



$$\text{Тогда } \frac{2+v}{2} = \frac{a+v}{2} \geq 4 \Rightarrow v \geq 3$$

$$2+v = a+v \leq 5 \Rightarrow v \leq 3$$

$$\} \Rightarrow v = 3$$

Итак  $a=2$ ,  $v=3$ , начертав график функции легко убедиться, что такая функция подходит.

Ответ:  $a=2$ ,  $v=3$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} & (x-6)(y+1) = \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & \end{cases}$$

$$x^2-12x+36+2y^2-4y+2=10$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2=10$$

$$(x-6)^2+(y-1)^2=10-(y-1)^2$$

$$\sqrt{(x-6)(y-1)} = 2x^2-24xy+36y^2$$

$$x^2+36y^2-24xy$$

$$4x^2+25=9x^2$$

$$25=5x^2$$

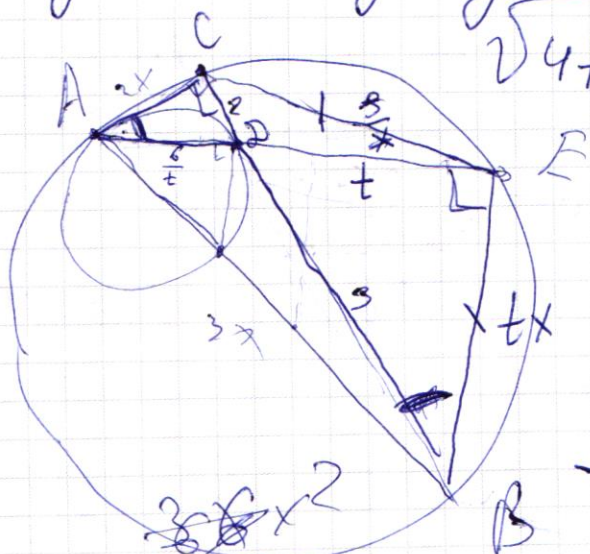
$$x^2=5 \quad x=\sqrt{5}$$

$$x^2+36y^2-12xy-36y^2-12x-12xy-4y+20=0$$

$$\sqrt{4+4x^2} \cdot 2$$

$$xy-6y-x+6$$

$$x-6+y-1=$$



$$t = \frac{6}{\sqrt{4+4x^2}}$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AD}{6}$$

$$\frac{4+4x^2}{6} = \frac{4+100}{6}$$

$$\frac{104}{6} = \frac{32\sqrt{5}}{52\sqrt{5}}$$



$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$a^2+2b^2=18$$

$$(x+y+4)(2y-12+x)$$

$$x^2-12xy+36y^2 = (x-6)(y-1)$$

$$x^2+y^2-12x+y^2-4y+4+16$$

$$x^2-12x+18$$

$$-2x + -2a + 2b = -4$$

$$144 - 4 \cdot 18 = 72 + 72$$

$$a^2+b^2=20$$

$$72 = 8 \cdot 9$$

$$2y^2-4y+20+x^2-12x=0$$

$$\Delta = 16 - 8(20+x^2-12x) = 16 - 160 - 8x^2 + 96x = -8(18+x^2-12x)$$

$$(x^2+2y^2-12x-4y+20)$$

$$x = 6 + \sqrt{2(18-y^2-2y)}$$

$$a^2-12ab+b^2=ab$$

$$x = 6 - \sqrt{2(18-y^2-2y)}$$

$$\begin{cases} a+6-6(b+1) = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$a-6b = \sqrt{ab}$$

$$a^2+2b^2=18$$

$$a^2+2b^2=18$$

$$a^2+36b^2=13ab$$

$$a^2-12ab+36b^2=ab$$

$$a^2+2b^2=18$$

$$a^2+2b^2=18$$

$$34b^2 = 13ab - 18$$

$$34b^2 + 13ab + 18 = 0$$

$$169a^2$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)  $a, b, c$

$$b = aq$$

$$c = aq^2$$

$$aq^3 = q^2 \Rightarrow c = aq^2 = 1$$

~~$$ax^2 - 2bx + c = 0$$~~

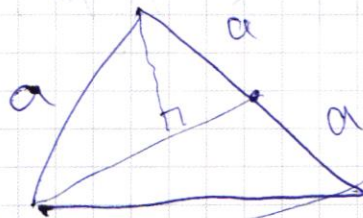
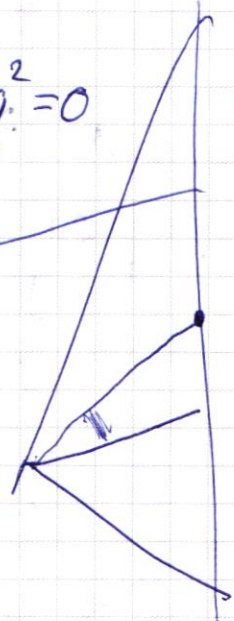
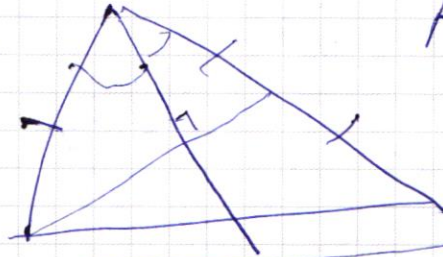
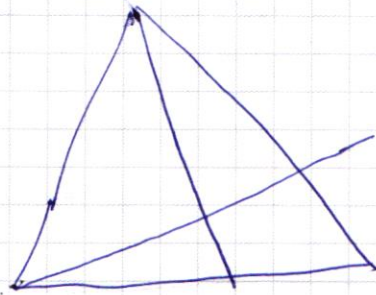
$$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$$

$$x^2 - 2qx + q^2 = 0$$

$$(x - q)^2 = 0$$

$$x = q$$

2)  $p = 900$



$$900$$

$$a + 2a + x = 900$$

$$3a > x \Rightarrow$$

$$3a + 3a > 3a + x = 900$$

$$6a > 900$$

$$a > 150$$

$$x + a > 2a$$

$$x > a$$

$$x > 151$$

$$900 = x + 3a > 4a$$

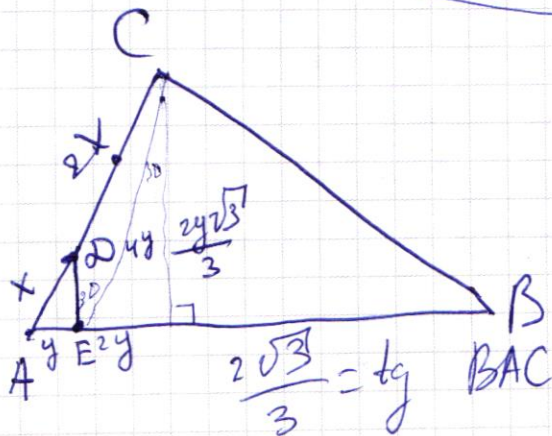
$$900 > 4a$$

$$\begin{array}{r} 900 \quad | \quad 4 \\ - 3 \quad \quad | 225 \\ \hline 10 \quad \quad | \\ - 8 \quad \quad | \\ \hline 20 \end{array}$$

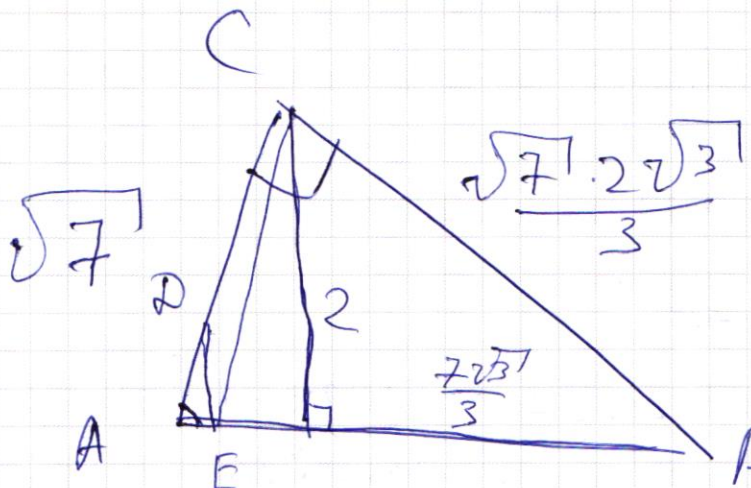
~~200~~  
301

$$\begin{array}{r} 225 \\ 450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 151 \quad 224 \\ \cdot 10 \\ 224 \\ 150 \\ \hline 741 \end{array}$$







$$7 + \frac{21 \cdot 4}{9} = 7 + \frac{7 \cdot 4}{3} = 7 + \frac{28}{3} = 7 + 9\frac{1}{3} = 16\frac{1}{3}$$

$$16 \cdot 3 = 48 \quad 49 \quad \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{7 \cdot 2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 7}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{y(x-6)} - (x-6) = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$D = 144 - 8y^2 + 16y - 80 = 64 - 8y^2 + 16y = 8(8 - y^2 + 2y)$$

$$y^2 - 4y - 8 = 0$$

$$16 + 32 = 96 = 16 \cdot 6 = 4\sqrt{6} \quad 48 = 16 \cdot 3 \quad 2\sqrt{2}$$

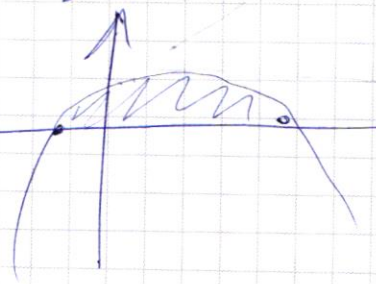
$$\frac{4 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{6}$$

$$2 \pm 2\sqrt{3}$$

$$4 - 24 = -20$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{2(8-y^2+2y)}}{2}$$

$$6 \pm \sqrt{2(8-y^2+2y)}$$





### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$$

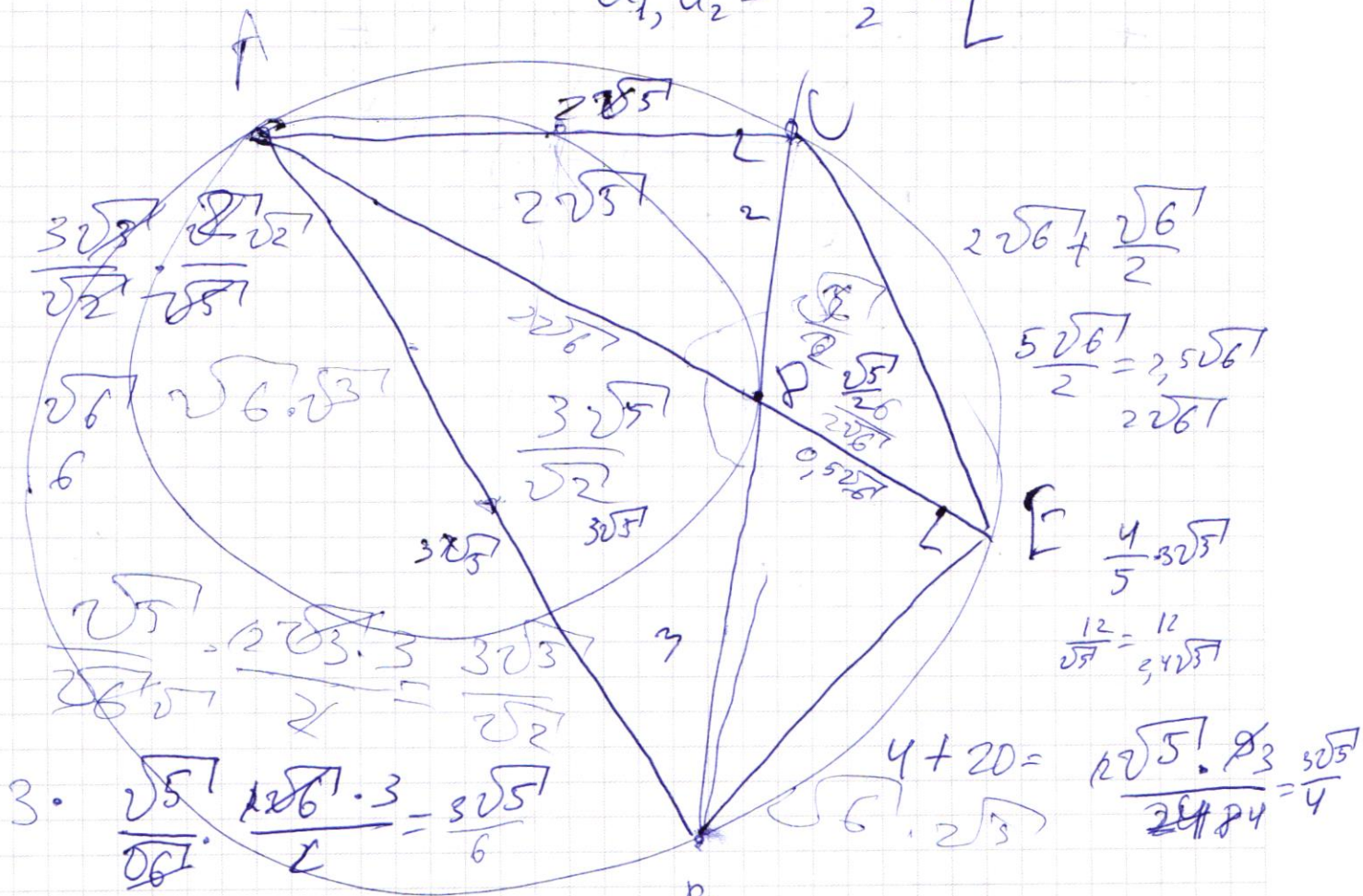
$$a^2 + 36b^2 = 13ab$$

$$a^2 + 2b^2 = 18$$

$$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$$

$$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$$

$$a_1, a_2 = \frac{13b \pm 5b}{2} =$$



$$4x^2 + 25 = 9x^2 \Rightarrow 5x^2 = 25, 3x = 3\sqrt{5}$$



$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(2) = 1 \quad f(4) = 2$$

$$f(p) = \left[ \frac{p}{2} \right]$$

$$f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1)$$

$$f(1) = 0$$

$$2 \leq x \leq 22$$

$$2 \leq y \leq 22$$

$$f(3) = \sqrt{\frac{3}{2}} = f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \quad f(p) = \frac{p-1}{2} \quad (p \geq 3)$$

$$1 = f(2) = f\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) = f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

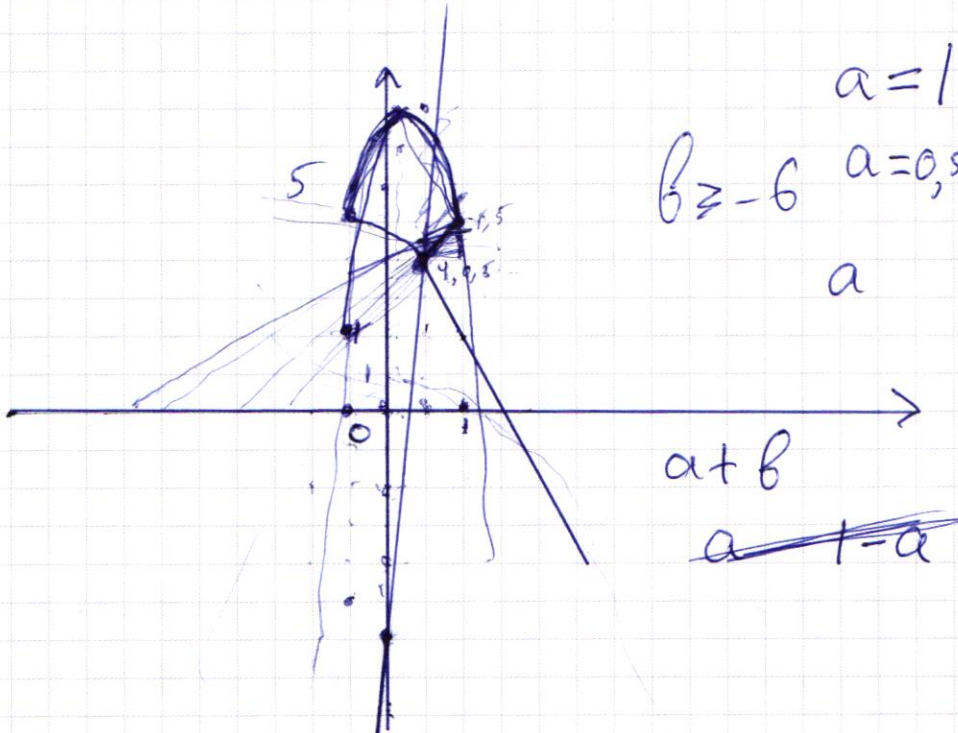
$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\underline{f(x)} = f\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) = \underline{f(y)} + f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \underline{f(x) - f(y)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$8x - 6 \mid 2x - 1 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$



$$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \# 8x - 6 \mid (1 - 2x) = \cancel{8x} + 12x - 6 = 20x - 6$$

$$8x - 12x + 6 = -4x + 6 \quad \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$\sim 8x^2 + 6x + 7$$

$$\frac{-6}{16} \quad \frac{6}{16}$$

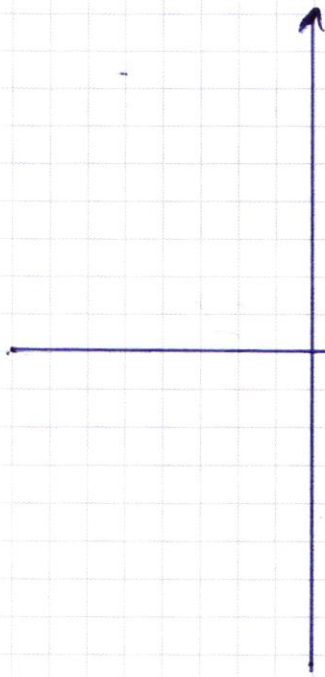
$$-2 \# 3 + 7$$

$$\rightarrow \frac{36}{16} + \frac{36}{16} + 7$$

$$\frac{-18}{16} + \frac{36}{16} + 7 \quad \frac{18}{16} \quad \frac{2}{16}$$



$a+b$



$$a+b \leq 5$$

$$0,5a+b \geq 4$$

$$0,5a+b+5 \geq 4+a+b$$

$$\underline{a \leq 2}$$

$$\underline{4 - 0,5a \leq b \leq 5 - a} \quad a > 0$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 42 \\ \hline 56 \\ 108 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ + 36 \\ + 41 \\ \hline 94 \end{array}$$

$$-\frac{a}{2} + b \leq 2 \quad \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b \geq 4 + b - \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} + b \geq 4 \quad a \geq 2$$

$$a + b \leq 5$$

$$a + b + \frac{a}{2} + b \geq 4 + a + b$$

$$2 \geq a$$

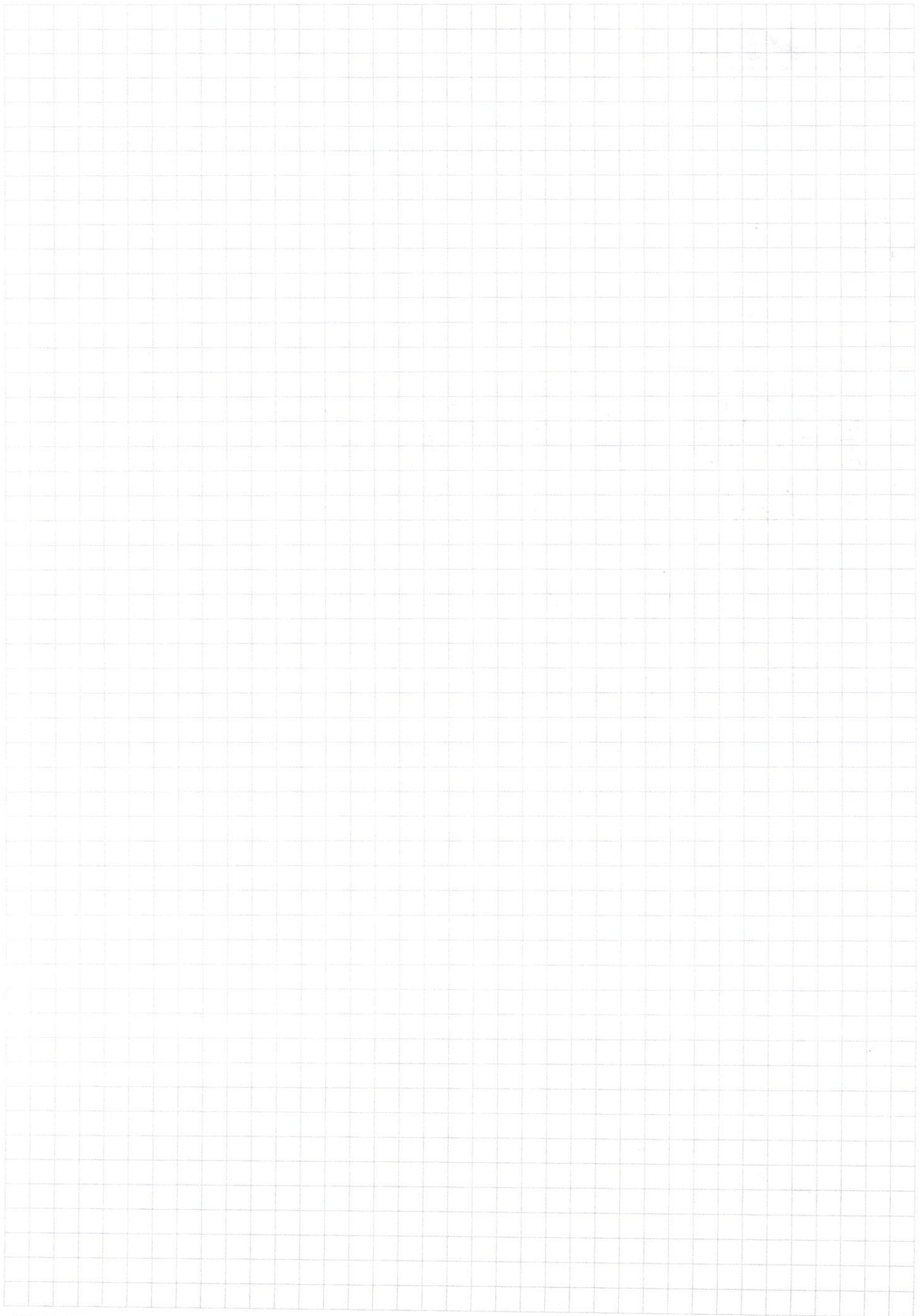
$$\frac{a}{2} + b \geq 4$$

$$a = 2$$

$$b \geq 3$$

~~3 + 7~~





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
------

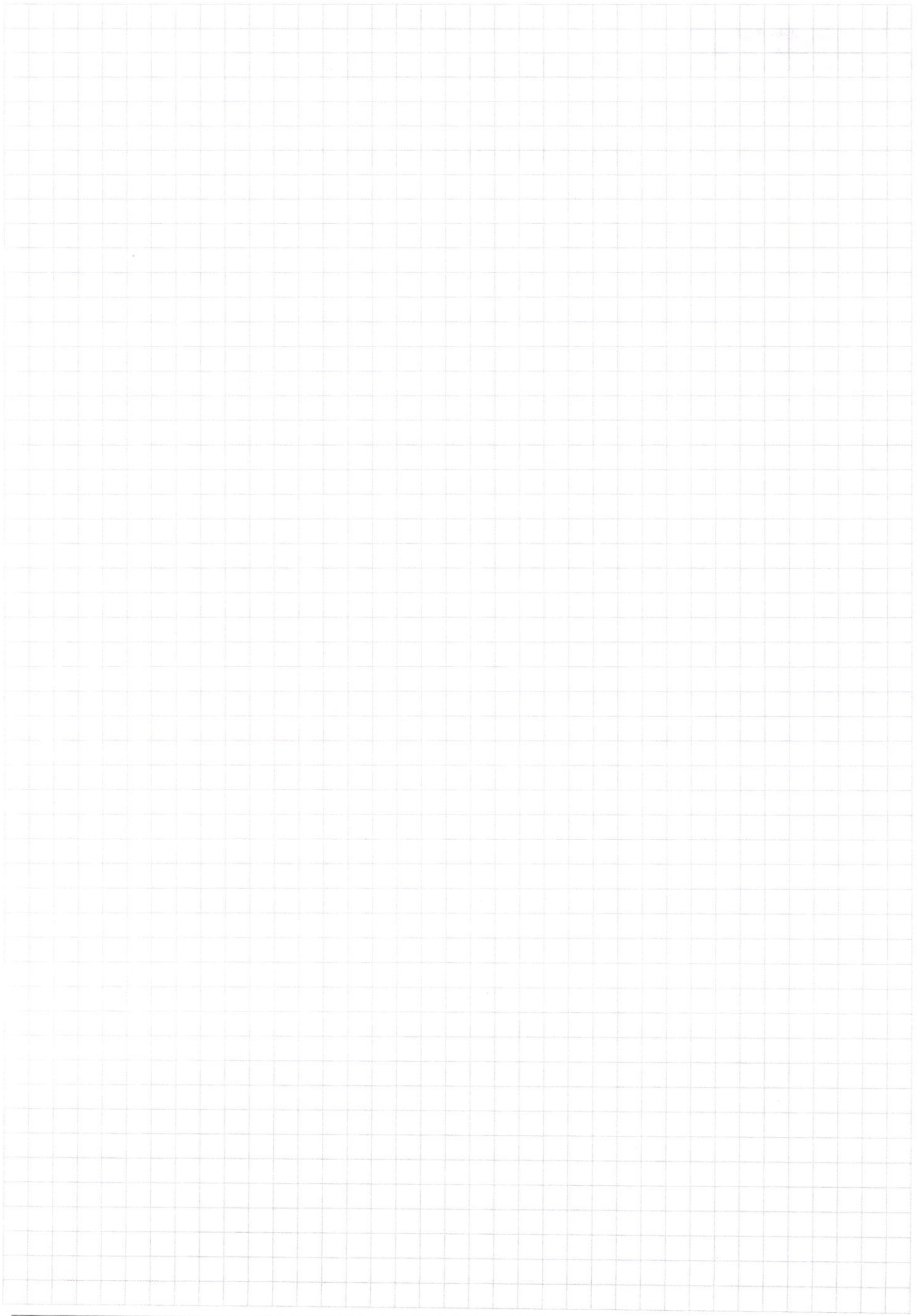
(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
------

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)